

朗道阻尼简介

陈童

Abstract

Contents

1 引言	1
2 BBGKY级联方程	2
3 Vlasov 方程	4
4 朗道阻尼	7
4.1 朗道阻尼的数学推导	8
4.2 计算和讨论	13
5 总结	15

1 引言

等离子体是由大量带电粒子组成的多体系统。原则上，描述它需要求解全部粒子的哈密顿动力学——这是一个自由度高到令人绝望的问题。然而物理学的智慧恰恰在于：我们往往并不需要追踪每一个粒子，而只需关心少数粒子的约化分布。从N体刘维尔方程出发，经过BBGKY级联、平均场封闭，最终得到单粒子的Vlasov方程，这条逻辑链条是现代动理学理论的骨架，也是理解等离子体集体行为的必经之路。

沿着这条路走下去，我们会遇见一个深刻而反直觉的现象——朗道阻尼。1946年，朗道从数学上预言：在无碰撞等离子体中，即使不存在任何耗散机制、运动方程时间反演不变，静电波的振幅仍会随时间指数衰

减。能量去了哪里？可逆的方程为何给出不可逆的衰减？这个“悖论”曾困扰物理学界数十年，直到相混合（phase mixing）的物理图像被厘清，再由Villani和Mouhot在数学上严格证明非线性朗道阻尼，才算彻底尘埃落定。朗道阻尼不仅是等离子体物理的基石，其影响还延伸到受控聚变、空间物理、加速器物理乃至星系动力学。

本文旨在为读者提供一条从第一性原理通向朗道阻尼的完整路径。除了引言部分和最后的总结之外，全文共分三节：第一节从全同粒子体系出发导出BBGKY级联方程，阐明信息如何逐级向高阶关联渗透；第二节在平均场封闭下导出Vlasov方程及其与Poisson方程的耦合，讨论其成立条件与守恒结构；第三节先以“冲浪类比”建立物理直觉，再完整给出朗道阻尼的数学推导——线性化、拉普拉斯变换、朗道围道、介电函数与阻尼率公式，最后计算麦克斯韦分布下的具体结果，并讨论相混合、粒子捕获与非线性朗道阻尼等深层问题。阅读本文需要读者具备统计力学与复变函数的基础知识。

2 BBGKY级联方程

全同粒子体系

考虑一个由 N 个全同粒子组成的封闭系统。即系统中的这 N 个粒子都是同一种粒子，也就是相互之间不可区分的全同粒子。假设记系统的状态为 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ ，所有可能状态构成了系统的相空间 $\mathcal{M}$ 。因此， $\mathcal{M}$ 的维数是，

$$\dim(\mathcal{M}) = 2n. \quad (1)$$

系统由 N 个粒子组成，所以 X 也可以标记成 $X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$ ，式中 $\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i$ 分别为第 i 的粒子的位置矢量和动量。由于每个粒子有三个自由度，因此，很显然有 $n = 3N$ 。所谓全同，我们指的是描述这个系统的所有物理可观测量在 N 粒子的任意置换下保持不变，特别的，哈密顿量 $H(X)$ 在 N 粒子的任意置换之下保持不变。

对于这种全同粒子系统，在进行相空间积分时还要稍作处理，具体来说，就是要额外除以一个 $N!$

$$\frac{1}{N!} \int_{\mathcal{M}} [\mathcal{O}(X)] \cdot \Omega. \quad (2)$$

式中 $[\mathcal{O}(X)]$ 表示某个被积函数， Ω 表示相空间 $\mathcal{M}$ 上的体积元。特别的，全同粒子体系相空间概率密度 $\rho(X, t)$ 的归一化条件为

$$\frac{1}{N!} \int_{\mathcal{M}} \rho(X, t) \cdot \Omega = 1. \quad (3)$$

这样处理的原因如下：假设记第 i 个粒子的位置和动量为 $(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)$ ，则如果这些都是全同粒子，那相点 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$ 与粒子任意置换以后的相点 $(\mathbf{x}_{P(1)}, \mathbf{x}_{P(2)}, \dots, \mathbf{x}_{P(N)}, \mathbf{p}_{P(1)}, \mathbf{p}_{P(2)}, \dots, \mathbf{p}_{P(N)})$ (式中 P 代表置换操作)就要等同为同一点，因为由于粒子间不可区分，它们描述同一个系统状态。由于 N 个粒子共有 $N!$ 种不同的置换，所以我们实际上要把 $N!$ 个相点进行这样的等同。如此一样，系统的相空间就不再是原来的 $\mathcal{M}$ 了，而是进行这样的等同以后的 $\mathcal{M}/S_N$ ，这里 S_N 代表 $N!$ 个不同置换的集合。如此一来，计算相空间积分的时候，就应该是像下面这样积

$$\int_{\mathcal{M}/S_N} [\dots] \cdot \Omega. \quad (4)$$

如果为了方便我们依然将积分区域保持为原来的 $\mathcal{M}$ ，那我们就多算了 $N!$ 倍，从而要额外除以 $N!$ ，即

$$\int_{\mathcal{M}/S_N} [\dots] \cdot \Omega = \frac{1}{N!} \int_{\mathcal{M}} [\dots] \cdot \Omega. \quad (5)$$

对于这样全同粒子封闭体系，假设我们把它任意分子 A, B 两个部分，则可以定义 A 部分的约化分布函数 $f_A(X_A, t)$ 为，

$$f_A(X_A, t) \equiv \frac{1}{N_B!} \int_{\mathcal{M}_B} \rho(X, t) \cdot \Omega_B. \quad (6)$$

根据 ρ 的归一化条件，不难得出 f_A 归一化为

$$\frac{1}{N_A!} \int_{\mathcal{M}_A} f_A(X_A, t) \cdot \Omega_A = \frac{N!}{N_A! N_B!}. \quad (7)$$

注意，不是归一为1，这就是我们称 f_A 为分布函数，而不称之为概率密度的原因，但是，当然它的实质就是约化概率密度。

BBGKY级联方程

现在，我们将整个系统的哈密顿量分解成

$$H(X) = H_A(X_A) + H_B(X_B) + V(x_A, x_B), \quad (8)$$

式中 $V(x_A, x_B)$ 表示 A, B 两部分之间的相互作用能量，假设它只和位置坐标有关，和动量无关。进一步，我们假设全同粒子间的相互作用都是两体相互作用，从而

$$V(x_A, x_B) = \sum_{i,j} U(\mathbf{x}_{Ai}, \mathbf{x}_{Bj}). \quad (9)$$

则有著名的BBGKY级联方程，

$$\frac{\partial f_A}{\partial t} + \{f_A, H_A\}_A = \sum_i \int \{U(\mathbf{x}_{Ai}, \mathbf{x}_{B1}), f_{A+1}\}_A \cdot \Omega_{B1}. \quad (10)$$

式中 $\{\dots\}_A$ 表示对 A 部分进行的泊松括号， f_{A+1} 表示原来的 A 部分再额外加上一个原 $B1$ 粒子所构成的总分布函数，

$$f_{A+1}(X_A, X_{B1}) \equiv \frac{1}{(N_B - 1)!} \int_{\mathcal{M}_{B-1}} \rho(X, t) \cdot \Omega_{B-1}. \quad (11)$$

Ω_{B-1} 表示 B 部分中除 $B1$ 粒子之外其余粒子的相空间体积元， Ω_{B1} 则表示单独一个 $B1$ 粒子的相空间体积元。

注意BBGKY级联方程的结构：如果 A 中只含一个粒子，则 f_1 的演化方程右边出现了 f_2 ；而如果写出 f_2 的方程，右边又会出现 f_3 。如此环环相扣，直至包含全部 N 个粒子信息的 ρ 本身。这正是信息守恒在分布函数语言中的面貌：总信息不多不少地存在，只是它会从 f_1 流向 f_2 ，再从 f_2 流向 f_3逐级向更高阶的关联函数中渗透。换言之，低阶分布函数的“有效信息”在减少，但它并没有消失，而是泄漏进了高阶关联之中。

3 Vlasov 方程

记第 i 粒子的相空间坐标为 $\mu_i = (\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)$ ，记其相空间体积元 $\Omega_i = d\mu_i$ 。沿用上一节的归一化约定 $\int f_1 d\mu_1 = N$ ，以及

$$\frac{1}{2!} \int f_2 d\mu_1 d\mu_2 = \frac{N!}{2!(N-2)!} \Rightarrow \int f_2 d\mu_1 d\mu_2 = N(N-1). \quad (12)$$

取整个系统的哈密顿量为

$$H(X) = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j} U(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j). \quad (13)$$

则BBGKY级联的第一级为

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}_1} = \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}_1} d\mu_2, \quad U_{12} \equiv U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \quad (14)$$

右端“碰撞项”含 f_2 ，方程不封闭。Vlasov 方程等于在平均场（无关联）封闭下对右端的重整化。

为此，把两体分布函数精确地分解为

$$f_2(\mu_1, \mu_2, t) = f_1(\mu_1, t)f_1(\mu_2, t) + g_2(\mu_1, \mu_2, t),$$

其中 g_2 是两体关联函数（pair correlation）。Vlasov 封闭假设为：

$$g_2 = 0.$$

即任意两粒子统计独立，每个粒子只感受到其余所有粒子产生的平均场，二体关联（真正的碰撞、涨落）被完全忽略。[严格来说还要考虑到归一化的小修正：由关系 $\int f_2 d\mu_2 = (N-1)f_1$ ，所以真正一致的写法应为 $f_2 = \frac{N-1}{N}f_1f_1$ ，它只给下面的平均势乘上因子 $(1 - \frac{1}{N})$ 。 $N \gg 1$ 时略去，所以以下直接取 $f_2 = f_1f_1$ 。]

将这些假设代入碰撞项：

$$\int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} [f_1(\mu_1)f_1(\mu_2)] d\mu_2. \quad (15)$$

考虑到 $\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}_1} = f_1(\mu_2, t) \frac{\partial f_1(\mu_1, t)}{\partial \mathbf{p}_1}$ 。并且注意到： U_{12} 只依赖位置坐标 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ，不含 $\mathbf{p}_1$ ，因此 $\partial/\partial \mathbf{p}_1$ 可整体提出对 μ_2 的积分号之外，而 $\partial f_1(\mu_1)/\partial \mathbf{p}_1$ 也不含被积变量，同样提出。因此碰撞项变成两个因子的乘积：

$$\text{RHS} = \left[\int \frac{\partial U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}_1} f_1(\mu_2, t) d\mu_2 \right] \cdot \frac{\partial f_1(\mu_1, t)}{\partial \mathbf{p}_1}. \quad (16)$$

对方括号内， $\partial/\partial \mathbf{x}_1$ 再提出对 $\mathbf{x}_2$ 的积分号外：

$$\int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{x}_1} f_1(\mu_2) d\mu_2 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \int U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \underbrace{\int f_1(\mu_2, t) d^3 \mathbf{p}_2 d^3 \mathbf{x}_2}_{\substack{n(\mathbf{x}_2, t) \\ \Phi(\mathbf{x}_1, t)}}. \quad (17)$$

于是自然地出现两个定义：1. 数密度（ f_1 的零阶矩）

$$n(\mathbf{x}, t) \equiv \int f_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3 \mathbf{p}; \quad (18)$$

2. 自洽平均势（所有粒子对 $\mathbf{x}$ 处一个试探粒子的平均作用势）

$$\Phi(\mathbf{x}, t) \equiv \int U(\mathbf{x} - \mathbf{x}') n(\mathbf{x}', t) d^3 \mathbf{x}' \quad (19)$$

平均力为 $\mathbf{F}_{\text{mf}} = -\nabla_{\mathbf{x}} \Phi$ 。于是碰撞项化为

$$\text{RHS} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_1}. \quad (20)$$

这一步的实质：原来“粒子1 与某个具体粒子2 的二体相互作用”被替换为“粒子1 与全体粒子密度场 $n(\mathbf{x}, t)$ 的平均相互作用”——多体问题退化为单体在外（自洽）场中的问题。

将最终的碰撞项代回 $A = 1$ 方程，并把平均力项移到左边（去掉下标1）：

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_1 - \nabla_{\mathbf{x}} \Phi \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_1 = 0, \quad \Phi(\mathbf{x}, t) = \int U(\mathbf{x} - \mathbf{x}') n(\mathbf{x}', t) d^3 \mathbf{x}'. \quad (21)$$

这就是Vlasov 方程（无碰撞动理学方程）。不难看出，它其实就是哈密顿量为如下形式的单粒子刘维尔方程

$$H_1 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \Phi(\mathbf{x}, t). \quad (22)$$

值得注意的是，势能 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ 本身依赖于 f_1 。另外，如果原来的整个系统处于一个外场中，那么重复上面的推导过程，不难看出最后需要把外场提供的势能额外加到 $\Phi(\mathbf{x}, t)$ 上去。

将Vlasov方程改成用 $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ 写出，并按习惯改用单体密度 $f = m^3 f_1$ （ $\int f d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{v} = N$ 或 $\int f d^3 \mathbf{v} = n$ ）：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f - \frac{\nabla_{\mathbf{x}} \Phi}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0. \quad (23)$$

注意它是自洽的非线性方程： Φ 由 $n = \int f d^3 \mathbf{v}$ 决定，而 Φ 又决定 f 的演化方程——“场驱动粒子，粒子产生场”。

Vlasov 封闭不是普适的，它成立的典型条件是长程相互作用加大 N ：首先，粒子间的相互作用力程长，换言之，每个粒子同时与 $\sim N$ 个粒子相互作用，单个“碰撞事件”只贡献总受力的 $O(1/N)$ ；严格的论证（Kac 标度、平均场极限）需要把势按 $U \rightarrow U/N$ 标度后取 $N \rightarrow \infty$ 的极限，由BBGKY 第二级可证 $g_2/f_1 f_1 \sim O(1/N)$ ，从而关联项严格趋于

零，Vlasov 方程成为精确极限；反之，短程强相互作用（中性气体的硬球型碰撞）中 g_2 不可忽略，必须保留关联——那时正确的最低阶封闭不是 Vlasov 方程而是 Boltzmann 方程（保留 g_2 在两体碰撞轨道上的贡献）。

Vlasov 方程仍是无碰撞的刘维尔型方程，在 $t \rightarrow -t, \mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ 下不变，从而时间反演不变，没有熵产生。不可逆性（趋向 Maxwell 分布）来自被丢弃的 g_2 ，要等 Boltzmann 级别的封闭才出现。Vlasov 方程可写为沿单体哈密顿相轨迹 $df/dt = 0$ ，其中单体哈密顿量 $H_1 = \mathbf{p}^2/2m + \Phi(\mathbf{x}, t)$ 。它本质上是“每个粒子在平均场中的 Liouville 定理”。因此， f 的任意泛函 $\int C(f) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}$ （包括熵 $-\int f \ln f$ ）都守恒（Casimir 不变量），因此 Vlasov 方程有无穷多个守恒量，与 Boltzmann 方程只有 5 个碰撞不变量形成鲜明对比。

与 Poisson 方程耦合

假设我们考察的是 N 个电子（每个带电 $-e$ ）在一个固定的正离子背景上的运动，设每个离子带电 $+e$ ，离子数密度为 n_0 。这些背景粒子当然要产生一个外场，所考察的电子系统就是在这个外场中运动。当然，这就是一个等离子体系统。

电子间的相互作用势能为 $U = e^2/(4\pi\epsilon_0|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$ ，它是 Poisson 方程的 Green 函数，故 Φ （要加上外场的贡献）等价地满足

$$\nabla^2 \Phi = e \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \rho = e(n_0 - n) = e \left[n_0 - \int f d^3\mathbf{v} \right], \quad (24)$$

式中我们已经考虑了背景正离子的贡献。这个方程与 Vlasov 方程合称 Vlasov - Poisson 系统，若再自洽计入电流产生的磁场，则为 Vlasov - Maxwell 系统。

不仅等离子体系统满足 Vlasov - Poisson 方程，而且自引力系统所满足的也是 Vlasov - Poisson 方程，只不过这时候相互作用势能是万有引力势能。

4 朗道阻尼

朗道阻尼是等离子体物理和动理学理论中最深刻、最反直觉的现象之一。它由苏联物理学家列夫·朗道于 1946 年首次从数学上预言。

简单来说，朗道阻尼是指在无碰撞的等离子体中，波的振幅随时间指数衰减的现象。它之所以反直觉，是因为这种衰减发生时，粒子之间并没有发生任何宏观的碰撞（即不涉及粘滞或电阻等耗散机制），Vlasov 方程本身是时间可逆的。

理解朗道阻尼最经典的方式是“冲浪类比”。想象一个电子在静电波中运动，波的相速度为 v_{ph} 。共振粒子：只有速度接近波相速度的粒子($v \approx v_{ph}$)才会与波发生强烈的能量交换，这被称为共振相互作用。稍慢的粒子($v < v_{ph}$)：波在“推”着这些粒子走，粒子从波中吸收能量，被加速到接近波的速度。稍快的粒子($v > v_{ph}$)：这些粒子在“推”着波走，粒子把能量交给波，自身减速。关键在于速度分布函数的形状。在热力学平衡态下，等离子体的速度分布是麦克斯韦分布，呈钟形。在 v_{ph} 处，分布函数的斜率 $\frac{\partial f_0}{\partial v}$ 是负数。

斜率为负意味着：速度稍慢于波的粒子数，多于速度稍快于波的粒子数。净效应：从波中吸收能量的粒子多，交给波能量的粒子少。结果：波的能量净损失，振幅衰减，这就是朗道阻尼。这就是朗道阻尼的物理本质——一种无碰撞的、可逆的能量转移（能量并没有变成热，而是以粒子相干运动的形式储存在相空间中，这与熵增式的碰撞耗散有本质区别）。反之，如果由于某种原因，在 v_{ph} 处分布函数的斜率为正（例如双流不稳定性中的“凹坑”分布），则波会获得净能量，这就是朗道增长（逆朗道阻尼）。

4.1 朗道阻尼的数学推导

为简单起见，考虑一维的均匀、无磁场、无碰撞的等离子体，离子视为均匀静止正电背景（中性化背景）。则电子的行为由Vlasov 方程（无碰撞动力学方程）描述：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \quad (25)$$

电场由Poisson 方程（即 $-eE = -\partial\Phi/\partial x$ 的Gauss 定律）自然地给出：

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} \left(n_0 - \int_{-\infty}^{\infty} f dv \right). \quad (26)$$

这里 $f(x, v, t)$ 是电子的一维分布函数， n_0 是离子背景密度。所以这是一个非线性、含时的微分 - 积分方程组。

下面把这个方程组线性化。设平衡态是空间均匀的、无电场的分布 $f_0(v)$ （满足整个系统电中性的条件 $\int f_0 dv = n_0$ ），在这之上叠加小扰动：

$$f(x, v, t) = f_0(v) + f_1(x, v, t), \quad |f_1| \ll f_0, \quad (27)$$

电场 E 本身是一阶小量。代入 Vlasov 方程：

$$\frac{\partial(f_0 + f_1)}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{eE}{m} \frac{\partial(f_0 + f_1)}{\partial v} = 0. \quad (28)$$

注意 $\partial f_0 / \partial t = \partial f_0 / \partial x = 0$ （平衡态均匀定常），且 $E \cdot \partial f_1 / \partial v$ 是两个一阶小量的乘积，是二阶小量，舍去。进而得到线性化 Vlasov 方程：

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (29)$$

另外，还有线性化 Poisson 方程：

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{e}{\epsilon_0} \int f_1 dv. \quad (30)$$

现在的问题是：给定初始扰动 $f_1(x, v, 0) = g(x, v)$ ，电场 $E(x, t)$ 随时间如何演化？这正是朗道1946年明确提出并解决的初值问题。

为此把扰动对 x 做傅里叶分解。由于方程系数与 x 无关，不同波数 k 的模式互不耦合，只需研究单个模式：

$$f_1(x, v, t) = f_k(v, t)e^{ikx}, \quad E(x, t) = E_k(t)e^{ikx}. \quad (31)$$

代入线性化方程组：

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + ikv f_k = \frac{e}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} E_k, \quad (32)$$

$$ikE_k = -\frac{e}{\epsilon_0} \int f_k dv. \quad (33)$$

进一步对时间做拉普拉斯变换。定义

$$\tilde{f}_k(v, s) = \int_0^\infty f_k(v, t)e^{-st} dt, \quad \text{Res} > 0, \quad (34)$$

对 $\tilde{E}_k(s)$ 类似。利用拉普拉斯变换的性质 $\int_0^\infty \frac{\partial f_k}{\partial t} e^{-st} dt = s\tilde{f}_k - f_k(v, 0)$ ，进而可以把方程(32)变为代数方程：

$$(s + ikv)\tilde{f}_k = g_k(v) + \frac{e}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \tilde{E}_k, \quad (35)$$

其中 $g_k(v) = f_k(v, 0)$ 是初始扰动的傅里叶分量。解出 $\tilde{f}_k$ ：

$$\tilde{f}_k(v, s) = \frac{g_k(v)}{s + ikv} + \frac{e}{m} \frac{1}{s + ikv} \frac{\partial f_0}{\partial v} \tilde{E}_k. \quad (36)$$

式(36)的物理含义很清楚：第一项是初始扰动沿自由流（ballistic）的传播，第二项是电场对分布函数的驱动。

对式(33)做拉普拉斯变换，并把(36)代入：

$$ik\tilde{E}_k = -\frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{g_k(v)}{s + ikv} + \frac{e}{m} \frac{\partial f_0/\partial v}{s + ikv} \tilde{E}_k \right] dv. \quad (37)$$

整理得：

$$\tilde{E}_k \left[ik + \frac{e^2}{m\epsilon_0} \int \frac{\partial f_0/\partial v}{s + ikv} dv \right] = -\frac{e}{\epsilon_0} \int \frac{g_k(v)}{s + ikv} dv. \quad (38)$$

定义等离子体介电函数

$$\varepsilon(k, s) \equiv 1 + \frac{\omega_{pe}^2/n_0}{ik} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s + ikv} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv \quad (39)$$

式中 $\omega_{pe}^2 = n_0 e^2 / m\epsilon_0$ 。于是

$$\tilde{E}_k(s) = \frac{ie}{k\epsilon_0} \frac{\int \frac{g_k(v)}{s + ikv} dv}{\varepsilon(k, s)}. \quad (40)$$

式(40)的拉普拉斯变换定义在 $\text{Re}s > 0$ （保证积分收敛）。但我们要找的是随时间衰减的模，根据拉普拉斯反演公式

$$E_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{E}_k(s) e^{st} ds, \quad (41)$$

这对应 $\text{Re}s < 0$ ，如果令 $s = -i\omega$ ，则衰减意味着 $\text{Im}\omega < 0$ 。但反演公式要求积分路径在 $\tilde{E}_k(s)$ 的所有奇点右侧（ σ 足够大）。为了研究长时间行为，需要把积分路径向左平移，这就必须将 $\tilde{E}_k(s)$ 解析延拓到 $\text{Re}s \leq 0$ 的区域。

为此，考察介电函数中的积分

$$I(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0/\partial v}{s + ikv} dv = -\frac{i}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0/\partial v}{v - is/k} dv, \quad (42)$$

被积函数在 $v_p = is/k$ 处有极点。当 $\text{Re}s > 0$ 时极点的上半 v 平面，实轴积分路径没有问题。但当 s 延拓到 $\text{Re}s < 0$ 时，极点穿过实轴落到下半平面。

朗道的处理 (Landau prescription) 是：在解析延拓过程中，积分围道必须随之向下变形，使得极点 $v_p = is/k$ 始终保持在积分路径上方——即围道始终从极点下方绕过。这样定义的积分是全平面（除了割线）上的解析函数，这就是著名的朗道围道 (Landau contour)。

我们最终关心 $\text{Res} \rightarrow 0^+$ (即 $s \rightarrow -i\omega + 0^+$) 的极限。此时极点 $v_p = \omega/k + i0^+$ 从上方压向实轴。利用 Sokhotski - Plemelj 公式：

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - x_0 - i\eta} = \mathcal{P} \frac{1}{x - x_0} + i\pi \delta(x - x_0), \quad (43)$$

其中 $\mathcal{P}$ 表示柯西主值。于是介电函数在实频率轴上的表达式为

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{n_0 k^2} \left[\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v}{v - \omega/k} dv + i\pi \left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v=\omega/k} \right] \quad (44)$$

(这里已把 $s = -i\omega$ 代入并整理系数。) 虚部的出现完全来自共振点 $v = \omega/k$ 处的半围道贡献——这正是朗道阻尼的数学印记。如果天真地在实轴上取主值积分而忽略半残数项，就会得到完全实的介电函数，从而“丢失”阻尼——这正是朗道之前的研究者（如 Vlasov 本人的处理）所犯的错误。

假设把 $\varepsilon(k, \omega)$ 的实部和虚部分开，写成

$$\varepsilon = \varepsilon_r + i\varepsilon_i. \quad (45)$$

则很显然有

$$\varepsilon_r(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{n_0 k^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v}{v - \omega/k} dv, \quad \varepsilon_i = -\frac{\pi \omega_{pe}^2}{n_0 k^2} \left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v=\omega/k}. \quad (46)$$

$\tilde{E}_k(s)$ 在复 s 平面上的奇点来自分母 $\varepsilon(k, s) = 0$ 的根。拉普拉斯反演路径左移时，每越过一个 $\varepsilon(k, s) = 0$ 的零点 $s_j = -i\omega_j$ (这里 ω_j 一般是复的)，就贡献一个留数项：

$$E_k(t) \sim \sum_j \frac{N(s_j)}{\partial \varepsilon / \partial s|_{s_j}} e^{s_j t} + \text{割线项}, \quad (47)$$

其中分子 N 与初始扰动有关。割线（来自 v 积分自身的非解析性）的贡献按幂律衰减，长时间后起主导作用的是复 s 平面最右端的极点，即

$$E_k(t) \propto e^{-i\omega_r t} e^{\gamma t}, \quad s = -i(\omega_r + i\gamma) \iff \omega = \omega_r + i\gamma. \quad (48)$$

若 $\gamma < 0$ ，波指数衰减——这就是朗道阻尼。

为了求出这个 γ ，现在对于复关系 $s = -i\omega$ ，求解色散关系 $\varepsilon(k, \omega) = 0$ ，其中 $\omega = \omega_r + i\gamma$ 。由于求的是 s 最右边的零点，所以假设弱阻尼 $|\gamma| \ll \omega_r$ ，进而可以将介电函数在 ω_r 附近作泰勒展开：

$$\varepsilon(k, \omega_r + i\gamma) \approx \varepsilon_r(k, \omega_r) + i \left[\varepsilon_i(k, \omega_r) + \gamma \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \omega_r} \right] = 0, \quad (49)$$

实部和虚部分别为零给出：

$$\varepsilon_r(k, \omega_r) = 0, \quad (50)$$

$$\gamma = -\frac{\varepsilon_i(k, \omega_r)}{\partial \varepsilon_r / \partial \omega_r}. \quad (51)$$

从这两个方程就可以定出 ω_r 和 γ 。

考察 ε_r 。由式(49)的主值积分部分：

$$\varepsilon_r(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{n_0 k^2} \mathcal{P} \int \frac{\partial f_0 / \partial v}{v - \omega/k} dv. \quad (52)$$

定义热速度 v_{te} 为， $v_{te}^2 \equiv \frac{1}{n_0} \int v^2 f_0(v) dv$ 。对于长波（ $kv_{te} \ll \omega$ ，即相速度远大于热速度），把 $1/(v - \omega/k)$ 在 $v = 0$ 处展开：

$$\frac{1}{v - \omega/k} = -\frac{k}{\omega} \left(1 + \frac{kv}{\omega} + \frac{k^2 v^2}{\omega^2} + \cdots \right). \quad (53)$$

代入 $\varepsilon_r(k, \omega)$ 的表达式逐项积分，注意边界项 $f_0(\pm\infty) = 0$ ，即有：

$$\int \frac{\partial f_0 / \partial v}{v - \omega/k} dv = -\frac{k}{\omega} \underbrace{\int \frac{\partial f_0}{\partial v} dv}_{=0 \text{ (边界项)}} - \frac{k^2}{\omega^2} \underbrace{\int v \frac{\partial f_0}{\partial v} dv}_{=-n_0} - \frac{k^3}{\omega^3} \underbrace{\int v^2 \frac{\partial f_0}{\partial v} dv}_{=0} + (\cdots) \quad (54)$$

逐次分部积分： $\int v \partial f_0 / \partial v dv = -\int f_0 dv = -n_0$ ， $\int v^2 \partial f_0 / \partial v dv = -2 \int v f_0 dv = 0$ （假设分布 f_0 是对称的），下一阶 $\int v^3 \partial f_0 / \partial v dv = -3 \int v^2 f_0 dv = -3v_{te}^2 n_0$ 。

因此，保留到 k^4 阶，有：

$$\frac{1}{n_0} \int \frac{\partial f_0 / \partial v}{v - \omega/k} dv \approx \frac{k^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{te}^2}{\omega^2} \right). \quad (55)$$

代回 $\varepsilon_r = 0$ ，有：

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2 v_{te}^2}{\omega^2} \right) = 0. \quad (56)$$

迭代求解（零阶 $\omega^2 \approx \omega_{pe}^2$ ）：

$$\omega_r^2 \approx \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_{De}^2). \quad (57)$$

其中 $\lambda_{De} = v_{te}/\omega_{pe}$ 是德拜长度。这就是朗缪尔波（电子等离子体波）的色散关系，与流体理论结果一致——合理，因为实部描述的是整体集体振荡。

下面推导阻尼率 γ 的公式。由式(4.1)，介电函数虚部为

$$\varepsilon_i(k, \omega_r) = -\frac{\pi \omega_{pe}^2}{n_0 k^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega_r/k}. \quad (58)$$

计算分母：由 $\varepsilon_r \approx 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$ （主导项），

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \omega} \Big|_{\omega_r} \approx \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega_r^3} > 0. \quad (59)$$

代入式(51)：

$$\gamma = \frac{\pi \omega_{pe}^2 \omega_r^3}{2n_0 k^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega_r/k}. \quad (60)$$

这就是朗道阻尼率的一般公式。

这个公式清晰地表明：- 阻尼率完全由分布函数在相速度 $v_\varphi = \omega_r/k$ 处的斜率决定；- 若 $\partial f_0/\partial v < 0$ （斜率为负，慢于波的粒子比快于波的粒子多），则 $\gamma < 0$ ：表现为波的阻尼衰减；- 若某速度区间内 $\partial f_0/\partial v > 0$ （斜率为正，如双束流、尾隆起bump-on-tail 分布），则 $\gamma > 0$ ：表现为波的增长（也就是系统的不稳定性），如著名的束-等离子体不稳定性。这统一了“阻尼”与“增长”两种现象——它们都是共振波-粒子相互作用的两面。

4.2 计算和讨论

为了算出 γ 的具体结果，不妨取平衡分布为一维麦克斯韦分布：

$$f_0(v) = n_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_{te}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{te}^2}\right), \quad v_{te}^2 = \frac{T_e}{m}. \quad (61)$$

在共振点 $v = \omega_r/k \approx \omega_{pe}/k$ 处：

$$\frac{1}{n_0} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega_r/k} = -\frac{\omega_r/k}{\sqrt{2\pi} v_{te}^3} \exp\left(-\frac{\omega_r^2}{2k^2 v_{te}^2}\right). \quad (62)$$

代入一般公式（用 $\omega_r \approx \omega_{pe}$ 化简系数）：

$$\gamma = \frac{\pi\omega_{pe}^4}{2k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{te}^3k} \cdot \left(-\frac{\omega_r}{\omega_{pe}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2k^2\lambda_{De}^2}\right) < 0. \quad (63)$$

从上面的结果可知，1. $\gamma < 0$ ：波确实在阻尼衰减，麦克斯韦等离子体是稳定的。2. 强烈的波长依赖： $k\lambda_{De} \ll 1$ （长波）时，指数因子 $\exp[-1/(2k^2\lambda_{De}^2)]$ 极小，阻尼几乎为零（从而验证了前文的弱阻尼假设）——相速度远大于热速度，几乎没有共振粒子；当 $k\lambda_{De} \rightarrow 1$ 时阻尼变得极强，波在一个周期内就被阻尼掉。因此朗缪尔波只在 $k\lambda_{De} \ll 1$ 时是“好”的集体模式。

1964年Malmberg和Wharton在实验上清晰测量了朗缪尔波的朗道阻尼率，与理论定量吻合，成为等离子体物理学的经典实验。此后朗道阻尼的概念被广泛应用于：- 受控聚变：波的共振加热（如阿尔芬波、回旋阻尼）、快波电流驱动；- 空间等离子体：太阳风湍流谱耗散（Alfvén波的朗道阻尼是湍流能量耗散的主要候选机制之一）；- 自由电子激光、粒子加速器中的集体不稳定性分析；- 星系动力学（Vlasov - Poisson 同样描述无碰撞恒星系统，Jeans问题中同样有“引力朗道阻尼”）。

但这里有一些深层次的问题可以讨论：首先，Vlasov方程是时间反演不变的（无碰撞），熵守恒，那“阻尼”的能量去哪了？答案是：扰动能量并没有消失，而是转移到了分布函数的越来越细的相空间结构中。由式(36)第一项可见，自由流项 $g_k(v)/(s + ikv)$ 对应扰动在速度空间中按 $f_1 \sim e^{-ikvt}$ 演化——因此，随时间增长， f_1 在 v 方向上的振荡越来越剧烈（相混合，phase mixing）。当对速度积分求密度扰动 $\int f_1 dv$ 时，剧烈振荡导致相消干涉，宏观电场衰减。换言之，信息藏在分布函数的小尺度结构中，粗粒化之后才表现为“耗散”。这类似于打水漂后水面波纹看似消失，实则能量弥散到了不可见的精细结构中。

其次，线性理论预言波按 $e^{\gamma t}$ 无限衰减，但共振电子会被波捕获（trapping），在波势阱中来回振荡（弹跳频率 $\omega_b = \sqrt{ekE/m}$ ）。当 $\omega_b t \gtrsim 1$ 后，捕获粒子与波来回交换能量，阻尼率随时间减小（O’Neil, 1965），振幅出现周期性起伏（振幅振荡）。这解释了为什么实验中观察到的阻尼后期偏离线性指数律。

前文我们推导了线性朗道阻尼：在均匀平衡 $f_0(v)$ 附近把Vlasov - Poisson方程线性化，静电场以指数速率衰减。但线性化只是一个近似——真正的非线性方程中，衰减的电场反过来驱动分布函数产生高阶修正，这些修正

又产生新的电场。线性阻尼会不会被非线性效应破坏？这个问题从1946 年朗道的论文之后就悬而未决，长达六十余年。

法国数学家Cédric Villani（2010年菲尔兹奖得主）和Clément Mouhot在2009 年发表了关于非线性朗道阻尼的严格数学证明。他们的工作揭示了深刻的物理本质：在解析/Gevery 类初值下，即使波幅较大，只要不超过某个阈值，非线性朗道阻尼依然存在！波的衰减不是因为碰撞引起的熵增加，而是因为相混合。波的能量并未消失，而是转移到了粒子分布函数的高阶速度矩中，形成了极其精细的相空间丝状结构。在对相空间丝状结构的粗粒化下，这种衰减在弱拓扑意义下就是不可逆的，但在细粒度相空间中信息并未丢失。Villani 的工作彻底理清了“可逆方程导致不可逆衰减”这一悖论的本质：朗道阻尼是相空间的弱渐近稳定性，而非真正的热力学耗散。

5 总结

本文沿“多体系统→BBGKY级联→Vlasov方程→朗道阻尼”这条主线，完成了对朗道阻尼从基础到前沿的系统性介绍。回顾全文，有几个要点值得再次强调。

第一，BBGKY级联揭示了信息守恒在分布函数语言中的面貌：低阶分布函数“丢失”的信息并未消失，而是逐级泄漏进高阶关联之中。Vlasov方程正是在忽略二体关联的平均场封闭下得到的一一它把多体问题退化为单体在自洽场中的问题，其适用条件是长程相互作用加大粒子数极限，等离子体与自引力系统都属此类。

第二，朗道阻尼的数学核心在于初值问题的正确处理。对线性化Vlasov-Poisson系统作拉普拉斯变换后，为研究长时间行为必须将介电函数解析延拓，朗道围道规定积分路径始终从极点下方绕过。正是这一处理使介电函数在实频率轴上获得虚部，其全部贡献来自共振点 $v = \omega/k$ 处——阻尼率完全由平衡分布函数在相速度处的斜率决定：斜率为负则波衰减，斜率为正则波增长。阻尼与增长由此统一为共振波 - 粒子相互作用的两面。对麦克斯韦分布的具体计算表明，朗缪尔波仅在 $k\lambda_{De} \ll 1$ 时是弱阻尼的良好集体模式。

第三，朗道阻尼的物理本质是相混合而非耗散。Vlasov方程时间反演不变、熵守恒，波的“损失”能量实际转移到了分布函数越来越精细的相空间丝状结构中；对速度积分时的相消干涉使宏观电场看似衰减，信息却完

好地封存于细粒度结构里。Villani与Mouhot的非线性证明最终表明：朗道阻尼是相空间的弱渐近稳定性——“可逆方程导致不可逆衰减”的悖论由此消解。

从1946年的理论预言，到1964年的实验验证，再到2009年的严格数学证明，朗道阻尼的故事横跨六十余年，堪称物理直觉与数学严密性交相辉映的典范。希望本文能帮助读者既见其“术”——推导的每一步细节，也见其“道”——多体世界中集体、关联与不可逆性的深刻联系。