

KT相变

陈童

April 9, 2026

Contents

1 引言	2
2 两维没有连续对称性自发破缺	3
3 涡旋算符与BKT相变的正弦-戈登描述	5
3.1 BKT相变的连续场论描述	5
3.2 阿贝尔对偶性	7
3.3 涡旋算符与正弦-戈登描述	8
4 关于BKT相变的讨论	10
5 总结	13

1 引言

KT相变是凝聚态物理中的一场革命，它打破了二维世界无法发生相变的传统认知，并揭示了一种由拓扑缺陷主导的全新物理秩序。其核心洞察在于，这种相变并非源于传统的对称性破缺，而是由一类被称为涡旋（Vortex）的拓扑缺陷的“解绑（Unbinding）”所驱动的。

这一突破性的理论由物理学家David J. Thouless和J. Michael Kosterlitz在20世纪70年代初提出。值得注意的是，苏联物理学家Vadim Berezinskii在更早的时候也独立提出了类似理论，因此该相变也被称为Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) [1, 2, 3]相变。因在这一领域的工作，Thouless和Kosterlitz 与另一位科学家共同获得了2016年诺贝尔物理学奖。

20世纪中叶，物理学家对二维世界是否能够发生相变普遍持否定态度，这源于两个关键事件：首先是理论的禁令，1966年，Mermin-Wagner定理[4, 5, 6]从数学上证明，在二维系统中，热涨落会强大到足以破坏任何连续对称性自发破缺下的长程有序，换言之，二维系统不会发生连续对称性的自发破缺，因此根据朗道相变理论，似乎也就不会发生相应的常规相变。然而，同期实验却在二维超流氦-4薄膜中观测到了类似相变的行为，理论与实验之间产生了尖锐的矛盾。

正是在这个背景下，Kosterlitz与Thouless决定挑战这一难题。他们意识到，要解释实验现象，必须跳出传统思维，考虑更高能量的激发——即涡旋，而不是只关注低能涨落(如自旋波)。

理论的核心是一个简单而深刻的模型——二维XY模型。它描述了一组在平面上可以自由旋转的“自旋”（可类比为小磁针）的相互作用，是理解超流薄膜、二维磁体等系统的理想框架。Mermin-Wagner定理虽然禁止了真正的长程有序，但二维系统在低温下仍可以维持一种微妙的状态——准长程有序。在这种状态下，自旋-自旋关联函数随距离以幂律形式衰减，而不是高温无序状态下的指数衰减。当系统的温度升高，热涨落不仅会引起自旋波（平滑的扰动），更会激发拓扑缺陷——涡旋（Vortex）和反涡旋（Anti-vortex）。这些缺陷具有一个重要的拓扑不变量——“绕数”，表征了绕着平面上的一条闭合回路走一圈自旋旋转的总圈数，通常为+1（涡旋）或-1（反涡旋）。由于绕数是一个整数，无法通过连续的变形将其变为0，这赋予了它们“拓扑保护”的特性，使其极其稳定，不像普

通的局部扰动那样容易消失。在低温下，涡旋与反涡旋总是成对出现，并相互束缚在一起。从宏观上看，由于自旋波的存在，这涡旋束缚态仍然维持着系统的准长程有序。随着温度升高，熵（描述系统混乱度）的作用越来越大。当达到临界温度 T_c 时，熵的增加足以克服涡旋-反涡旋对之间的对数型吸引势能。这对束缚被“熔断”，涡旋与反涡旋解绑，开始在系统中自由移动。这种自由运动的涡旋会像湍流一样，彻底扰乱系统的准长程有序，使其变为无序态。这种涡旋与反涡旋的相互作用与二维库仑气体中的正负电荷行为有着深刻的数学对应[2, 3][7][9]。低温下的束缚涡旋对，就好比库仑气体中的绝缘态（正负电荷被束缚在一起）；高温下的自由涡旋，则对应导体的导电态（正负电荷自由移动）。

BKT相变超越了连续相变的朗道范式（该范式将相变与对称破缺联系起来）。因此，人们传统上研究BKT相变，不是通过连续场论，而是作为格点理论（2D XY自旋模型）或作为等效的库仑等离子体系统。但BKT相变也可以用有效场论来描述，即二维正弦-戈登模型[7, 8]。这里，我们将讲述关于这一有效场论的直接的连续场论推导。

2 两维没有连续对称性自发破缺

引言中提到Mermin-Wagner定理，即两维系统没有连续对称性自发破缺，这里给出一个场论证明，这源自于Coleman的工作，虽然这个证明针对的是场论系统，但其本质适用于一般性的两维系统。

为了简单起见，假设我们的场论系统有一个 $U(1)$ 连续全局对称性(推广到其它连续对称性是容易的)，系统的序参量为局域复标量场 $\phi(x)$ ，在 $U(1)$ 对称性的作用下，它按照如下规则变换

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x). \quad (1)$$

下面用反证法，假设低温时，这个 $U(1)$ 对称性自发破缺了，从而 $\phi(x)$ 获得一个非零的真空期望值：

$$\langle \phi(x) \rangle = v \neq 0.$$

如果这个假设成立，那么即有，当 $|x| \rightarrow \infty$ 时，两点关联函数

$$\langle \phi(x) \bar{\phi}(0) \rangle = \langle \phi(x) \rangle \langle \bar{\phi}(0) \rangle = v^2.$$

下面我们就是要证明，如果考虑到序参量的涨落，这个式子将不可能成立，从而导出矛盾，进而说明 $U(1)$ 对称性不可能自发破缺。

另一方面，在相变温度之下，考虑到序参量的涨落，序参量将由两维空间到陪集空间 $U(1)/1 = U(1)$ 的连续映射所描述，因此，在相变温度之下，可将 $\phi(x)$ 参数化为

$$\phi(x) = v e^{i\pi(x)/v},$$

通常称式中的 $\pi(x)$ 为Goldstone 场。描写序参量涨落的低能有效理论由Goldstone 场 $\pi(x)$ 的如下作用量主导：

$$S_{\text{eff}} = \int d^2x \frac{1}{2} (\partial\pi)^2 + \text{高阶导数项}.$$

式中 $(\partial\pi)^2 \equiv \nabla\pi \cdot \nabla\pi$ 。因此在长距离上(从而 π 的小尺度剧烈变化可以忽略)，高阶导数项可以忽略，于是， $\pi(x)$ 的两点函数为

$$\langle \pi(x)\pi(0) \rangle = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{e^{ip \cdot x}}{p^2} = -\frac{1}{2\pi} \log(\Lambda^2 x^2),$$

其中 Λ 是紫外截断，因为否则的话式中的积分是发散的。

进而即可以计算

$$\langle \phi(x)\bar{\phi}(0) \rangle = v^2 \langle e^{i(\pi(x)-\pi(0))/v} \rangle.$$

对于高斯分布，有 $\langle e^{iA} \rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle A^2 \rangle}$ ，其中 $A = (\pi(x) - \pi(0))/v$ 。于是

$$\langle \phi(x)\bar{\phi}(0) \rangle = v^2 \exp\left(-\frac{1}{2v^2} \langle (\pi(x) - \pi(0))^2 \rangle\right).$$

利用 $\langle (\pi(x) - \pi(0))^2 \rangle = 2\langle \pi(0)^2 \rangle - 2\langle \pi(x)\pi(0) \rangle$ ，代入 $\langle \pi(x)\pi(0) \rangle$ 得

$$\langle (\pi(x) - \pi(0))^2 \rangle = K + \frac{1}{\pi} \log(\Lambda^2 x^2),$$

其中 $K = 2\langle \pi(0)^2 \rangle$ 是与 x 无关的常数（可能发散但可通过重整化吸收）。因此，

$$\langle \phi(x)\bar{\phi}(0) \rangle = v^2 e^{-K/(2v^2)} (\Lambda^2 x^2)^{-1/(2\pi v^2)}.$$

当 $|x| \rightarrow \infty$ 时，上式趋于零。这与对称性破缺假设导出的(2)式(通常称之为聚类性质)矛盾，因此 $U(1)$ 对称性不能自发破缺。

对于更一般的连续对称群 G ，假设其破缺到子群 H ，则为了参数化陪集空间 G/H ，会存在多个Goldstone 场，每个都贡献类似的对数因子。序参量可以是 G/H 上的某个矩阵或向量，其两点函数在长距离下表现为若干指数因子的乘积，每个因子对应一个Goldstone 模式。由于每个因子均幂律衰减到零，整体仍趋于零，与聚类性质矛盾。因此结论对任意连续对称性成立。

3 涡旋算符与BKT相变的正弦-戈登描述

3.1 BKT相变的连续场论描述

在本小节中，我们将通过路径积分发展BKT相变的连续场论描述。我们将从二维XY模型开始设定我们的约定，但我们的描述本质上是基于连续场论的，并不依赖于XY模型的格点理论。

二维XY模型是一个自旋被约束在格点平面（格距为 a ）内旋转的系统。该模型由配分函数描述：

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int_{-\pi}^{\pi} \prod_x \frac{dA_x}{2\pi} \exp \left[\frac{\beta}{2\pi} \sum_{x,\delta} (\mathbf{S}_x \cdot \mathbf{S}_{x+\delta} - 1) \right] \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \prod_x \frac{dA_x}{2\pi} \exp \left[\frac{\beta}{2\pi} \sum_{x,\delta} (\cos(A_x - A_{x+\delta}) - 1) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

这里 x 表示二维格点上的一个格点， δ 是连接该格点与其最近邻之一的单位矢量， $\beta = 1/T$ 是逆温度。其中 $A_x \sim A_x + 2\pi$ 是第 x 个自旋与某个任意轴所成的角度，并且我们将 $|\mathbf{S}_x|$ 归一化为1。

由于我们只关心该系统的长距离行为，我们可以为其发展一个连续场论描述。在这个描述中，只有缓慢变化的构型才会对配分函数有显著贡献，因此我们可以将作用量展开到角度 A_x 的二次项：

$$S = \frac{1}{4\pi T} \sum_{x,\delta} (A_x - A_{x+\delta})^2 \approx \frac{1}{4\pi T} \int_{\mathbb{R}^2} \|dA\|^2 \quad (3)$$

其中 $A(x) \sim A(x) + 2\pi$ 是一个连续标量场， $dA = \frac{\partial A}{\partial x^i} dx^i$ 是 A 的外微分， $\|dA\|^2 = (dA) \wedge *(dA)$ ，这里 $*$ 是二维的霍奇星算符， \wedge 表示微分形式

的外积。如果我们首先忽略角度变量 A 的周期性（因此忽略涡旋构型），那么系统的配分函数可以表示为 A 场的适当路径积分，权重为 $W[A]$ ，

$$W[A] = \exp \left[-\frac{1}{4\pi T} \int_{\mathbb{R}^2} \|dA\|^2 \right]. \quad (4)$$

为了考虑 A 的周期性，我们必须对某些携带非平凡拓扑数的奇异构型（在连续场论描述中）求和。也就是说，我们应该允许场 A 是一个多值函数，这样它可以在某些分支割线处有 2π 的跃变。这些场构型代表涡旋激发。

现在我们描述如何在 A 场路径积分中处理涡旋构型。当在点 p 处存在一个涡旋奇点时，我们在 p 周围画一个无穷小的逆时针圆 C_p ，切掉 C_p 的内部——以消除涡旋奇点——并将该内部区域上的场构型路径积分替换为一个小常数 g ，它代表涡旋内部的贡献。之后，我们将 A 沿 C_p 的构型（该构型由位于 p 处的涡旋决定）作为 A 场在 C_p 外部区域的边界条件，并且我们将对 C_p 外部区域进行带有此涡旋边界条件的路径积分。因此，一个涡旋构型对路径积分的总贡献是这个外部区域路径积分与内部区域贡献 g 的乘积。

事实上，对于位于 p 处、携带拓扑量子数（绕数） $n \in \mathbf{Z}$ 的 n 涡旋，我们有

$$\int_{C_p} \frac{F_A}{2\pi} = n, \quad (5)$$

其中 $F_A = dA$ 。因此，对于这个涡旋，沿 C_p 的 A 场边界条件可以简单地描述为：在 C_p 上逆时针绕行一圈后， A 的值将增加 $n2\pi$ 。如果 n 为负，我们将称这个 n 涡旋为反涡旋。

对于拓扑绕数为2的涡旋，即2-涡旋，我们可以想象它由两个紧密束缚的1-涡旋组成。然而，由于涡旋-涡旋相互作用总是相互排斥（正如我们将在第2.3小节看到的），这两个复合的1-涡旋总是倾向于彼此分离，因此非束缚构型具有更低的能量和更高的路径积分权重。同样的论证也适用于具有更高绕数的涡旋和反涡旋。因此，我们可以忽略所有拓扑量子数大于1的涡旋（或绕数小于-1的反涡旋）对配分函数的贡献，而只包括那些良好分离的1-涡旋和1-反涡旋（-1-涡旋）的贡献，它们形成一种稀薄气体。

对于每个具有 m 个1-涡旋和 n 个-1-涡旋的稀薄气体，我们可以进行相应的路径积分，这是我们描述过的单涡旋路径积分的推广。最后，我们将

对所有具有不同数量涡旋和反涡旋的稀薄气体的贡献求和，包括没有涡旋的贡献，最终得到一个1-涡旋近似的配分函数 $\mathcal{Z}_{1\text{vortexes}}$ ，

$$\mathcal{Z}_{1\text{vortexes}} = \sum_{m,n} \frac{1}{m!} \frac{1}{n!} g^{m+n} \int_{m,n} [\mathcal{D}A] \exp \left[-\frac{1}{4\pi T} \int_{\mathbb{R}^2} \|dA\|^2 \right], \quad (6)$$

其中 $\int_{m,n} [\mathcal{D}A]$ 表示在每一个1-涡旋和每一个-1-涡旋的外部区域上，对A场构型进行路径积分，并带有相应的涡旋边界条件（在无穷小圆上）。注意，每个涡旋和每个反涡旋的位置坐标也必须被积分，因为位于不同位置的涡旋代表不同的构型。(6)中的因子 $\frac{1}{m!}$ 和 $\frac{1}{n!}$ 分别来自全同涡旋和全同反涡旋的排列，因子 g^{m+n} 来自这 m 个涡旋和 n 个反涡旋的内部构型。我们使用符号 $\mathcal{Z}_{1\text{vortexes}}$ 是为了提醒我们，我们做了1-涡旋（和-1-涡旋）以及稀薄气体近似。

在接下来的两个小节中，我们将通过发展所谓的阿贝尔对偶性，以及针对涡旋的涡旋算符描述，来计算(6)中的路径积分。

3.2 阿贝尔对偶性

在本小节中，我们将利用所谓的二维阿贝尔对偶性，为我们在第(3.1)节中描述的BKT相变，发展一个用某个 B 场表示的对偶描述，以取代 A 场描述。简而言之，其主要思想是将 A 场描述中的涡旋变换为对偶描述中的某些涡旋算符。

我们从没有涡旋的构型开始，注意到路径积分 $\int [\mathcal{D}A] W[A]$ 等价于

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}A \mathcal{D}B] \exp \left[\frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (dB \wedge F_A) \right] W[A], \quad (7)$$

其中 $F_A = dA$ ，并且我们将 B 场归一化为具有周期性 $B \sim B + 2\pi$ 。这个等价性可以通过注意到(7)中的指数因子在分部积分后是平凡的，因此对 B 的路径积分只贡献一个平凡的发散常数，而这个常数很容易被正规化。

现在我们交换 A 和 B 泛函积分的顺序。注意对 A 的泛函积分基本上等同于对 $F_A = dA$ 的泛函积分，因为 A 场构型是拓扑平凡的。因此，我们首先进行(7)中对 dA 的积分，结果（忽略来自 dA 高斯积分的常数因子）是

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}B] \exp \left[-\frac{T}{4\pi} \int \|dB\|^2 \right]. \quad (8)$$

换句话说，配分函数 $\int [\mathcal{D}A] W[A]$ （无涡旋）完全等价于(8)，即对偶场 B 的泛函积分。

为了熟悉这个对偶变换，我们想再算一个例子，计算带有插入项 dA 的路径积分 $\int [\mathcal{D}A] (dA) W[A]$ 。通过使用上述对偶变换，我们可以看到 $\int [\mathcal{D}A] (dA) W[A]$ 等价于

$$\int [\mathcal{D}B] (iT * dB) \exp \left[-\frac{T}{4\pi} \int \| dB \|^2 \right]. \quad (9)$$

有了这些准备，我们现在可以将带有1-涡旋边界条件的 A 场路径积分重新表达为对偶 B 场路径积分加上适当的局域算符插入，这些局域算符就是能够产生涡旋的涡旋算符。这是下一小节的内容。

3.3 涡旋算符与正弦-戈登描述

我们现在可以为 $\mathcal{Z}_{1\text{vortexes}}$ (6) 推导出一个对偶的 B 场描述，结果证明它就是BKT相变的正弦-戈登描述。为此，我们首先计算单个1-涡旋的贡献。

回忆一下，在 A 场描述中，位于 p 处的单个1-涡旋是一个带有相应边界条件的涡旋边界，该边界条件定义在无穷小圆 C_p 上（ C_p 的内部已被切掉并替换为因子 g ）。沿着 C_p 逆时针走一圈后， A 的值将增加 2π 。我们将带有此涡旋边界条件的 A 场路径积分记为 $\mathcal{Z}[C_p]$ 。

为继续推导，我们将 C_p 外部的空间记为 $C \times \mathbb{R}^+$ ，并在其上选取右手定向。显然，作为 $C \times \mathbb{R}^+$ 的边界，所考虑的1-涡旋边界具有相关的顺时针定向，我们将此边界记为 C_p^- ，上标 $-$ 用来表示其顺时针定向。然后我们考虑指数因子

$$\exp \left[\frac{i}{2\pi} \int_{C \times \mathbb{R}^+} dB \wedge F_A \right]. \quad (10)$$

这个因子可以重写为 $\exp \left[\frac{i}{2\pi} \int_{C \times \mathbb{R}^+} d(BF_A) \right]$ ，它可以在边界 C_p^- 上积分为

$$\exp \left[iB(p) \int_{C_p^-} \frac{F_A}{2\pi} \right], \quad (11)$$

因为 C_p^- 是一个无穷小圆。注意到 C_p^- 是所考虑的1-涡旋的涡旋边界，但具

有顺时针定向，我们有 $\int_{C_p^-} F_A/2\pi = -\int_{C_p} F_A/2\pi = -1$ ，因此

$$\exp \left[iB(p) \int_{C_p^-} \frac{F_A}{2\pi} \right] = \exp [-iB(p)]. \quad (12)$$

显然，可以通过将指数因子(10) 乘以一个额外的因子 $\exp [iB(p)]$ 来抵消这个最终结果，因此

$$\exp [iB(p)] \exp \left[\frac{i}{2\pi} \int_{C \times \mathbb{R}^+} dB \wedge F_A \right] = 1. \quad (13)$$

从这些讨论可以看出， A 场路径积分 $\mathcal{Z}[C_p]$ 等价于下面的路径积分

$$\mathcal{Z}[C_p] = \int [\mathcal{D}A \mathcal{D}B] \exp [iB(p)] \exp \left[\frac{i}{2\pi} \int_{C \times \mathbb{R}^+} (dB \wedge F_A) \right] W[A], \quad (14)$$

因为对 B 的路径积分平凡地给出一个无穷常数（由于(13)），该常数很容易被正规化。在交换 A 和 B 泛函积分的顺序并进行 A 场积分之后，就像我们在第(3.2)小节中所做的那样，我们可以得到（忽略来自 dA 高斯积分的一个无关常数因子）

$$\mathcal{Z}[C_p] = \int [\mathcal{D}B] \exp [iB(p)] \exp \left[-\frac{T}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \|dB\|^2 \right]. \quad (15)$$

上述推导告诉我们，在 B 场描述中，位于 p 处的单个1-涡旋可以通过在 B 场路径积分中插入一个局域算符 $\exp [iB(p)]$ 来产生。类似地，要在 p 处产生一个单个-1-涡旋，应该插入局域算符 $\exp [-iB(p)]$ 。一般来说，位于 p 处的 m 涡旋由指数算符 $\exp [imB(p)]$ 产生。这些指数算符就是涡旋算符。

作为练习，我们可以计算位于 x 处的 m 涡旋和位于原点 0 处的 n 涡旋之间的势能 $U_{eff}(x)$ 和力 $F(x)$ 。显然， $U_{eff}(x)$ 由我们在 B 场描述中刚刚发展的涡旋算符的两点关联函数决定：

$$\exp [-\beta(U_{eff}(x) + U_L)] = \langle \exp [imB(x)] \exp [inB(0)] \rangle, \quad (16)$$

其中引入可调常数 U_L 是为了设定 $U_{eff}(L) = 0$ ， L 表示所考虑系统的空间尺度。通过类似于(2)节中的计算可以发现 $U_{eff}(x) = \frac{mn}{2} \ln(L^2/x^2)$ ，这是电荷 m 和电荷 n 之间的二维库仑势。力 $F(x)$ 为 $F(x) = mn/|x|$ ，当 m, n 同号

时（两个涡旋或两个反涡旋）为排斥力，否则为吸引力（一个涡旋和一个反涡旋）。这将导致平面XY模型的库仑气体描述[2]。

我们现在可以利用1-涡旋和-1-涡旋的涡旋算符描述，将 $\mathcal{Z}_{1\text{vortexes}}$ (6) 重新表述为

$$\mathcal{Z}_{1\text{vortexes}} = \sum_{m,n} \frac{1}{m!} \frac{1}{n!} g^{m+n} \int [\mathcal{D}B] \int d^2x_1 d^2x_2 \dots d^2x_m \exp[i \sum_{i=1}^m B(x_i)] \cdot \int d^2x'_1 \dots d^2x'_n \exp[-i \sum_{j=1}^n B(x'_j)] \exp \left[-\frac{T}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \|dB\|^2 \right], \quad (17)$$

其中 x_i, x'_j 分别表示第 i 个涡旋和第 j 个反涡旋的位置坐标。并且我们通过对涡旋的位置坐标进行积分来计入所有可能构型的贡献。

看起来似乎任意 m 个1-涡旋和任意 n 个-1-涡旋的构型都有贡献，但实际上只有1-涡旋和-1-涡旋数量相等的中性构型才有非零贡献。这可以通过首先在(17)的路径积分中积分掉 B 场的零模式(即 B 等于常数的模式)看出。因此，我们只需要考虑涡旋和反涡旋的中性库仑气体。

但是，如果我们首先对(17)中的非负整数 m, n 进行求和，我们可以将 $\mathcal{Z}_{1\text{vortexes}}$ 重新表达为

$$\mathcal{Z}_{1\text{vortexes}} = \int [\mathcal{D}B] \exp \left[-\frac{T}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \|dB\|^2 + g \int_{\mathbb{R}^2} \cos(B) \right]. \quad (18)$$

这是一个二维正弦-戈登模型，即众所周知的BKT相变的有效场论描述[7, 8]。至此，我们已经达到了我们的主要目的，即为BKT相变的正弦-戈登描述提供了一个优雅的推导，我们的推导直接基于连续场论，而不是基于格点理论或库仑气体模型。

4 关于BKT相变的讨论

现在我们利用正弦-戈登描述(18)来讨论BKT相变。本节的所有结果都可以与文献[2, 3, 7, 8]进行比较。从表达式(18)可以看出，在极低温度下， B 场的涨落非常大，这些涨落会抹去涡旋的贡献。因此，在极低温度下我们可以完全忽略涡旋和反涡旋。那么自旋-自旋关联可以在 A 场描述(4)中容

易地计算出来:

$$\langle \exp[iA(x)] \exp[-iA(0)] \rangle \sim \left(\frac{1}{x^2} \right)^{T/2}. \quad (19)$$

而在高温下, (18) 的相位刚度很大, 余弦项变得重要, 因此场 B 被经典地固定在 0 附近。在这种情况下, 可以在(18) 中将场 B 在 0 附近展开, 以看到系统是有能隙的, 并且系统的序是短程的。

为了确定 $g = 0$ 时的临界温度 $T_{c,g=0}$, 我们将有效理论(18) 视为对自由场论 (作用量为 $S_0 = \frac{1}{4\pi\beta} \int_{\mathbb{R}^2} ||dB||^2$) 的 $g \cos(B)$ 微扰。根据重整化群理论, 临界温度出现在使 $\cos(B)$ 扰动成为边际扰动的数值处, 这时 $\cos(B)$ 的标度量纲 $\Delta = \beta/2$ (可以通过两点关联函数 $\langle e^{iB(x)} e^{-iB(0)} \rangle$ 确定 e^{iB} 的标度量纲, 这也就是 $\cos(B)$ 的标度量纲) 变为 2。这给出

$$1/(2T_{c,g=0}) = 2, \quad T_{c,g=0} = 1/4. \quad (20)$$

此外, 在 $g = 0$ 附近, 可以计算无量纲耦合常数 $y = ga^2$ 的重整化群(RG)流 (到 y 的一阶) (这里 a 为有效的格距)。该流应与 $x = \Delta - 2 = \beta/2 - 2$ 成正比, 因为 $\Delta = 2$ 使得 $y \cos(B)$ 变成边际扰动。一个详细的微扰计算(比如用背景场方法)告诉我们

$$dy = -xy d \ln a. \quad (21)$$

可以看到, 当 $T < 1/4$ 时, $x > 0$, $y \cos(B)$ 是不相关的, 在长距离下RG将流向一个自由玻色子的共形场论(CFT), 并且两个 $SO(2)$ 自旋之间存在代数长程关联(19)。事实上, 在这种情况下, 涡旋和反涡旋激发将配对并组合成中性偶极子 (由于它们之间的库仑吸引力), 系统处于介电相。这样的偶极子对系统的热力学行为影响可以忽略。而当 $T > 1/4$ 时, $x < 0$, 涡旋微扰 $y \cos(B)$ 是相关的, 系统具有能隙, RG将在长距离下流向平庸理论。在这种情况下, 偶极子将解离, 形成涡旋和反涡旋的等离子体, 并动态产生一个屏蔽长度。当 $T = 1/4$ 时, $x = 0$, $y \cos(B)$ 是边际扰动, 如果 $y = 0$, 系统将流向一个 Z_2 轨道折线CFT [10]。

在不动点 $x = \beta/2 - 2 = 0$, $y = 0$ (即 $T = 1/4$, $g = 0$) 附近, 我们也可以计算 x 的RG流到 y 和 x 的二阶, 结果为

$$dx = -Cy^2 d \ln a, \quad (22)$$

其中 C 是一个正常数，可以通过改变长度尺度 a 的标度设为任意正数(由于 $y = ga^2$ 依赖于 a), 比如不妨设 $C = 1$, 从而

$$dx = -y^2 d \ln a. \quad (23)$$

利用微分方程组(21) 和(23)(关于这两个方程的推导，参见[7, 8])，我们可以更好地理解系统的低温 ($T < T_c$) 行为和高温 ($T > T_c$) 行为。比如，在临界温度 T_c ，系统将流向不动点 $x = y = 0$ ，此时理论由 Z_2 轨道折线CFT描述。在 A 场描述中，这个CFT可以描述为对 $W[A](4)$ 的路径积分，其中 $T = 1/4$ 。因此，在 T_c 处自旋-自旋关联的临界指数 η 将是 $\eta = 1/4$ 。

另外，将方程(23)除以方程(21)，可以得到 $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$ ，积分即得

$$x^2 - y^2 = -\delta^2, \quad (24)$$

这就是重整化群流在 (x, y) 平面上的轨迹方程，式中 $-\delta^2$ 为积分常数。

为了考察高温相(从而 $x < 0$)的关联长度，假设我们从 $(x, y) = (x_0, y_0)$ 的临界点附近(从而 x_0, y_0 很小)开始演化重整化群，演化到 $(x, y) \sim (-\infty, \infty)$ 的强耦合区域(高温相 $x < 0$)，此时有效的 a 就是关联长度 ξ ，即 $\xi \sim a \sim e^{\ln a}$ 。因此我们有 $x^2 - y^2 = -\delta^2$ ，或者 $y^2 = x^2 + \delta^2$ ，代入方程(23)即有

$$d \ln a = -dx/y^2 = -\frac{dx}{\delta^2 + x^2} \Rightarrow \ln a = -\int_{x_0}^{-\infty} \frac{dx}{\delta^2 + x^2} \approx \int_0^{\infty} \frac{dx}{\delta^2 + x^2}. \quad (25)$$

这里需要注意到，在临界点附近 $|x_0| \approx |y_0|$ 均很小，从而上述积分约为

$$\ln a \approx \frac{\pi}{2\delta}. \quad (26)$$

所以，关联长度 $\xi \sim e^{\ln a}$ 为

$$\xi \sim e^{\pi/(2\delta)}. \quad (27)$$

另一方面，在临界点附近 $|x_0| \approx |y_0|$ ，从而 $\delta = \sqrt{y_0^2 - x_0^2} \sim \sqrt{2|x_0|(y_0 - x_0)}$ 。而根据 x 的定义， $x_0 = \beta/2 - 2 \sim -2\frac{T-T_c}{T_c} \equiv -2t$ ，注意，由于定义在紫外截断处，所以这里的 β 和 T 都是物理的，而不是像原本 x 的定义式中那样是有效的，从而这里的 t 就是物理的约化温度。通过这个分析我们知道了，

$$\delta \sim \sqrt{t}, \quad (28)$$

代入(27)式, 即有

$$\xi \sim e^{b/\sqrt{t}}, \quad (29)$$

式中 $b > 0$ 为某个常数。注意, 在 $t \rightarrow 0^+$ 时, 关联长度是发散的, 但是, 这种发散不是像通常临界现象那样的幂律发散, 而是快于任何幂律。

最后, 正如我们已经强调的, 在推导有效理论(18)时, 我们做了1-涡旋近似。可以自然地预期, 双涡旋会贡献一个类似的项 $g_2 \cos(2B)$, 但系数 $g_2 \ll g$ 小得多。当温度升高到1时, $\cos(2B)$ 也将变得相关。因此, 我们的1-涡旋近似仅在 T 小于1时有效。

5 总结

KT相变理论的普适性使其应用远超最初的超流氦薄膜, 深刻影响了多个物理学领域: 比如, 在二维超导体薄膜中, 库珀对(电子对)可以形成类似的涡旋-反涡旋束缚态, 其解绑导致超导性消失。比如, 这个理论被成功用于解释二维晶体的熔化过程, 并预言了在真实二维磁性材料(如 TmMgGaO_4)中存在的KT相变。再比如, 在约瑟夫森结阵列中(也就是由超导体-绝缘体-超导体结构构成的阵列), 其相变行为也属于KT普适类。

总而言之, KT相变超越了相变的朗道范式, 它不仅成功解决了二维世界能否有序的理论悖论, 更开创性地将数学中的拓扑学引入物理学, 催生了“拓扑物态”这一全新的研究范式。它所揭示的由缺陷主导的相变机制, 深刻地改变了我们对物质状态和相变本质的理解。

References

- [1] V. B. Berezinskii, Sov. Phys. JETP 32, 493 (1971).
- [2] J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, Journal of Physics C: Solid State Physics, Vol. 6 pages 1181-1203 (1973).
- [3] J. M. Kosterlitz, J. Phys. C 7, 1046 (1974).

- [4] N. D. Mermin, H. Wagner, Phys. Rev. Lett. 17, 1133-1136 (1966).
- [5] P. C. Hohenberg, Phys. Rev. 158, 383 (1967).
- [6] Sidney Coleman, Commun. Math. Phys. 31, 259 (1973).
- [7] A. Altland, B. Simons, Condensed Matter Field Theory, Cambridge University Press 2010.
- [8] Xiao-Gang Wen, Quantum Field Theory of Many-body Systems: From the Origin of Sound to an Origin of Light and Electrons, Oxford University Press 2004.
- [9] N. Nagaosa, Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1999.
- [10] J. Polchinski, String Theory, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1998).