

无穷之境，逼近之途——从刘徽到牛顿的极限思想

陈童

公元三世纪，魏晋数学家刘徽面对圆周率这一千古难题，挥刀向圆，发明了“割圆术”。他从圆内接正六边形开始，不断倍增边数，计算正12边形、正24边形……的面积。刘徽在注解中写下了这段千古名言——“割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”——不仅是中国古代数学的巅峰之作，更是人类思想史上对“极限”最朴素、最深刻也最具力量的早期表达。

理解极限，首先要直面人类认知的一个天然困境：我们生活在有限的世界里，拥有的是直尺与算筹，但我们试图丈量的，却是曲线与无穷。圆是完美的，但用有限的直线去丈量曲线，注定会有误差。刘徽的伟大，在于他没有在误差面前止步，而是找到了一种“动态逼近”的智慧。

从正六边形，到正十二边形、正二十四边形……每一次“割”，都是用直线去拟合曲线；每一次边数倍增，多边形的棱角就向圆弧贴近一分。所谓“割之弥细，所失弥少”，揭示的正是极限思想的核心：过程的方向性。误差随着分割的细化而单调递减，趋势不可逆转。这是一种无比坚定的逻辑力量——我们或许无法一步登天，但只要方向正确，每走一步，就必然离真理更近。

然而，如果仅仅停留在“越来越近”，那还只是逼近，而非极限。极限的真正震撼，在于跨越那道看似不可逾越的鸿沟。刘徽说：“割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”这句话里，藏着极限思想最精妙的辩证法：无限次的“割”（动态过程），最终导向了“不可割”（静态终点）；原本内接的直线多边形，最终与曲线的圆“合体”。在这里，量变的积累在无穷的尽头实现了质变，有限与无限、直线与曲线、近似与精确，在极限的终点握手言和。

一千多年后，在大洋彼岸的英国，牛顿在面对天体运动与瞬时速度时，同样被推向了极限的悬崖。与刘徽从几何空间切入不同，牛顿面对的是时间与运动的代数深渊。

牛顿发明了流数术（微积分的前身），他需要计算物体在某一瞬间的速度。零时间走过的距离是零，零除以零在算术上毫无意义。牛顿的做法，是让时间间隔变得越来越小，趋于零（趋于消失的量）。在这一点上，牛

顿与刘徽心有灵犀——他们都知道，在“趋于”的过程中，比值是清晰的、可计算的。

牛顿在《自然哲学的数学原理》中提出了“消逝量的最终比”的概念。他深知，极限不是简单的“最后一步”，因为无限分割的过程中没有最后一步。牛顿强调，极限是趋于消失的两个量之比“无限趋于”的某个确定值，这个值不是在量真正变为零时产生的，而是在它们“趋于零的过程中”就已经稳定显现的。牛顿在《原理》中定义：“消逝量的最终比严格地说并不是最终量的比，而是这些量无限减小时它们的比所趋近的极限”。

如果说刘徽的“以至于不可割”，是一种带着哲学直觉的终极宣告，那么牛顿的“消逝增量的最终比”，则是试图去锚定那个动态过程中的最终值。牛顿告诉我们：不要害怕那个“零”，极限不是深渊，而是桥梁。当自变量的增量趋于零时，因变量与自变量的比值并不会陷入混乱，而是会稳稳地落在一个确定的数值上——这就是导数，就是瞬时变化率。

结合刘徽与牛顿的洞见，我们可以清晰地看到极限思想的本质力量：

极限，是对绝对确定性的无限逼近。人类的认知能力是有限的，我们永远无法画出绝对完美的圆，也无法截取长度绝对为零的时间。但极限思想告诉我们，不需要去抓取那个虚无缥缈的“绝对”，只要我们掌握了趋近的规律，就能在逻辑上把握绝对的真理。多边形的周长不是圆周率，但极限是；平均速度不是瞬时速度，但极限是。

极限，是过程与结果的辩证统一。“割之又割”是无尽的过程，而“合体”是最终的结果；“趋于零”是永不停止的动态，而“消逝量的最终比”是岿然不动的静态。极限将看似矛盾的两者完美熔铸：结果不在过程之外，结果就是过程在无限延伸处的终极显现。

从刘徽的圆内接多边形，到牛顿的流数术，再到今天严密化的 $\varepsilon - \delta$ 语言，极限思想穿越了千年的时空。它不仅是数学的基石，更是一种深刻的世界观。它告诉我们：真理虽然往往在无穷的彼岸，但通往彼岸的桥梁，就搭建在我们脚下每一次踏实的“逼近”之中。只要方向正确，步履不停，那看似遥不可及的“无所失”，终将成为我们思想的囊中之物。