

大 N 极限：从费曼图到随机矩阵理论

陈童

Contents

1	引言	2
2	中心极限定理与随机游走	2
2.1	高尔顿钉板实验	3
2.2	随机变量的特征	4
2.3	中心极限定理的证明与随机游走	5
3	扰动高斯分布与费曼图	6
3.1	高斯分布	7
3.2	受扰动的高斯分布	8
3.3	圈展开	12
3.4	复变量	14
3.5	微扰统计场论	15
4	大N展开与随机矩阵理论	16
4.1	魏格纳半圆定律	18
4.2	戴森气体	22
5	总结	25

1 引言

在研究复杂的物理或数学系统时，我们经常会遇到一个令人惊叹的现象：无论微观层面的个体行为多么千差万别，当系统的自由度（比如粒子数 N ）变得极大时，宏观层面往往会涌现出极其简洁且普适的规律。本章正是围绕着这一主题展开，试图为大家搭建一座连接概率论、量子场论图解技术与随机矩阵理论的桥梁。

本章的内容安排遵循由浅入深、从单一到多维的逻辑脉络：首先，我们将从概率论中最核心的中心极限定理出发。为了获得直观的物理图像，我们会通过“高尔顿钉板”和“醉汉随机游走”这两个经典模型，手把手地推导出独立随机变量之和为何必然趋向于高斯分布，并借此引入“特征函数”与“累积量（集团阶矩）”这两个贯穿全讲义的基础数学工具。其次，我们将视线转向对高斯分布的扰动。当概率分布不再是纯粹的高斯型时，传统的直接积分往往会变得异常困难。此时，我们将借用物理学中极为强大的武器——费曼图。大家将会看到，如何把抽象的微扰展开转化为直观的“画图游戏”，以及如何通过判断图的“连通性”来直接提取累积量，并进一步理解“圈展开”与统计力学中温度参数的对应关系。最后，我们将把前两部分发展出的图解思想推广到高维系统，进入大 N 展开与随机矩阵理论的殿堂。我们会发现，对于 $N \times N$ 随机厄米矩阵，大 N 极限在图解语言中惊人地等价于“平面图极限”。借助这一洞察，我们将极其优雅地推导出著名的魏格纳半圆定律，并通过“戴森气体”这一绝妙的物理类比，掌握求解一般势场下本征值分布的普适方法。希望本章能够帮助大家在不需要翻阅厚重的量子场论教材的前提下，直击这些优美数学物理方法的核心精髓。

2 中心极限定理与随机游走

中心极限定理可以说是概率论中最为重要的定理之一。它解决的是 N 个独立随机变量的和在 N 很大时的概率分布问题。中心极限定理说，不管什么

随机变量，在满足一些合理的条件以后这样的概率分布一定会趋向于一个高斯分布。这样一个普适性的结果是非常令人吃惊的，它首次揭示了系统在大 N 极限下可能会展现出普遍性的规律。这在整个数学和物理学上都影响深远。我们这里主要讨论这个重要结果的数学证明。为简单起见，这里我们将仅仅处理 N 个独立同分布随机变量的情形。

2.1 高尔顿钉板实验

英国生物统计学家高尔顿是达尔文的表弟，高尔顿钉板实验是他设计来直观演示中心极限定理的。

高尔顿在木板上钉了很多钉子，这些钉子分成了 N 层，每一层的相邻两颗钉子之间间距相等，上一层钉子的水平位置都恰好落在下一层的相邻两颗钉子正中间。在实验时，从上方放入一个小圆球，小圆球的直径小于任意两颗钉子之间的几何距离，但是大于相邻两层钉子之间的水平距离。因此，小圆球在下落的过程中总会碰到钉子，它碰到钉子以后可以往左边滚下来，也可以往右边滚下来，概率均为 $1/2$ 。然后再碰到下一层的钉子，又以 $1/2$ 的概率往左滚或往右滚，如此不断进行下去，直到经过 N 层钉子以后，小圆球最终会落到下方的格子中。

在第 i 层，小圆球往左滚还是往右滚是随机的，往右滚则它的水平位移增加1，往左滚则减少1，我们可以定义小圆球在第 i 层的水平位移为随机变量 X_i ，小圆球往右滚 $X_i = 1$ ，往左滚则 $X_i = -1$ 。很显然，经过 N 层钉子以后，小圆球最终会落在哪个方格子中由总水平位移 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ 决定。 X 当然也是一个随机变量，它的分布情况可以通过将实验重复很多很多次，然后统计下方各格子中小圆球的数目，由这个数目的分布情况反映出来。

网上有这个实验的视频，从视频中可以清楚地看到，最终小圆球的数目分布趋向于一个正态分布(当 N 很大时)，因此也就是说，随机变量 X 最终趋向于一个正态分布。这就是中心极限定理的一个最直观例子。下面我们开始讨论中心极限定理的证明。

2.2 随机变量的特征

在证明中心极限定理之前，我们先简单地讨论一个有用的数学概念，即一个随机变量的特征。假设有一个随机变量 X ，其概率分布为 $p(x)$ ，则 X 的特征 $\hat{p}(k)$ 定义为

$$\hat{p}(k) = \langle e^{ikX} \rangle = \int dx e^{ikx} p(x). \quad (1)$$

很显然， $\hat{p}(0) = 1$ 。更一般的， $\hat{p}(k)$ 在0处关于 ik 泰勒展开的 n 阶项系数就是随机变量 X 的 n 阶矩 M_n ， $M_n = \langle X^n \rangle = \int dx x^n p(x)$ ，即

$$\hat{p}(k) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (ik)^n M_n. \quad (2)$$

一个更有用的概念是所谓的累积量(cumulants)，我们这里也称之为集团 n 阶矩 K_n ，它由下式给出

$$\hat{p}(k) = \exp \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} (ik)^n K_n \right), \quad (3)$$

人们也常常将 K_n 记为 $K_n = \langle X^n \rangle_c$ 。

由 n 阶矩和集团 n 阶矩的两个定义式子可以得出

$$\begin{aligned} M_1 &= K_1, \\ M_2 &= K_2 + K_1^2, \\ M_3 &= K_3 + 3K_1 K_2 + K_1^3, \\ M_4 &= K_4 + 4K_3 K_1 + 3K_2^2 + 6K_2 K_1^2 + K_1^4 \dots \end{aligned} \quad (4)$$

实际上，如果我们将 K_m 表示成一个 m 个点的集团，然后将任意 n 个点完全分解成一些这样的集团，那么 M_n 就可以看成是 n 个点所有可能集团分解的和，如图(1)所示。很明显，(1)中的图形正好对应等式(4)。其实， $K_1 = M_1 = \langle X \rangle$ 就是通常所说的平均值，我们也记为 μ ， $K_2 = M_2 - M_1^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$ 就是我们通常所说的方差 σ^2 。因此，根据累积量，或者说集团 n 阶矩的定义，我们有

$$\hat{p}(k) = \exp \left(ik\mu - \frac{1}{2} k^2 \sigma^2 + \dots \right). \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \bullet \\
\langle x^2 \rangle &= \textcircled{\bullet\bullet} + \bullet\bullet \\
\langle x^3 \rangle &= \textcircled{\bullet\bullet\bullet} + 3 \textcircled{\bullet\bullet} \bullet + \bullet\bullet\bullet \\
\langle x^4 \rangle &= \textcircled{\bullet\bullet\bullet\bullet} + 4 \textcircled{\bullet\bullet\bullet} \bullet + 3 \textcircled{\bullet\bullet} \bullet\bullet + 6 \textcircled{\bullet\bullet} \textcircled{\bullet\bullet} + \bullet\bullet\bullet\bullet
\end{aligned}$$

Figure 1: 图中每一个未被圈起来的单独黑点自身是一个单点集团，每一个被虚线圈起来的多点是一个多点集团。

2.3 中心极限定理的证明与随机游走

假设有 N 个独立的随机变量 $X_i, i = 1, 2, \dots, N$ ，每一个的概率分布都是同一个函数 $p(x_i)$ ，其平均值为 μ ，方差为 σ^2 。这里我们以小写的 x_i 来表示随机变量 X_i 的取值。则随机变量 $X = \sum_i X_i$ 的概率分布 $q(x)$ 可以表示成，

$$q(x) = \int \left[\prod_i dx_i \right] \delta(x - \sum_i x_i) p(x_1) p(x_2) \dots p(x_N). \quad (6)$$

利用 $\delta(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx}$ ，我们就有

$$q(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \int \left[\prod_i dx_i \right] e^{ik \sum_i x_i} p(x_1) p(x_2) \dots p(x_N) \quad (7)$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \left[\int dx' e^{ikx'} p(x') \right]^N \quad (8)$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} \hat{p}^N(k), \quad (9)$$

式中 $\hat{p}(k) = \int dx' e^{ikx'} p(x')$ 。利用(5)式我们容易将上面的结果重写成，

$$q(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(x - N\mu) - N\frac{1}{2}\sigma^2 k^2 + NO(k^3)}. \quad (10)$$

假设我们将 Nk 看成一个新变量，则容易看出在 $N \rightarrow \infty$ 的时候式中的 $O(k^3)$ 可以忽略。由此就可以得到

$$q(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - N\mu)^2}{N\sigma^2}\right). \quad (11)$$

这就证明了中心极限定理。从最终结果我们可以看到随机变量 X 的平均值为 $N\mu$, 而方差为 $N\sigma^2$ 。

下面我们给出中心极限定理的一个简单解释。假设我们考虑一个醉汉在 x 轴上随机游走, 我们将上文的随机变量 X_i 看成是醉汉第 i 步这一步所产生的位移, 由于这是一个醉汉, 因此这个位移是随机变量。 μ 就是醉汉平均每一步前进的距离。那么随机变量 X 就是醉汉在 N 步中的总位移, 中心极限定理告诉我们, 在 N 很大时, 这个总位移趋向于一个高斯分布, 这个高斯分布的方差是 $N\sigma^2$ 。

关于方差的这个结果其实可以用下面的方法容易地得到, 下面为了简单起见我们不妨假设醉汉醉得很厉害, 以致于 $\mu = 0$ 。我们记醉汉在 i 步中的总位移为 $X(i)$, 显然

$$X^2(i+1) = (X(i) + X_{i+1})^2 = X^2(i) + X_{i+1}^2 + 2X(i)X_{i+1}. \quad (12)$$

然后将上面这个方程两边取期望值, 由于醉汉是随机游走, 因此 X_{i+1} 与 $X(i)$ 统计无关, 因此 $\langle X(i)X_{i+1} \rangle = \langle X(i) \rangle \langle X_{i+1} \rangle = 0$, 因此

$$\langle X^2(i+1) \rangle = \langle X^2(i) \rangle + \langle X_{i+1}^2 \rangle = \langle X^2(i) \rangle + \sigma^2. \quad (13)$$

将这个式子进行递推就可以得到我们需要的结论。当然, 从这个推导可以看出, 关于方差的这个结果不需要大 N 极限, 这一点也可以从我们在上文那个更加数学化的证明方法中看出来。实际上, 只有最终的分布是一个高斯分布这一点才是依赖于大 N 极限的。

3 扰动高斯分布与费曼图

我们将考察两种很有用的随机变量, 第一种是满足高斯分布的随机变量, 第二种随机变量的分布函数是对高斯分布的一个扰动。我们关心的要点是, 在这两种情况下我们如何计算 n 阶矩以及累积量(cumulants), 也就是我们所谓的集团 n 阶矩。我们将从高斯分布开始, 但是我们更关心的其实是扰动高斯分布, 这时候我们将发展一种画图的办法来计算 n 阶矩以及集

团 n 阶矩的微扰展开。这种图就是微扰统计场论中著名的费曼图。当然，我们并不会讨论微扰统计场论，但值得说明的是，微扰统计场论其实就是我们考虑的扰动高斯分布的推广。只不过在统计场论中，我们需要考虑无穷多个随机变量，它们形成所谓的场算符，而我们这里仅仅只考虑一个随机变量。总之，微扰统计场论其实是我们将要考察的扰动高斯分布的无穷维推广。因此，这里发展的费曼图方法同样适用于微扰统计场论是毫不令人意外的。

3.1 高斯分布

首先考虑高斯分布。假设随机变量 Φ 满足如下分布

$$P(\phi) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2\right), \quad (14)$$

式中 \mathcal{Z} 为归一化系数。这就是高斯分布。对于这种分布我们很容易计算随机变量的特征，现在记为 $\mathcal{Z}[J]$

$$\mathcal{Z}[J] = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int d\phi \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 + iJ\phi\right) \quad (15)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{J^2}{m^2}\right). \quad (16)$$

从这个表达式可以读出在所有的集团 n 阶矩中，只有集团2阶矩 K_2 非零，很显然 $K_2 = \frac{1}{m^2}$ 。

计算 n 阶矩的办法有两种，一种是将特征函数 $\mathcal{Z}[J]$ 在 $J = 0$ 处泰勒展开到 n 阶，然后读出其展开系数即为 n 阶矩。很显然 n 为奇数时结果为零。而对于偶数情形，比方说，对于 $2n$ 阶矩 $M_{2n} = \langle \Phi^{2n} \rangle$ ，我们用这种办法可以得到

$$M_{2n} = \frac{(2n)!}{n!2^n} \frac{1}{m^{2n}}. \quad (17)$$

第二种计算 n 阶矩的办法是利用 n 阶矩的集团展开，由于非零的集团只有2集团，因此这就是将 n 阶矩按照2集团进行展开。具体的办法可以进行

如下，画出 n 个完全等同的点，每个点代表一个 Φ ，然后将这些点两两配对组合成2集团，每个2集团中的两个点用一根线连起来，这样就构成一个不完全连通的 n 点图。每一个2集团的贡献是 $K_2 = 1/m^2$ ，将一幅集团展开图中所有集团的贡献乘起来就是这幅图对 n 阶矩的贡献。而将所有可能的集团展开图的贡献加起来就得到总的 n 阶矩。

很显然，按照这个办法，当 n 为奇数时，任何集团展开中必然会涉及到1集团，而由于 $K_1 = 0$ ，所以1集团的贡献为零，因此最后总的 n 阶矩必然为零。对于 $2n$ 阶矩，集团展开图有很多，每个图都包含 n 个2集团，但是由于这 $2n$ 个点完全等同，所有这些图的贡献都是一样的，都为 $1/m^{2n}$ 。那么一共有多少个集团展开图呢？这有多种不同的计算办法，最简单的一种是这样的：首先，随意标记这 $2n$ 个点中的任何一个，与之配对形成2集团的点有 $(2n - 1)$ 个不同选择，配对完成以后，再次在剩下的 $2n - 2$ 个点中随意标记一个，与之配对的点就有 $(2n - 3)$ 种可能，如此不断进行下去，直到所有点都完成了配对。很显然，可能的集团展开图数目为

$$(2n - 1)!! \quad (18)$$

很容易看出来 $(2n - 1)!! = (2n)!/(n!2^n)$ ，因此这种办法计算出来的最终结果与之前的第一种办法计算的结果完全吻合。

3.2 受扰动的高斯分布

下面我们假定随机变量 Φ 的分布为

$$P(\phi) = \frac{1}{\mathcal{Z}[g]} \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}g\phi^4\right), \quad (19)$$

$\mathcal{Z}[g]$ 来自于这个概率分布的归一化，很显然，这种概率分布的归一化计算起来很困难。不过，我们只是在形式上使用这一表达式，实际上 g 应该理解为一个很小的参数， $\exp(-\frac{1}{4!}g\phi^4)$ 其实是对高斯分布的一个小扰动。

这一概率分布的特征函数，现在记为 $\mathcal{Z}[g, J]$ ，由下式给出

$$\mathcal{Z}[g, J] = \frac{1}{\mathcal{Z}[g]} \int d\phi \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}g\phi^4 + iJ\phi\right). \quad (20)$$

如果不把 g 处理成微扰, $\mathcal{Z}[g, J]$ 是很难计算的, 但它关于 J 的泰勒展开同样是 n 阶矩, 并且 $\log(\mathcal{Z}[g, J])$ 关于 J 的泰勒展开同样是集团 n 阶矩。

我们不妨来考虑 $2n$ 阶矩 $M_{2n} = \langle \Phi^{2n} \rangle$ (根据被积函数的奇偶性, $2n + 1$ 阶矩显然为零),

$$\begin{aligned} M_{2n} &= \frac{1}{\mathcal{Z}[g]} \int d\phi \phi^{2n} \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}g\phi^4\right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}[g]} \int d\phi \phi^{2n} \left[1 - \frac{1}{4!}g\phi^4 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4!}g\phi^4\right)^2 + \dots\right] \exp\left(-\frac{1}{2}m^2\phi^2\right). \end{aligned} \quad (21)$$

显然计算的结果必然是一个关于 g 的泰勒级数, 级数中每一项的计算都简化成了标准高斯分布情形的计算。因此前文所描述的2集团展开的办法依然完全适用, 但这样虽然能够计算出结果, 但相应的集团展开依然是高斯分布的集团展开, 而不是(19)的集团展开, 因此我们无法直接从中得到扰动高斯分布的集团多阶矩。

注意到在我们现在考察的扰动高斯分布(19)中, $-\frac{1}{4!}g\phi^4$ 是指数上的同一项, 它的四个 ϕ 肯定不应该被拆开, 尤其是不能拆开到不同的集团中去。因此, 现在我们引入一种新的办法来画集团展开图。在现在的画法中, 除了 ϕ^{2n} 所对应的 $2n$ 个点(这些点我们称之为外点)以外, 对于泰勒展开(21)中的每一个 $-\frac{1}{4!}g\phi^4$ 因子, 我们都在图中引入一个(而不是四个)不同的点, 我们称之为顶角, 因此每个顶角不是代表一个 Φ , 而是代表4个 Φ 乘在一起, 从上一节的研究中我们知道, 每个 Φ 都要和其它的 Φ 配对, 所以我们在每个顶角上画出四条腿, 每条腿代表一个待配对的 Φ 。对于(21)中 g 的泰勒级数的每一阶, 当我们将所有的配对(同样, 每个配对画一条连线)都完成以后就生成了一幅不完全连通的图, 一组配对方式就对应一幅图, 这样的图称之为费曼图。和前文一样, 每一幅费曼图中的每一根代表配对的连线贡献都是 $1/m^2$, 而每一个顶角额外还有一个 $-g$ 。将一幅图中所有连线和顶角的贡献都乘起来就是这幅费曼图对 $2n$ 阶矩的贡献。将所有不同费曼图的贡献都加起来就得到 $2n$ 阶矩的最终值。

读者可能注意到我没有提到顶角上的那个 $\frac{1}{4!}$ 因子, 这是因为, 当我们把顶角上的四个 Φ 和其它 Φ 进行配对时, 一般来说这四个 Φ 的排列组合会产

生 $4!$ 种可能性, 刚好将 $\frac{1}{4!}$ 抵消了。除非我们画出来的费曼图对于某个顶角上的 Φ 的配对有对称性, 这时候我们就要额外除以对称操作的数目(恒等操作也算一个对称操作), 因为对称的配对方式结果是完全一样的。同样的, 上面我们也没有谈泰勒展开 g^2 阶项前面的 $1/2!$ 因子, 这是因为 g^2 阶其实是两个顶角的乘积, 一般来说, 当将其它 Φ 与 g^2 阶上的 Φ 进行配对时, 两个顶角就产生了两种可能性, 正好将 $1/2!$ 消去。除非我们画出来的费曼图这两个顶角是完全对称的, 这时候就要额外除以对称操作的数目 2 。总之, 每一幅费曼图的贡献还要除以一个对称因子, 它就是使得费曼图保持不变的对称操作的数目。

另外, 很显然, 不同拓扑结构的费曼图有不同的配对方式, 而由于 Φ 的等同性, 相同拓扑结构的费曼图对 $2n$ 阶矩的贡献必定是相同的(有相同的连线数和顶角数), 因此对于每一拓扑类, 我们常常只画一幅图为代表, 然后在最终贡献中乘上一个拓扑权因子, 它就是具有相同拓扑结构的不同费曼图的个数。

下面的两幅图(2)、(3)是将 $\langle\Phi^4\rangle$ 计算到 g^2 阶所涉及到的所有费曼图, 每幅图前面的数字是它的拓扑权因子除以对称因子。比如图(2)中(c)图的系数 $3 = C_4^2 \times \frac{1}{2}$, 其中 C_4^2 是从四个外点中选出两个进行直接配对的组合数, 而 $1/2$ 来自于图中那个圈的左右对称性。比如图(2)中(f)图的系数 $3/2$ 是因为将四个外点分成全同的两组(两组外点分别和一个顶角配对)有3种可能性, 另外图中圈的对称性导致还要除以 2 。比如图(2)中(i)图的系数 $3/8 = 3 \times 1/8$, 其中的 $1/8$ 是因为图中的双圈有8个对称操作。再比如图(3)中的(n)图的系数 $1 = C_4^2 \times (1/3!)$, 其中的 C_4^2 是四个外点中选出两个直接配对的组合数, $1/3!$ 是因为图中那个圈中的3根线具有重排对称性。类似的可以得到其它图前面的系数。

很容易看出来, 上面这些费曼图的和可以因式分解成如下两部分, 图(4)和图(5), 的乘积。人们可能注意到, 这个乘积中还多出来一些 g^3 阶甚至 g^4 阶的部分, 这些部分是我们暂时不关心的。图(5)中的第一项那个 I 表示单位 1 。另外, 图(5)有一个特征, 那就是它完全不涉及外点, 我们称之为真空图。这些真空图实际上对最终结果是没有贡献的。原因就在于, 我

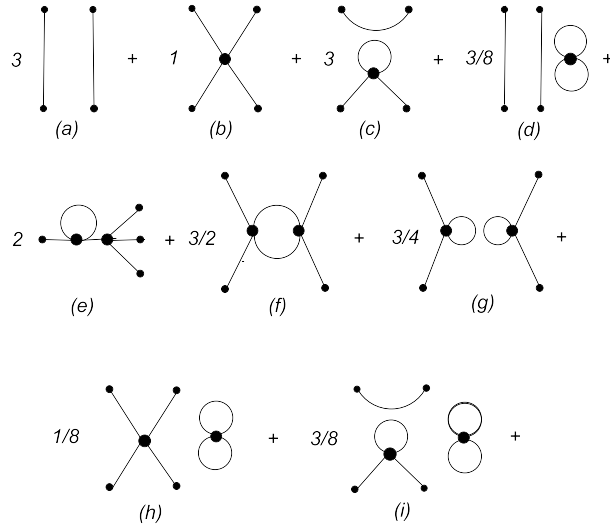


Figure 2: The feynman diagrams concern $\langle \Phi^4 \rangle$.

们回顾计算公式(21), 就会发现, 要最后算出 $\langle \Phi^4 \rangle$, 我们还需要除以 $\mathcal{Z}[g]$, 而 $\mathcal{Z}[g]$ 来自于归一化, 其计算也可以按照微扰展开的形式来进行, 只不过这时候没有外点, 稍微想一下我们就能明白, 图(5)的这些真空图, 就是计算 $\mathcal{Z}[g]$ 时所涉及到的那些费曼图。所以在最终计算 $\langle \Phi^4 \rangle$ 时, 这些真空图的贡献就从分子和分母中消去了。因此, 为了计算 $\langle \Phi^4 \rangle$ (到 g^2 阶), 我们只需要将图(4)中的那些费曼图的贡献加起来。最后的结果容易计算得

$$\langle \Phi^4 \rangle = 3 \frac{1}{m^4} - 4g \frac{1}{m^8} + \frac{33}{4} g^2 \frac{1}{m^{12}}. \quad (22)$$

这个结果也可以不用费曼图方法, 而是用直接的计算来验证(要记得除以 $\mathcal{Z}[g]$)。

费曼图的方法在直接计算如 $\langle \Phi^4 \rangle$ 这样的多阶矩时显示出来的方便之处还不够大。但如果我们想计算的是集团多阶矩, 比如 K_4 , 费曼图方法就会显得特别方便。为了说清楚这一点, 让我们观察图(4)中的那些费曼图, 我们发现, 其中有些费曼图是连通图, 因此四个外点属于同一个集团, 而有些图是不连通的, 其四个外点被分割成了不同的集团。也就是说, 从图(4)中

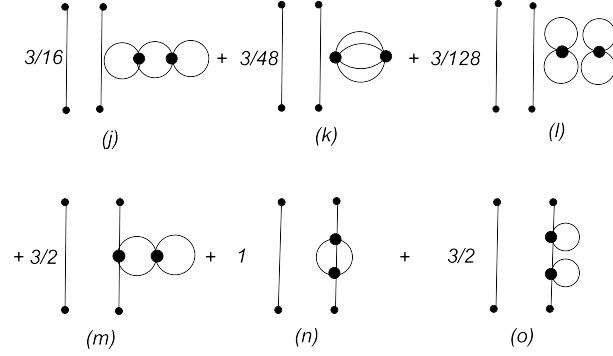


Figure 3: The feynman diagrams concern $\langle \Phi^4 \rangle$.

我们可以发现，通过顶角和连线的作用可以将四个外点自然地分割成集团展开结构，其中一个集团就对应费曼图中的一个连通部分。又考虑到按照 g 的微扰展开，我们就可以说，集团多阶矩对应的就是连通图的贡献之和。比如说 K_4 ，计算到 g^2 阶，它就是图(2)中(b),(e),(f)三个费曼图的贡献之和，很容易算得

$$K_4 = -g \frac{1}{m^8} + \frac{7}{2} g^2 \frac{1}{m^{12}}. \quad (23)$$

总之，对于任何扰动高斯分布，其集团 n 阶矩 K_n 其实就是 n 个外点的连通图之和，因此我们也可以称之为连通 n 阶矩，并记作 $\langle \Phi^n \rangle_c$ ，即

$$K_n = \langle \Phi^n \rangle_c. \quad (24)$$

3.3 圈展开

读者可能发现了，上面画出的所有费曼图中，有些费曼图包含了闭合回路，我们称之为圈，而有些则没有。为了看清楚圈的含义我们再次修改概率分布，假设我们记 $S(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} g \phi^4$ ，那么我们将要考虑的概率分布为

$$P(\phi) = \frac{1}{\mathcal{Z}[g, h]} \exp \left(-\frac{1}{h} S(\phi) \right). \quad (25)$$

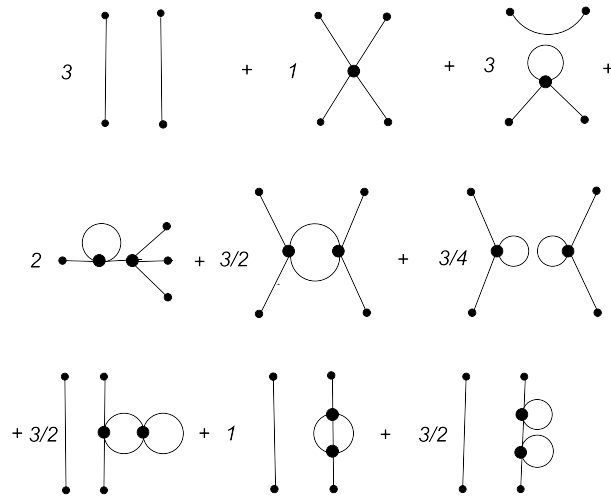


Figure 4: The feynman diagrams for calculating $\langle \Phi^4 \rangle$.

我们同样可以按照对参数 g 的微扰展开来计算 n 阶矩和连通 n 阶矩，稍微想一下人们就能知道，现在所有的费曼图和上一节中的费曼图都是一样的，与我们在上一节中考察的情况的唯一区别在于，现在费曼图中每一根连线的贡献是 h/m^2 ，而每一个顶角的贡献是 $-g/h$ 。为了让 h 的贡献平等地进入外点，现在假设我们要计算的是 $\langle \Phi^n \rangle_c / h^n$ ，也就是说每一个外点要额外贡献一个 $1/h$ 。假设我们正在考察的费曼图共有 v 个点(包括外点和顶角)， e 根连线， l 个独立的圈，则很显然这幅费曼图会贡献一个 h^{e-v} ，由连通图的欧拉公式可知，它就是

$$h^{l-1}. \quad (26)$$

也即是说，每一幅费曼图的圈的个数其实是它按照 h 展开的阶数加1。

因此，如果我们假定 h 是一个小量，那么在计算 $\langle \Phi^n \rangle_c / h^n$ 的时候，高圈图的贡献相比于低圈图的贡献就处在 h 微扰展开的更高阶上，概率分布(25)按照 h 进行微扰展开其实就是相应费曼图的圈展开。这个结论对于任何扰动高斯分布都是成立的。如果我们将 ϕ 看成是某个粒子的坐标， $S(\phi)$ 看成是这个粒子的势能， h 看成是温度，那么(25)其实就是这个粒

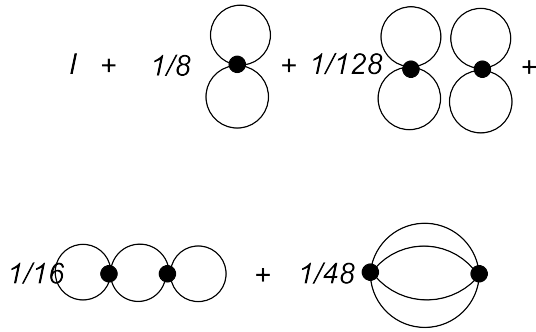


Figure 5: The vacuum diagrams.

子在热平衡之后的概率分布，也就是所谓的玻尔兹曼分布。而我们考虑的圈展开其实就是一种低温展开。

3.4 复变量

现在，假设我们考察的是一个复随机变量 Φ ，其取值为 $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ ，其中 ϕ_1, ϕ_2 是两个实数，相应的高斯分布为

$$P(\phi, \bar{\phi}) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp(-m^2 \bar{\phi} \phi). \quad (27)$$

很显然，这个概率分布的特征函数可以计算得

$$\langle \exp(iJ\bar{\phi} + i\bar{J}\phi) \rangle = \exp\left(-\frac{\bar{J}J}{m^2}\right). \quad (28)$$

由此容易得到 $\langle \Phi \Phi \rangle = \langle \bar{\Phi} \bar{\Phi} \rangle = 0$, $\langle \Phi \bar{\Phi} \rangle = 1/m^2$ 。也就是说， Φ 仅仅在与其复共轭进行配对的时候才会有非零的贡献。这一点在我们考虑扰动高斯分布画费曼图的时候尤其重要，这时候为了强调 Φ 只能与其复共轭进行连线我们常常在这个连线上加上一个箭头，这个箭头从 Φ 指向 $\bar{\Phi}$ 。另外，概率分布必然是实的，因此我们不妨假定任何扰动高斯分布的顶角都是 $\bar{\phi}\phi$ 的函数，而不仅仅是 ϕ 或者 $\bar{\phi}$ 的函数。这样一来在画微扰展开的费曼图的时候，任何一个进入顶角的箭头都必然对应一个离开这个顶角的箭头，因此，从

一个 Φ 外点出发顺着箭头的方向走必然会终止于某个 $\bar{\Phi}$ 外点。如此一来，我们必然有，在这样的扰动高斯分布中 $\langle \Phi \Phi \rangle = \langle \bar{\Phi} \bar{\Phi} \rangle = 0$ (画不出任何相应的费曼图)。这个结果也可以直接从对称性来证明，这是因为，如果我们的概率分布是 $\bar{\phi}\phi$ 的函数，那么它在 $\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi, \bar{\phi} \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\phi}$ 的变换下就是不变的，因此我们必然有 $e^{-2i\alpha}\langle \Phi \Phi \rangle = \langle \Phi \Phi \rangle$ ，由于 α 是任意的，这就意味着 $\langle \Phi \Phi \rangle = 0$ ，类似的也可以证明 $\langle \bar{\Phi} \bar{\Phi} \rangle = 0$ 。

3.5 微扰统计场论

微扰统计场论可以看成是上面我们所考察的这一类问题的推广。只不过这时候我们有无穷多个随机变量，它们形成某个欧氏空间(比方说 \mathbb{R}^1)上的场分布，我们可以用 $\Phi(x)$ 来表示这些随机变量， x 表示欧氏空间上的坐标。 $\Phi(x)$ 的取值我们可以记为 $\phi(x)$ ，它是一个场，为了简单起见我们不妨假定这些随机变量的取值都为实数。统计场论的关键是给每一个场位形 $\phi(x)$ 都指定一个概率 $P[\phi]$ ，它由下面的式子给出，

$$P[\phi] = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp(-S[\phi]), \quad (29)$$

式中 $S[\phi]$ 的一个典型例子如下

$$S[\phi] = \int dx \left[\frac{1}{2} ((\partial_x \phi)^2 + m^2 \phi^2) + \frac{1}{4!} g \phi^4 \right]. \quad (30)$$

归一化常数 \mathcal{Z} 通常被称作配分函数，它的计算方法是

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \exp(-S[\phi]), \quad (31)$$

这里的积分表示对所有的场位形进行求和，称作泛函积分。在当前，泛函积分还不是一个有精确定义的数学概念，如何严格地定义泛函积分是最为重要的待解决数学难题之一。不过在形式上，我们可以将泛函积分理解成对每个空间点 x 上的场变量都进行积分，是一个无穷重积分，也即是说，在形式上我们可以将积分测度 $\mathcal{D}\phi$ 理解成， $\mathcal{D}\phi = \prod_x d\phi(x)$ ，这里的 $d\phi(x)$ 不表示对 x 求微分，而是表示将 x 点的场变量 $\phi(x)$ 本身看成是一个积分变量。

由于 $\Phi(x)$ 依赖于 x ，所以原来的多阶矩的概念就可以推广成多点关联函数的概念。比方说两点关联函数的定义如下

$$\langle \Phi(x)\Phi(y) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(y) \exp(-S[\phi]). \quad (32)$$

我们可以用类似于前面发展的微扰展开的办法来计算多点关联函数。比方说，对于 $S[\phi]$ 由(30)式给出来的统计场论，我们可以将顶角项 $\int dx \frac{1}{4!} g \phi^4$ 看成是一个微扰项。很显然，(30)式去掉这一项角项剩下的部分同样是某种高斯积分，通过计算这一高斯积分我们就能把两个不同点上的场进行配对。整个费曼图的画法和我们前文的讨论是类似的，不同的是，在计算每一费曼图对多点关联函数的贡献时采用的计算规则略微有些不同，比方说，在现在的情形中每一根代表配对的连线的贡献不再是一个简单的数了，再比方说，每一个顶角的贡献不再是一个简单的 $-g$ 了，而是还要包含一个对 x 的积分。

实际上，我们前面发展的所有概念都可以平行地照搬到微扰统计场论中去。当然，微扰统计场论也有其自身的复杂性，在微扰统计场论中，费曼图的每一个独立的圈都会额外贡献一个积分，而这个积分往往是发散的，物理学家用重整化的办法来处理这一发散，以从中得出有意义的有限的结果。不过在数学上，这一问题还没有得到严格的处理，实际上，它和我们之前提到的泛函积分的严格数学定义问题密切相关，是有待解决的重大数学难题。当然，我们并不打算详细地讨论微扰统计场论，所以让我们就在这里停下来吧。

4 大 N 展开与随机矩阵理论

在中心极限定理的证明过程中我们看到，对于一个有 N 个随机变量的系统，它的某些问题在 N 很大的极限下会得到极大的简化。这一观察促使人们去研究各种 N 个随机变量的系统在大 N 极限下的行为，以及这些系统按照 $1/N$ 的微扰展开，这就是所谓的大 N 展开思想。在物理学中，大 N 展开思想已经有好几十年的历史发展脉络，对于今天的人来说，大 N 展开最著

名的例子也许是AdS/CFT对应。不过，在这里我们并不想系统性地回顾大 N 展开的这些发展。相反，我们想介绍大 N 展开的一个重要例子，即随机矩阵理论。除了因为这一理论本身有广泛的应用以外，我们介绍它是因为，就好像中心极限定理一样，这一理论的大 N 极限是已经被了解得很清楚的，是一个漂亮的数学物理定理。

下面我们来介绍随机矩阵理论。这时候，我们要考察的随机变量是一个 $N \times N$ 的厄米矩阵 Φ ，其取值我们依然记为 ϕ ， ϕ 的第 i 行第 j 列我们记为 ϕ_j^i 。我们假定这个随机变量的概率分布如下

$$P(\phi) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp(-N \text{Tr} V(\phi)), \quad (33)$$

式中 $V(\phi)$ 是关于 ϕ 的一个实多项式，比如说 $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + g\phi^4$ 等等。

我们主要关心 ϕ 的本征值密度的期望值 $\rho(E)$ ，其定义如下

$$\rho(E) = \frac{1}{N} \langle \text{Tr} \delta(E - \Phi) \rangle = \frac{1}{N} \langle \sum_i \delta(E - E_i) \rangle, \quad (34)$$

式中 E_i 为某个按照概率(33)随机产生的 ϕ 的本征值。 $\rho(E)$ 也就是随机产生许许多多 ϕ 以后，它们的本征值的分布函数，它显然满足 $\int dE \rho(E) = 1$ 。当 N 有限时， $\rho(E)$ 很复杂很难精确地求解出来，但是，正如我们将要看到的，在 $N \rightarrow +\infty$ 的大 N 极限下， $\rho(E)$ 将趋向于一个简单的光滑函数。我们下面要做的事情就是找到这个光滑函数，它就类似于我们在中心极限定理中的高斯分布。

注意到 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im}(\frac{1}{x+i\epsilon}) = -\pi\delta(x)$ ，我们可以引入一个更容易计算的函数 $G(z)$ ，其定义为

$$G(z) = \frac{1}{N} \langle \text{Tr} \frac{1}{z - \Phi} \rangle. \quad (35)$$

很显然， $\rho(E) = -(1/\pi) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} G(E + i\epsilon)$ 。另外，注意到我们的概率分布(33)在么正变换下是不变的，即 $P(\phi) = P(U^\dagger \phi U)$ ，这里 U 为一个任意的 $N \times N$ 的么正矩阵。因此我们必然有

$$G_j^i(z) = \left\langle \left(\frac{1}{z - \Phi} \right)_j^i \right\rangle = \delta_j^i G(z). \quad (36)$$

4.1 魏格纳半圆定律

下面我们考虑一种简单的情况，即 $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ 的情况。这时候由高斯积分我们容易有

$$\langle \Phi_j^i \Phi_l^k \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\phi] \phi_j^i \phi_l^k \exp\left(-N \frac{1}{2} m^2 \sum_{p,q} \phi_q^p \phi_p^q\right) = \delta_l^i \delta_j^k \frac{1}{Nm^2}. \quad (37)$$

这就是高斯分布情况下随机矩阵理论中两个外点进行配对所需满足的规则。由于 Φ_j^i 带有上下两个不同的指标，因此我们常常用如图(6)所示的双线来表示这种配对。注意图中箭头的方向总是从下指标指向上指标的，并注意图中两根线的箭头方向相反。

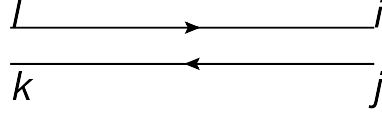


Figure 6: The pairing between Φ_j^i and Φ_l^k with contribution $\delta_l^i \delta_j^k \frac{1}{Nm^2}$. The i, j end of the double lines stands for Φ_j^i , the k, l end stands for Φ_l^k .

现在，我们可以计算 $G_j^i(z)$ 了，注意到奇数个 Φ 的期望值一定为零，我们可以将 $G_j^i(z)$ 按照 $1/z$ 泰勒展开为

$$G_j^i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}} \langle (\Phi^{2n})_j^i \rangle \quad (38)$$

$$= \delta_j^i \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} \langle (\Phi^2)_j^i \rangle + \frac{1}{z^5} \langle (\Phi^4)_j^i \rangle + \dots \quad (39)$$

首先让我们来看这个展开中的第二项，即 $\frac{1}{z^3} \langle \Phi_k^i \Phi_j^k \rangle$ (当一个表达式中的一个上指标和一个下指标用同样的字母表示时，我们默认对这个指标进行求和，也称之为将这两个指标进行收缩)，稍微想一下就能发现，这一项可以用如下的图形(7)来表示。

图中每一根单线的贡献是 $1/z$ ，当用一根单线将双线的两端连起来的时候表示要将这两端的两个指标进行收缩。因此，这幅图的总贡献

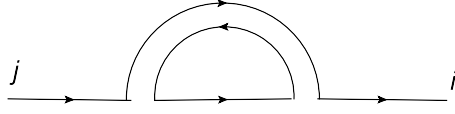


Figure 7: The diagram for $\frac{1}{z^3} \langle \Phi_k^i \Phi_j^k \rangle$.

为 $\delta_j^i N \frac{1}{Nm^2}$, 总的来说是在 N 的零次方阶, 我们记为 $O(N^0)$ 。注意这里额外的那个 N , 它显然来自于上下指标的收缩, 也就是对应于图(7)中那个闭合的回路。稍微想一下就能发现, 任何闭合回路总意味着一个这样的收缩, 因此会额外贡献一个因子 N 。

下面我们来考察展开式(39)中的第三项, 也就是 $\frac{1}{z^5} \langle \Phi_k^i \Phi_l^k \Phi_h^l \Phi_j^h \rangle$, 这涉及到四个矩阵, 根据高斯积分两两配对的规则, 它有多种配对的可能性。暂时不考虑这四个 Φ 如何配对, 仅仅注意到这四个 Φ 的上下指标收缩关系, 我们容易知道相应的图形必然具有如下结构, 如图(8)。图中的阴影部分表示双线间的可能配对。

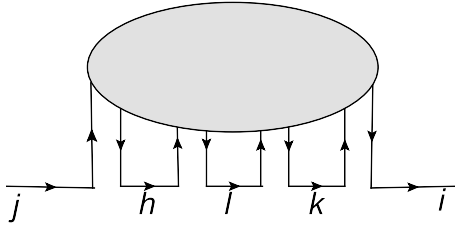


Figure 8: The diagram for $\frac{1}{z^5} \langle \Phi_k^i \Phi_l^k \Phi_h^l \Phi_j^h \rangle$.

现在, 让我们来考虑双线间的可能配对形式。它给出如图(9)所示的3种可能性。

图(9)中的每一幅图都有两根双线, 每根双线贡献一个 $1/N$ 。但是图(9)中的(a)、(c)两图和(b)图有根本性的不同, (a)、(c)两图包含了两个闭合回路, 每个闭合回路会额外贡献一个 N , 所以总的来说(a)、(c)两图是 $O(N^0)$ 阶的。但是(b)图完全可以一笔画出, 它不包含任何闭合回路, 所

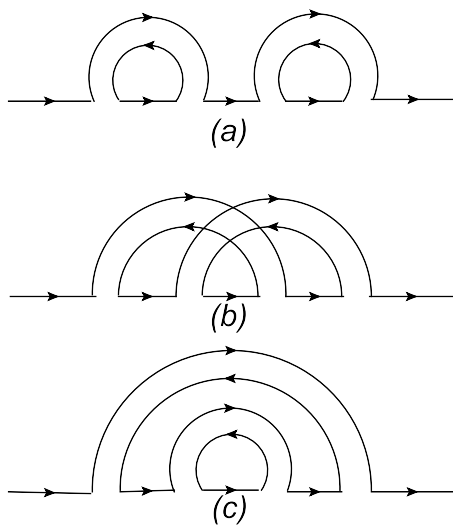


Figure 9: The diagrams for $\frac{1}{z^5} \langle \Phi_k^i \Phi_l^k \Phi_h^l \Phi_j^h \rangle$.

以总的来说，(b)图是 $O(1/N^2)$ 阶的。也就是说，在大 N 极限下，(b)图的贡献完全可以忽略不计。实际上，(b)图通常被称为非平面图，也就是说当它在两维平面上画出来的时候必然要涉及一些交叉线。相反，(a)、(c)这样的图被称之为平面图，它们可以直接在两维平面上画出来而不涉及到任何交叉线。图(9)其实示例了一条一般规则，即任何非平面图相对于平面图来说总有更少的回路，由于每一个闭合回路都会额外贡献一个 N ，因此非平面图在大 N 展开的时候就代表 $1/N$ 的更高阶贡献。特别的，在 $N \rightarrow \infty$ 的大 N 极限下，我们可以忽略掉所有的非平面图。正因为如此，大 N 极限有时候也被称之为平面图极限。

下面我们考虑完整的 $G_j^i(z)$ 在平面图极限下的结构，这就要考虑泰勒展开(39)的所有阶。为此让我们首先观察一下图(9)的(a)、(c)两图的特征，很容易发现，(a)图是将同一个组成单元重复两次而成，而(c)图是在图(7)的基础上嵌套一根双线而成。稍微尝试一下就能发现，在平面图极限下，这两个特征是泰勒展开所有阶共有的，也即是说，在平面图极限下，任何对 $G_j^i(z)$ 有贡献的图都可以通过重复和嵌套这两种方式来生成。假定通过嵌

套生成的所有图的贡献之和为 $S(z)$, 并将两种操作生成的所有图的贡献之和记为 $G(z)$ (因为 $G_j^i(z) = \delta_j^i G(z)$), 如下图(10)所示.

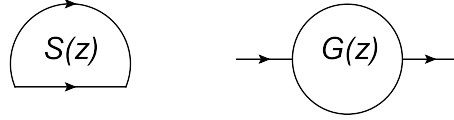


Figure 10: $S(z)$ and $G(z)$.

很清楚, $G(z)$ 是将 $S(z)$ 不断重复而成, 反过来, $S(z)$ 是在 $G(z)$ 的基础上嵌套一根双线而成, 用图形来表示就是(11)。从这幅图中我们很容易读出来

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z} S(z) \frac{1}{z} + \frac{1}{z} S(z) \frac{1}{z} S(z) \frac{1}{z} + \dots \\ &= \frac{1}{z - S(z)}. \end{aligned} \quad (40)$$

另外, 从图中也可以看出来, 从 $G(z)$ 通过嵌套得到 $S(z)$ 的过程我们加上了一根双线, 其贡献为 $1/(Nm^2)$, 但同时也增加了一个回路, 其贡献为 N , 因此我们有

$$S(z) = \frac{1}{m^2} G(z). \quad (41)$$

通过(40)和(41)这两个方程, 我们容易解得

$$G(z) = \frac{m^2}{2} \left(z - \sqrt{z^2 - \frac{4}{m^2}} \right). \quad (42)$$

式中在二次方程两个根的 \pm 号中, 我们选择了 $-$ 号, 这是因此只有这样相应的 $G(z)$ 才能满足在 $z \rightarrow \infty$ 时 $G(z) \rightarrow 1/z$ 。

由 $G(z)$ 的表达式(42), 我们很容易得到本征值分布 $\rho(E)$,

$$\rho(E) = \frac{m^2}{2\pi} \sqrt{\frac{4}{m^2} - E^2}, \quad (43)$$

式中 E 的取值在区间 $[-2/m, +2/m]$ 之内。这就是魏格纳半圆定律。

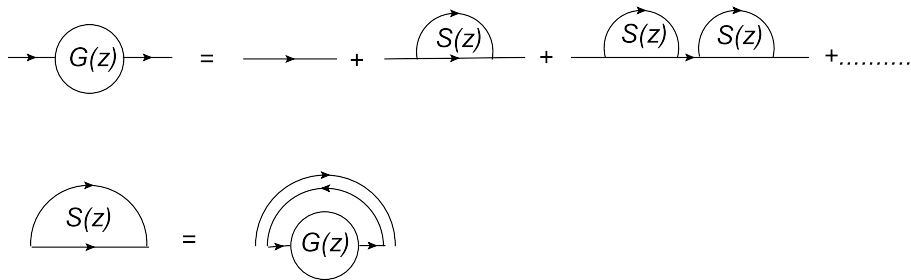


Figure 11: The diagrams for $G(z)$ and $S(z)$.

4.2 戴森气体

魏格纳半圆定律是大 N 极限下随机矩阵本征值分布的一个简单结果。但是这个结果只适用于 $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ 的情形。这一节我们就是要把类似的结论推广到 $V(\phi)$ 是一个一般性的多项式的情形，比方说 $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + g\phi^4$ 这样的情形。如果用按照 g 进行微扰展开的方式来处理问题，我们就能发现，这时候，顶角 $g\phi^4$ 的引入使得我们需要考虑的典型平面图为如(12)所示的样子。很清楚，我们很难通过直接将所有类似这样的图的贡献都加起来以得到一个 $G(z)$ 的表达式，所以我们可能需要用图形之外的方法来处理现在的一般性情形。

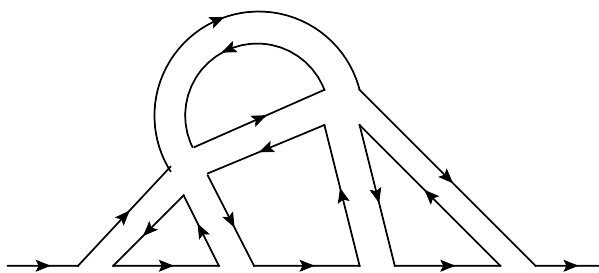


Figure 12: A diagram with two vertexes.

为此让我们来考察一个观测量 $\text{Tr}(\mathcal{O}(\phi))$ 的期望值，这里 $\mathcal{O}(\phi)$ 表示 ϕ 的一个函数。很清楚， $\text{Tr}(\mathcal{O}(\phi))$ 在么正变换 $\phi \rightarrow U^\dagger \phi U$ 下是不变的。这个期望

值由下式计算

$$\langle \text{Tr}(\mathcal{O}(\phi)) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int [d\phi] \text{Tr}(\mathcal{O}(\phi)) e^{-N \text{Tr} V(\phi)}. \quad (44)$$

前面我们已经说过了概率分布 $P(\phi)$ 在么正变换下是不变的， $\text{Tr}(\mathcal{O}(\phi))$ 也是么正不变的，值得讨论的是积分测度 $[d\phi]$ ，不过可以证明如果将它自然地定义成 $[d\phi] = \prod_{i,j} d\phi_j^i$ ，则它在么正变换下也是不变的。

另一方面，对于任何厄米矩阵 ϕ ，如果将其本征值所构成的对角矩阵记为 $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ ，则 ϕ 必定可以分解成 $\phi = U^\dagger \Lambda U$ 的形式，式中 U 为某个么正矩阵。那么积分测度 $[d\phi]$ 必定可以重写成 $[d\phi] = J \prod_i d\lambda_i [dU]$ ，式中 J 为雅可比行列式， $[dU]$ 表示对么正矩阵 U 的积分测度。由于积分表达式(44)的被积函数是么正变换不变的，因此对 $[dU]$ 的积分是平凡，不妨将之归一化为1，如此一来，积分(44)就可以重写成，

$$\langle \text{Tr}(\mathcal{O}(\phi)) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int J \prod_i d\lambda_i \sum_j (\mathcal{O}(\lambda_j)) e^{-N \sum_k V(\lambda_k)}. \quad (45)$$

这个表达式中唯一还不清楚的就是那个雅可比矩阵 J 。

为了求出雅可比矩阵 J ，我们不妨考虑 ϕ 在对角矩阵邻域内的情形，即 $\phi = e^{-i\varepsilon} \Lambda e^{i\varepsilon}$ ，其中 ε 为一个无穷小厄米矩阵，因此有 $\phi = \Lambda - i[\varepsilon, \Lambda]$ ，由这个式子可以看出，对 Λ 的积分(即 $[d\Lambda] = \prod_i d\lambda_i$)带来的雅可比行列式为1，同时由于矩阵元 $[\varepsilon, \Lambda]_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) \varepsilon_{ij}$ ，它带来的积分测度为 $\prod_{i,j} [(\lambda_i - \lambda_j) d\varepsilon_{ij}] = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 [d\varepsilon]$ ，其中积分测度 $[d\varepsilon] = \prod_{i,j} d\varepsilon_{ij}$ 就是测度 $[dU]$ 在恒等矩阵邻域内的具体形式。因此，我们有，雅可比行业式 $J = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$ 。将之代入积分式(45)我们就有

$$\langle \text{Tr}(\mathcal{O}(\phi)) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \prod_i d\lambda_i \sum_j (\mathcal{O}(\lambda_j)) \exp[-NS(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)]. \quad (46)$$

式中 $S(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \sum_i V(\lambda_i) - \frac{1}{N} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \log(\lambda_i - \lambda_j)^2$ 。可以看到，现在问题变成了一个 N 粒子系统的问题，粒子的坐标就是 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, N$ 。这 N 个粒子处在一个势阱 $V(\lambda)$ 中，并且任意两个粒子之间有排斥势 $-\frac{1}{N} \log(\lambda_i -$

$\lambda_j)^2$ 的相互作用。这 N 个粒子就构成某种有相互作用的气体，称之为戴森气体。

从表达式(46)很容易看出，在大 N 极限下，只有函数 $S(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ 的极小值对积分有贡献，因此有 $\frac{\partial}{\partial \lambda_i} S(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = 0, i = 1, 2, \dots, N$ ，由此就得到如下方程

$$V'(\lambda_i) = \frac{2}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}. \quad (47)$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时，这些本征值就会趋向于一个连续谱，引入谱密度 $\rho(\lambda)$ (它就是我们前面引入的本征值分布函数 $\rho(E)$ 的大 N 极限，因此满足 $\int d\lambda \rho(\lambda) = 1$)，我们就可以把上面这个方程重写为

$$V'(\lambda) = 2\mathcal{P} \int d\mu \frac{\rho(\mu)}{\lambda - \mu}. \quad (48)$$

式中 \mathcal{P} 表示取积分主值。

从方程(48)容易看出，大 N 极限下的本征值谱必然分布在一个有限的区间之内，因为在允许 $|\lambda| \rightarrow \infty$ 的情况下，方程(48)右边趋于 $\sim 1/\lambda$ ，因此是无法和左边相等的。下面我们将把这个本征值的分布区间记为 A 。

下面我们引入解析函数 $G(z) = \int_A d\mu \frac{\rho(\mu)}{z - \mu}$ ，其中变量 z 定义在整个复平面上。很容易看出来 $\rho(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G(\lambda + i\epsilon)$ ，因此这里的 $G(z)$ 实际上就是我们前面引入的 $G(z)$ 函数的大 N 极限， $G(z)$ 现在的这种表达形式称之为谱表示，从这种表达形式可以看出来， $G(z)$ 除了在区间 A 上有一条割线以外，它在整个复平面都是解析的。很显然方程(48)告诉我们的不过是 $\text{Re} G(\lambda + i\epsilon) = \frac{1}{2} V'(\lambda)$ (在区间 A 上)。由这个条件，加上 $G(z)$ 的解析性，再加上 $z \rightarrow \infty$ 时 $G(z) \rightarrow 1/z$ 的条件，我们就能唯一性地确定解析函数 $G(z)$ ，由此就能求出 $\rho(\lambda)$ 。

比方说，假如 $V(\lambda) = \frac{1}{2} m^2 \lambda^2 + g \lambda^4$ ，这时候由于 $V(\lambda)$ 是一个偶函数，我们可以知道，谱分布 $\rho(\lambda)$ 也必然是一个偶函数，因此区间 A 必定可以取成 $[-a, a]$ 的形式，其中 a 是待定的。魏格纳半圆定律启发我们可以试探性地将 $G(z)$ 取成如下形式

$$G(z) = \frac{1}{2} V'(z) - P(z) \sqrt{z^2 - a^2}, \quad (49)$$

其中 $P(z)$ 是一个待确定的多项式。很显然，这时候

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{\pi} P(\lambda) \sqrt{a^2 - \lambda^2}, \quad (50)$$

由于 $\rho(\lambda)$ 是一个偶函数，所以 $P(z)$ 必定是一个偶多项式。又由于 $z \rightarrow \infty$ 时 $G(z) \rightarrow 1/z$ ，可知 $P(z)$ 是一个2次偶多项式，因此包含两个待定系数。再加上前面待定的 a ，我们就有3个待定参数。它们可以这样来确定，由于 $z \rightarrow \infty$ 时 $G(z) \rightarrow 1/z$ ，所以在 $z \rightarrow \infty$ 时 $G(z)$ 渐进式的 z^3 ， z^1 项系数都要消去，而 $1/z$ 项的系数必定要等于1，这就给出了三个方程，刚好可以确定3个待定参数。这就完成了我们想要的求解，相应的(50)式就是魏格纳半圆定律的推广。

得到 $\rho(\lambda)$ 后，观察量 $\text{Tr} \mathcal{O}(\phi)$ 的期望值在大 N 极限下就可以写成

$$\frac{1}{N} \langle \text{Tr}(\mathcal{O}(\phi)) \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \mathcal{O}(\lambda_i) = \int d\lambda \rho(\lambda) \mathcal{O}(\lambda). \quad (51)$$

5 总结

至此，我们走完了从简单的标量随机变量到高维随机矩阵的完整旅程。回顾本章，核心的思想可以凝练为以下几个层面的“统一”：第一，是“大数目极限”下的统一。无论是中心极限定理中 N 个随机变量之和趋向高斯分布，还是随机矩阵理论中 $N \rightarrow \infty$ 时本征值趋向确定的光滑连续谱（如魏格纳半圆），都揭示了“大 N 极限”是压制涨落、催生普适性规律的温床。第二，是“图形化思维”的统一。从最初用“点的集团分解”来理解普通矩与累积量的关系，到用带有顶角和连线的费曼图计算微扰高斯分布，再到用双线费曼图计算矩阵的格林函数。我们贯穿始终地演示了如何将复杂的积分与配对问题，降维打击为直观的拓扑计数问题。第三，是“连通性与物理可观测量”的统一。讲义中反复强调了一个核心结论：普通矩对应所有图的求和，而真正具有物理意义的累积量（或连通格林函数），仅仅对应于连通图的贡献。这个规则在标量场和矩阵场中都是成立的。第四，是“数学结构与物理图像”的统一。我们看到，矩阵积分中极

其复杂的雅可比行列式 $\prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2$ ，在物理图像上完美等价于处于势阱中且带有对数排斥势的“戴森气体”；而图论中的“圈数”，在统计力学中直接对应着“温度微扰的阶数”。掌握这些思想，不仅是为了计算几个特定的积分，更是为了获得一种跨学科的直觉。当未来大家在量子场论、多体物理甚至机器学习的高维统计中再次遇到类似的结构时，希望本章所建立的这套“语言体系”，能成为你们迅速看透问题本质的利器。