

重整化群理论

陈童

March 28, 2026

Contents

1	临界指数与普适性	3
1.1	反常量纲	3
1.2	临界指数与普适性	6
2	统计力学回顾	11
3	卡丹诺夫的物理图像	15
4	威尔逊重整化群理论	19
4.1	重整化群变换的构建	19
4.2	流、不动点、普适性与标度	22
4.3	算符乘积展开	26
4.4	固定点附近的重整化群流	27
4.5	重整化群方程	29
5	临界指数的计算	32
5.1	经典平均场理论	32
5.2	积去小尺度自由度	37
5.3	从重整化群的物理实质到理解生命现象	40
6	参考文献	42

回溯重整化群理论的源头，必须首先致敬两项更为早期却影响深远的奠基性成就。其中首要的便是列夫·D·朗道的开创性工作——他实为系统有效场论的先驱，尽管这一称谓在当时或许尚未定型。公允而言，朗道“发明”了序参量这一概念，其重要性无论怎样强调都不为过。

所谓序参量，其核心洞见在于：即便对微观机制一无所知（正如早期对于超流氦的理解），只要承认微观世界的存在，并坚信其遵循某些普遍的整体性法则——特别是关于局域性与对称性的规律——这些性质便足以决定原子尺度之上最具标志性的宏观行为。诚然，朗道与金兹堡（这一理念的主要合作者与发展者）后来在涨落效应和临界奇异性等关键问题上出现了偏差，但这丝毫未减损这种审视复杂凝聚态系统方式的深刻价值。一旦把握了序参量的本质——譬如，当其恰如波函数般呈现为复数形式——整个物理系统的宏观奥秘便豁然开朗。

朗道引入序参量的划时代意义，在于揭示了一个介于微观与宏观之间、令人意想不到的全新认知层面。传统观念将统计力学视作架设在两个极端世界之间的桥梁：一端是原子核与原子构成的微观领域（尺度在 10^{-13} 至 10^{-8} 厘米之间），另一端则是毫米乃至米量级的宏观世界。然而，序参量作为动态涨落的实体，在诸多情形下恰恰嵌入了一个居间的介观层次，其特征尺度横跨几十至数百埃，直至微米范围（约 $10^{-6.5}$ 至 $10^{-3.5}$ 厘米）。随着威尔逊重整化群思想的兴起，源自朗道-金兹堡传统的有效（“粗粒化”）哈密顿量——亦即自由能按序参量展开的数学形式——终于获得了更为精确的理论诠释。如今，朗道-金兹堡-威尔逊（LGW）哈密顿量被理解为经过深刻重整化的真实哈密顿量，那些更为精细的微观自由度已然被系统地“积掉”。（具体显式表达详见后文。）在现代凝聚态理论的实践中，研究者往往直接从这个介观层次出发，以物理上合理的LGW哈密顿量替代那些过于复杂或真实的微观哈密顿量，进而运用统计力学的方法解读宏观现象。至于如何从原子层次严格推导出各类初始LGW哈密顿量，并论证其适用边界，则已发展成为一门独立而重要的研究课题。

朗道的序参量框架为相变理论注入了前所未有的明晰性与形式化力量，最终实现了对多临界点的精确刻画，并深化了对有序态诸多特性的理解。然而，1944年的一声惊雷震撼了学界：拉斯·昂萨格以出神入化的数学技艺（连朗道本人都为之叹服）严格求解了最为简单的铁磁体模型——伊辛

模型——的配分函数与全部热力学性质。该模型确实展现出尖锐的相变临界点，但其临界行为的细节，特别是那些奇异性特征，竟与朗道理论的几乎每一项精细预言都大相径庭——其中的缘由将在后文详述。面对这一理论危机，以及日益明确的实验证据，物理学界相继孕育出普适而深刻的临界指数概念、指数间隐藏的特殊关系式，以及针对临界区域的标度理论描述。这些突破性洞见极大地激发了肯尼斯·威尔逊对量子场论的探索。事实上，一旦洞见到以有效哈密顿量处理统计力学问题与在费曼路径积分框架下开展量子场论计算之间深刻的数学同构性，两个领域之间的桥梁便赫然显现。不过，这种类比的全面把握绝非朝夕之功：威尔逊率先在最本质的层面上透彻地理解了这一联系，而这一思想遗产至今仍在持续滋养着两个学科的发展。1971年，历经四五年艰苦卓绝的探索，肯·威尔逊终于将重整化群思想锻造成一个既概念自洽又具备实际计算能力的理论框架。

经由这一系列发展，学界对所谓“反常”（实则标准）临界行为的理解获得了质的飞跃。需要特别指出的是，理论物理学的终极追求始终在于获得深刻的洞察力与真正的理解。至于“理解”一词的确切内涵——“什么构成了理解？”——这本身就是一个智能时代的根本性难题。但，让我们立即指出，完整的重整化群理论不应被视为（尽管这种说法很常见）基于量子场论微扰展开，正如宏伟的吉布斯统计力学结构不能被视为建立于理想经典气体、玻尔兹曼动理论和稀薄流体的集团展开之上一样，因为这将严重歪曲统计力学的力量和范围。

1 临界指数与普适性

1.1 反常量纲

如果要用一个特征来体现重整化群理论的非凡力量与辉煌成就，那么我们不得不说，最值得强调的，或许是重整化群揭示了非经典临界指数的可能性——比如那个不为零的“反常”量纲 η 。这很可能是该理论最重大的贡献。

让我们先聚焦于一个“局域”的微观变量，记作 $\psi(\mathbf{r})$ 。在铁磁体中，它或许是某一点 \mathbf{r} 处的局域磁化强度 $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ ；在流体系统中，它可能是该点密度涨落相对于平均值的偏离 $\delta\rho(\mathbf{r})$ 。而在量子场论中， $\psi(\mathbf{r})$ 则化身为基本

的量子场，成为“算符值”的实体。对于那些涨落效应不可忽视的磁性系统， $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ 同样具有算符的本质。不过，这种量子与经典的区分在此相对次要——为简便起见，我们不妨将 $\psi(\mathbf{r})$ 视作一个普通的经典变量。当 ψ 与我们关注的相变及临界现象中的“序参量”紧密相连时，它便展现出最迷人的一面。

借助散射实验（无论是光、X射线、中子还是电子），科学家们能够观测到一个关键物理量——对关联函数（或称“两点函数”）：

$$G(\mathbf{r}) = \langle \psi(\mathbf{0})\psi(\mathbf{r}) \rangle \quad (1)$$

这里的尖括号 $\langle \cdot \rangle$ 代表着统计物理学平均值，也即是对有限温度下平衡态系统中所有热涨落的统计平均。

$G(\mathbf{r})$ 的物理意义至关重要：它直接度量了原点处的微观涨落如何影响距离 $r = |\mathbf{r}|$ 外的远端行为。然而，正是在临界点附近——比如铁磁体的居里点（此时 $\psi \equiv \mathbf{m}$ ）或气-液临界点（此时 $\psi = \delta\rho$ ）——一种强烈的“有序”效应或关联会延伸至宏观尺度。结果，在精确的临界点，我们通常会惊异地发现：

$$G_c(\mathbf{r}) \approx D/r^{d-2+\eta} \quad \text{当 } r \rightarrow \infty \quad (2)$$

这是一个幂律衰减，其特征由临界指数 $d - 2 + \eta$ 所主宰。

然而，历史上所有“经典”理论——无论是朗道-金兹堡理论还是范德瓦尔斯理论——都斩钉截铁地预言 η 必须为零。在量子场论语境下，这对应于自由无质量粒子的行为。其数学根源在于，这些理论假设基本函数具有光滑、解析、无奇点的性质，因此可以像在经典力学中那样，在临界点处自由地做泰勒展开。在场论中，经典指数值 $d - 2$ （即 $\eta = 0$ ）可通过简单的量纲分析得到，这被称为“正则量纲”；而如果 η 不为零，则代表着一种“反常量纲”。

物理上， $\eta = 0$ 的预言往往源于对涨落的忽视，或者更准确地说，源于威尔逊所揭示的那个关键假设：只有更小尺度上的涨落才重要。在这种图景下，涨落可以被安全地“吸收”进有效参数（如质量、耦合常数等），而不会改变理论的根基。

但幂律衰减意味着系统中不存在确定的长度尺度——这正是“标度不变

性”的体现。为了看清这一点，让我们将距离按因子 b 重新标度：

$$\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r}' = b\mathbf{r}. \quad (3)$$

同时，用某个“协变”因子 b^Δ 重新标度序参量 ψ ，其中 Δ 是表征 ψ 的临界指数，称作 ψ 的标度量纲。于是：

$$G_c(\mathbf{r}) = \langle \psi(\mathbf{0})\psi(\mathbf{r}) \rangle_c \Rightarrow G'_c(b\mathbf{r}) = b^{2\Delta} \langle \psi(\mathbf{0})\psi(b\mathbf{r}) \rangle_c \quad (4)$$

$$\approx b^{2\Delta} D / b^{d-2+\eta} r^{d-2+\eta} \quad (5)$$

注意，若取 $\Delta = \frac{1}{2}(d-2+\eta)$ ，则 b 的因子恰好抵消，(2)式的形式得以保持。换句话说， $G_c(\mathbf{r})$ 是标度不变的：无论放大或缩小多少倍，其数学形式始终如一，不泄露任何特征长度的信息！

这恰恰暴露了经典理论在临界点处的致命弱点——既然幂律意味着所有尺度同等重要，那种假设“只有小尺度重要”的经典图景自然站不住脚。事实上，实验与理论都表明，“反常量纲” η 通常确实不为零（至少在凝聚态物理关心的 $d < 4$ 维度如此）。早在1949年，考夫曼和昂萨格就严格证明：对于二维伊辛模型， $\eta = \frac{1}{4}$ 。这一发现宣判了经典理论中解析性和泰勒展开假设的“死刑”，也向理论物理学家提出了严峻挑战：如何构造一个能自然导出 $\eta \neq 0$ 的理论？

重整化群的力量正在于，它提供了一个概念清晰且计算可行的框架，让 η （以及其他指数，如 Δ 及其对能量密度等局域量的类似物）的反常值得以自然涌现，而非强行植入。

在凝聚态物理中，式(2)的幂律显然只在远大于原子间距 a 的距离上成立。因此，关联函数的标度不变性仅是“渐近”的——这正是式中使用 \approx 和条件 $r \rightarrow \infty$ 的原因。更精细的理论还需考虑非零 a 的修正。相比之下，在量子场论中，微观距离 a 扮演着“紫外截断”的角色。由于这一截断通常是未知的，物理学家希望将其从理论中移除。若移除不当——这正是场论中“重整化”程序所要规避的——当 $a \rightarrow 0$ 时理论将遭受灾难性的无穷大发散。而在统计物理中，短距离截断总是物理存在的，它甚至决定了临界温度 T_c 等参数；无穷大项既不会出现，更不会像在场论中那样“驱动”理论。

在场论的现行表述中，“参数的标度依赖性”是常用概念，其物理图景是：在特定长度（或时间）尺度上测量的系统性质，会随观测尺度的变化

而缓慢演化。其实，这种表述往往只是重整化群流的一种简化说法——即只追踪单一变量或轨迹，因为粒子物理学家通常只关心描写“现实世界”的唯一理论。对某些凝聚态问题，这种简化或许够用；但更多时候，我们需要更复杂的全景视角。

不过，我们可以通过式(2)的幂律给“标度依赖性”一个更生动的诠释。若 $\eta = 0$ ，即 ψ 具有正则量纲 $\Delta = \Delta_{\text{can}} = \frac{1}{2}(d - 2)$ ，则振幅 D 是一个固定可测的物理常数，具有明确的物理意义。但当 η 虽小却不为零时（对许多三维系统， $\eta \approx 0.035$ ），我们可以引入一个“跑动”的或“尺度依赖”的参数：

$$\tilde{D}(R) \approx D/R^\eta \quad \text{当 } R \rightarrow \infty. \quad (6)$$

于是原关联函数可改写为：

$$G_c(\mathbf{r}) = \tilde{D}(r)/r^{d-2}. \quad (7)$$

由于 η 很小， $\tilde{D}(R)$ 随测量尺度 R 的变化相当缓慢。在场论的许多情形下，场 ψ 的量纲仅受所谓的边际微扰影响，这转化为 $\tilde{D}(R)$ 对 $\log R$ 的依赖，其随尺度的变化比 $\eta \neq 0$ 时更为微弱。

1.2 临界指数与普适性

当理论与哲学交汇时，最好的锚点永远是实验事实。因此，让我们先回到实验室，看看那些重塑了我们对物质世界认知的经典观测——正是这些现象，让重整化群理论在应对挑战时展现出了惊人的解释力。

临界点的曙光

1869年，托马斯·安德鲁斯向皇家学会展示了一个令人着迷的实验：在坚固的玻璃管中密封着二氧化碳。在常温下，容器内的流体清晰地分成两层——底部是密度较高的液态 $\rho_{\text{liq}}(T)$ ，顶部是轻得多的气态 $\rho_{\text{gas}}(T)$ ，两者之间界面分明。然而，当温度缓缓攀升至 $T_c \simeq 31.04^\circ\text{C}$ 这个神奇的数值时，液相与气相的界限开始模糊。两者密度逐渐趋近，最终在 $\rho_{\text{liq}} = \rho_{\text{gas}} = \rho_c$ 处合而为一，界面在“临界乳光”的朦胧雾霭中悄然消

失。超过这个临界温度后，液态与气态的界限彻底消融，呈现出完美的状态连续性。

这种临界现象如同一首重复的乐章，在所有单质和简单分子流体中不断上演——只是每个“演奏者”的调性不同：氦-4的临界温度低至5.20 K，而汞则高达约1764 K。临界密度同样千差万别。这些参数像是物质的“指纹”，深深烙印着原子与分子的个性，反映着微观截断尺度 a 上的物理细节。在这里，最大密度 ρ_{max} （大致等于低温下晶体的密度）的量级为 $1/a^3$ ，而 $k_B T_c$ 则由微观吸引势能设定。虽然这些数值对化学家和工程师至关重要，但对我们理解普遍规律而言，真正引人入胜的不是这些具体数字，而是当系统逼近临界点时，共存曲线 $\rho_{liq}(T)$ 与 $\rho_{gas}(T)$ 所展现出的那种普适的形态。

对称性与临界指数

乍一看，共存的液体与气体毫无对称性可言——一个是拥挤的原子集合，一个是稀疏的分子云团。然而，若定义一个比值

$$R(T) = \frac{\rho_c - \rho_{gas}(T)}{\rho_{liq}(T) - \rho_c} \quad (8)$$

来比较共存曲线的两翼，一个精妙的对称性便浮出水面。当温度从下方逼近临界点，即 $t \equiv (T - T_c)/T_c \rightarrow 0^-$ 时， $R(T)$ 精确地趋向于1。这意味着，物理流体在临界点附近自发地“学会”了完美的镜像对称——无论何种物质，这一规律普适地成立。

比对称性更令人惊叹的是临界点附近曲线的平坦程度。我们通常用幂律来刻画这一临界区域的形貌：

$$\Delta\rho \equiv \frac{1}{2}[\rho_{liq}(T) - \rho_{gas}(T)] \approx B|t|^\beta \quad \text{as } t \rightarrow 0^-. \quad (9)$$

其中 B 是依赖于具体物质的非普适振幅，而临界指数 β 则取一个对所有流体物质都一样的神奇普适值：

$$\beta = 0.325. \quad (10)$$

强调一下：这不是简单的分数，而是一个非平庸的数值，它对所有流体的临界点都一模一样！而且这与经典平均场理论预测的 $\beta = 1/2$ 形成鲜明对

照(经典平均场论的这个结果我们稍后会介绍)。对于二维系统 ($d = 2$)，昂萨格1949年对伊辛模型的精确解给出了 $\beta = 1/8$ ，这一预言已经被实验证实——人们研究了吸附在石墨表面上的甲烷单分子层，这种“二维流体”完美印证了这一普适规律。

跨越领域的普适性

这个 $\beta = 0.325$ 不仅适用于各类流体，还主宰着三维各向异性磁性材料的世界，特别是具有单一“易轴”的伊辛型磁体。铁磁体的相图如图(1)所示。这里为了简单起见，我们同样假设铁磁体只沿着竖直轴(所谓“易轴”)磁化，外磁场也只沿着竖直轴。

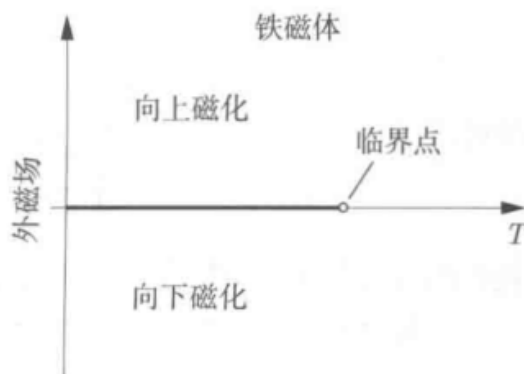


Figure 1: 铁磁体的相图

微观上看，铁磁体是由宏观数量相互作用的自旋规则地排布而成的，这些自旋排布成规则的晶格，每个格点上有一个自旋，相邻格点上的自旋会有相互作用，这种作用趋向于使得相邻自旋的取向相同，具体细节与我们关系不大。这些自旋只能取向上和向下两种朝向。如果没有外磁场，那么向上和向下对于系统来说是等价的，我们说系统的微观相互作用有 \mathbf{Z}_2 对称性， \mathbf{Z}_2 就是 $\{+1, -1\}$ 两种可能性(按照通常的乘法进行运算)，可以分别指代自旋向上和自旋向下。另外，这些自旋磁矩在宏观局部上的平均值，就是磁化强度，记作 $m(x)$ 。

假设外磁场为零，只调节系统的温度，也就是只关心相图(1)中水平轴上的情况。在高温时，热运动的能量远远超过相邻自旋之间相互作用的能

量，因此，这些自旋各自为政，每个自旋的取向都在向上和向下之间疯狂而随机地改变，自旋向上和自旋向下完全对称，整个系统是向上和向下对称而且无序的。这时候平均来说，每个自旋的自旋磁矩都是零，因此宏观上的磁化强度 $m(x)$ 也是零。我们说这时候系统处于具有 \mathbf{Z}_2 对称性的相，也就是系统的宏观表现有 \mathbf{Z}_2 对称性，它以之前微观相互作用的 \mathbf{Z}_2 对称性为基础，但不是一回事。高温相的对称性是微观相互作用所能允许在宏观上表现出来的最大对称性。

当温度降到临界点以下时，自旋之间的相互作用效应开始超过无规则热运动的效应，这时候会发生一件神奇的事情：这些自旋开始自发且协调一致地行动，形成一种要么都向上(总体上)、要么都向下(总体上)的宏观模式。换言之，系统从无序的热运动中自发产生了有序。这种“有序的程度”，正好可以用磁化强度 m 来刻画。由于各自旋协调一致地要么都向上、要么都向下，这时候磁化强度当然就不是零，而是一个非零常数，系统出现了自发磁化，这就是临界点处铁磁相变的物理本质。由于磁化强度为零对应无序的高温相，而磁化强度非零对应有序的铁磁相，所以朗道就把这里的磁化强度称之为**序参量**。

由于自发磁化选取了向上或者选取了向下，因此在铁磁相，原来高温相的 \mathbf{Z}_2 对称性就没有了，通常称这为 **\mathbf{Z}_2 对称性破缺**了。但是，由于向上磁化还是向下磁化原则上是机会均等的，系统只是随机地选取了其中一个方向，所以也称这种对称性破缺为**对称性自发破缺**。

在零外场下，当温度降至居里温度 T_c 以下，磁体展现出自发磁化 $m = \pm m_0(T)$ ，符号取决于外场从正或负方向趋近于零。由于系统具有严格的 $H \rightarrow -H$ (H 代表外磁场)、 $m \rightarrow -m$ 的 \mathbf{Z}_2 对称性（这与流体有所不同，流体的对称性只在临界点附近出现）， m_c 严格为零，对应于式(8)的对称性在所有温度下都精确成立。然而，磁化曲线的整体轮廓与流体共存曲线看似迥异，但在临界点附近，它们却遵循相同的渐近规律：

$$m_0(T) \approx |t|^\beta \quad \text{as } t \rightarrow 0^- \quad (11)$$

其中 $\beta = 0.325$ 再次适用于 $d = 3$ ，而经典理论仍固执地预测 $\beta = 1/2$ 。对于 $d = 2$ ，昂萨格的结果 $\beta = 1/8$ 依然成立！

流体与单轴铁磁体只是“伊辛普适类”的冰山一角。反铁磁体、亚铁磁体、二元合金的有序-无序转变、某些铁电体……这些看似毫不相干的系

统，在临界点附近都跳动着相同的数学韵律。每个系统都有其特定的序参量，通过关联函数 $G(R; T)$ 定义的特征衰减指数 η 同样具有普适性。实际上，任何可测量的物理性质都展现出普适的临界奇异性。

更多的临界指数

特别重要的是比热临界指数 $\alpha \approx 0.11$ （三维伊辛类），它描述了比热在临界点的发散行为：

$$C(T) \approx A_{\pm}/|t|^{\alpha} \quad \text{as } t \rightarrow 0^{\pm} \quad (12)$$

（对流体是定容比热，对磁体是零场比热）。振幅 A_+ 与 A_- 虽非普适，但其无量纲比值 $A_+/A_- \approx 0.52$ 却是普适的。在二维世界中，昂萨格1944年的精确解给出了 $A_+/A_- = 1$ ，且 $|t|^{-\alpha}$ 被 $\log |t|$ 所取代——而经典理论则错误地预言所有维度下都只有一个有限的比热跃变！

另外两个核心量是发散的等温压缩率（流体）或磁化率（磁体） $\chi(T) \propto (\partial m / \partial B)_T$ ，以及刻画“影响范围”的发散关联长度 $\xi(T)$ ，在临界点 $\xi \rightarrow \infty$ 。在临界点附近， $\xi(T)$ 的定义是（注意，现在是偏离临界点处的关联函数），

$$G(\mathbf{r}) \approx D/r^{d-2+\eta} e^{-r/\xi(T)} \quad \text{当 } r \rightarrow \infty. \quad (13)$$

值得一提的是，在量子场论中，关联长度的倒数 ξ^{-1} 基本上等价于场 ψ 的重整化质量：临界性则等同于无质量性，因为 $\xi^{-1} \rightarrow 0$ 。对于 $\chi(T)$ 、 $\xi(T)$ 这两者的发散，我们写作：当 $t \rightarrow 0^{\pm}$ 时，

$$\chi(T) \approx C_{\pm}/|t|^{\gamma} \quad \text{and} \quad \xi(T) \approx \xi_0^{\pm}/|t|^{\nu}. \quad (14)$$

对于三维伊辛类系统：

$$\gamma = 1.24 \quad \text{and} \quad \nu = 0.63. \quad (15)$$

而对于 $d = 2$ ， $\gamma = 7/4$ 且 $\nu = 1$ 。

普适类的版图

理论上还存在着其他的普适类，尽管实验上观察到的相对较少。重整化群理论的早期辉煌成就之一，便是描绘并深化了我们对这些普适类别的理解。很大程度上，系统的命运由其序参量的矢量或张量特性（标量、复数即二维矢量、三维矢量等）所决定。但究竟是何种深层机制导致了这种分类，以及普适性本身为何存在，这就是临界现象理论所要回答的核心问题。

到1960-62年间，关于**普适临界指数**的存在——那些与经典理论预测背道而驰的神秘数字——已在理论与实验的双重检验下尘埃落定，确凿无疑。理论探索的下一步随之浮出水面：科学家们发现这些指数之间并非孤立，而是遵循着简洁优雅的代数方程——即所谓的指数关系——且无论属于哪一类普适类，这些关系都普遍成立。其中最早被揭示的指数关系包括

$$\gamma = (2 - \eta)\nu \quad \text{以及} \quad \alpha + 2\beta + \gamma = 2. \quad (16)$$

正如读者可用前文引用的数值自行验证：这些关系在二维伊辛模型中精确吻合，在三维世界中则在实验精度与（理论估算的）数值精度内毫厘不爽；即便以经典平均场所给出的指数值代入，它们也被精确满足——如今我们深知，这些数值恰是 $d > 4$ 时的有效结果。但是，为什么临界指数之间一定满足这些关系式？

2 统计力学回顾

在凝聚态物理的研究中，一个至关重要的深层要求是：重整化群理论应当与吉布斯所完善的统计力学体系建立起紧密而自然的联系。当然，我们既无必要也不应当试图用重整化群理论去取代经典统计力学——后者作为描述均匀系统平衡态现象的基石，其地位不可动摇。因此，我们需要以一种契合重整化群变换语言的方式，重新梳理统计力学的基本框架，这正是本节要做的事。

让我们从一组微观且持续涨落的力学变量出发：在量子场论中，这些变量是定义于欧几里得（或闵可夫斯基）空间各点的各类量子场 $\psi(\mathbf{r})$ ；而在统计物理中，我们设想一个体积为 V 的物理系统，其中包含 N 个离散的“自由度”。对于经典流体，人们通常采用组成粒子的坐标 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$

来描述；然而，从数学处理的简便性出发——同时也为了与量子场论建立更清晰的类比——我们在此采用与离散晶格点（位于等间距位置 \mathbf{x} 上）相关联的“自旋”变量 $s_{\mathbf{x}}$ （可以是矢量、张量或算符等）。若晶格常数为 a ，则系统体积可表示为 $V = Na^d$ ，在 d 维空间中自由度的密度即为 $N/V = a^{-d}$ 。

基于这些基本变量 $s_{\mathbf{x}}$ ，我们可以构造出各种“局域算符”（或称“可观测变量”），例如局域磁化强度和能量密度：

$$m_{\mathbf{x}} = \mu_B s_{\mathbf{x}}, \quad E_{\mathbf{x}} = -\frac{1}{2} J \sum_{\delta} s_{\mathbf{x}} s_{\mathbf{x}+\delta}, \dots \quad (17)$$

其中 μ_B 和 J 为固定参数，而 δ 遍历所有最近邻晶格矢量。

一个物理系统由其哈密顿量 $\mathcal{H}[\{s_{\mathbf{x}}\}]$ （即力学中的能量函数）完全刻画，它通常是上述局域算符的空间均匀叠加。为了方便统计物理的应用，不妨假定我们的哈密顿量 \mathcal{H} 式中吸收了逆温度系数 $1/k_B T$ ，即我们的 \mathcal{H} 实际上是 $\mathcal{H}/k_B T$ ，有时候也称之为约化哈密顿量。引入约化量

$$t \equiv (T - T_c)/T_c, \quad h = \mu_B H/k_B T, \quad \dots \quad (18)$$

t, h, \dots, h_j, \dots 是各类“热力学场”（在量子场论中对应耦合常数）。则现在的哈密顿量可以写成

$$\mathcal{H}[s; t, h, \dots, h_j, \dots]. \quad (19)$$

这里 s 代表所有微观自旋 $s_{\mathbf{x}}$ 的集合。我们可以假设其中某些热力学场（特别是温度）可由实验者直接调控；但另一些可能是“内禀给定”的，因为它们体现了系统的微观细节，是“自然固定”的。

在凝聚态物理的传统研究中，人们通常关注那些具有特定简单形式的 \mathcal{H} ，其可调参数往往只有两三个——伊辛模型便是一个典型特例，仅含约化温度 t 和约化外场 h 两个变量。然而，威尔逊方法的一个革命性洞见在于：任何一个这样的“物理哈密顿量”都应被看作是在一个无比庞大的可能（约化）哈密顿量空间 \mathbb{H} 中所确定的一个低维子空间（例如由“坐标” t 和 h 张成的平面）。这种视角的转换对于重整化群理论的正确表述至关重要。

一旦给定了微观哈密顿量，统计力学的任务便是揭示相应宏观系统的热力学性质。首要步骤是计算配分函数：

$$\mathcal{Z}[\mathcal{H}] = \text{Tr}_s \{ e^{-\mathcal{H}[s]} \} \quad (20)$$

这里的求迹运算 $\text{Tr}_s\{\cdot\}$ 表示对全部 N 个自旋变量 s_x 在其所有可能取值上的求和或积分。玻尔兹曼因子 $\exp(-\mathcal{H}[s])$ 自然度量了在温度 T 的平衡系综中，出现由特定组态 $\{s_x\}$ 所描述的微观状态的概率。系统的热力学性质则由总自由能密度给出：

$$f[\mathcal{H}] \equiv f(t, h, \dots, h_j \dots) = - \lim_{N, V \rightarrow \infty} V^{-1} \log \mathcal{Z}[\mathcal{H}]. \quad (21)$$

其中特别包含我们关注的在临界点附近的奇异部分 $f_s[\mathcal{H}]$ 。各类关联函数亦可依标准方式类似定义。

倘若我们能够对某个具体模型切实执行式(20)中的求迹运算，并完成式(21)中的“热力学极限”取法，便可精确地得到临界指数、标度函数等关键结果。这正是昂萨格 (Onsager, 1944) 在零磁场下求解二维伊辛模型时所开创的路径。初看起来，这似乎意味着重整化群理论已无用武之地。然而，这种印象与事实相去甚远。问题关键在于**理解**！（即便有朝一日我们真的能够在计算机上以极高精度模拟临界系统上述根本问题依然如故。）简而言之，尽管我们确切知晓二维伊辛模型的 $\alpha = 0$ （对数发散）、 $\beta = 1/8$ 、 $\gamma = 7/4$ 、 $\nu = 1$ 、 $\eta = 1/4$ ；但我们并不知道这些指数为何取这些特定数值，也不理解它们为何满足指数关系式(16)。事实上，即便对于这种在物理上高度简化的模型，其精确解所不可避免的数学复杂性，也几乎掩盖了所有可能“解释”这些结果的普适性底层机制与原理的线索。因此，即便采用实空间重整化群方法对二维伊辛模型进行相当粗糙的近似求解，也可能真正具有深刻的启发意义。

与序参量的联系

我们将配分函数表示为：

$$\mathcal{Z} = \sum_n e^{-E_n}. \quad (22)$$

式中 n 表示系统的第 n 个微观状态，记作 $|n\rangle$ ， E_n 是这个微观状态所对应的约化能量。

系统的每一个微观态 $|n\rangle$ 都可以与某个特定的、空间变化的序参量函数 $m(\mathbf{x})$ 相联系。为了说明这一点，我们将使用伊辛模型的语言进行讨论，尽管该讨论可以推广到任何系统。在伊辛模型中，我们可以考虑通过对某点附近一个物理小(所谓物理小就是宏观上看足够小，但是微观上看依然包含了许多的格点在内)的区域内的所有自旋取平均，来为这个物理小的区域赋予一个磁化强度 $m(\mathbf{x})$ 。显然，这样定义的磁化强度在宏观上可以近似看作是平滑的连续函数，这些函数在小于晶格间距的距离尺度上基本上是常数。通过这种方式，我们就得到了从微观态空间到磁化强度函数的一个映射： $|n\rangle \rightarrow m(\mathbf{x})$ 。但这个映射并不是一一对应的。例如，由于平均过程是在足够多的格点上进行的，那么仅仅翻转某一个格点的自旋，不太可能对平均值产生显著影响。因此，许多微观态会映射到同一个磁化强度函数上。仅对这些微观态求和，就可以从第一性原理构造出一个关于序参量的泛函 $F[m(\mathbf{x})]$ ，其定义为：

$$e^{-F[m(\mathbf{x})]} \equiv \sum_{n|m(\mathbf{x})} e^{-E_n}. \quad (23)$$

因为在公式(23)中，我们只对那些对应于特定 $m(\mathbf{x})$ 的微观态进行了求和。而要计算完整的配分函数，我们需要对所有微观态求和。但我们可以通过对所有可能的 $m(\mathbf{x})$ 值求和来实现这一点。换句话说：

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}m(\mathbf{x}) e^{-F[m(\mathbf{x})]}. \quad (24)$$

等式右边是一个棘手的对象：它是一个泛函积分。我们是在对所有可能的函数 $m(\mathbf{x})$ 进行积分，这相当于进行无限多重积分。当然，实际上，由于序参量 $m(\mathbf{x})$ 源自底层的晶格结构，并且在短距离尺度上是足够平滑的，所以这个问题有所缓解。

(24)式在物理上非常优美。它意味着我们应该将自由能泛函 $F[m(\mathbf{x})]$ 视为一个关于连续变量 $m(\mathbf{x})$ 的**新有效哈密顿量**。它是通过对配分函数的大部分微观信息进行求和而得到的，但最终仍然留下了一个对这些微观信息的平均量（即序参量）的涨落进行求和或积分的过程。后文会具体讨论如何进行这样的积分。

3 卡丹诺夫的物理图像

1966年，卡丹诺夫（Kadanoff）以一项大胆的创新颠覆了临界现象的研究——他提出可以通过“粗粒化”手段，将系统在临界点附近“自我映射”，从而在减少有效自由度的同时保持物理本质。这一方案不仅优雅地导出了所有标度律，更为计算临界指数指明了一条看似可行的捷径。然而，当人们仔细审视这一理论框架时，却发现其中潜藏着难以逾越的障碍。不过回望历史，卡丹诺夫这直觉式的标度图像，恰恰孕育了后来威尔逊完整重整化群理论的核心精髓。因此，梳理这位先驱的开创性思想，对我们理解临界现象的演进至关重要。

让我们跟随卡丹诺夫（1966）的思路，设想一个简单模型：一个晶格常数为 a 的 d 维（ $d > 1$ ）伊辛系统，每个格点上坐落着自旋 $s_x = \pm 1$ ，只能取向上（+1）或向下（-1）两种状态（见图(2)）。最近邻自旋间通过耦合

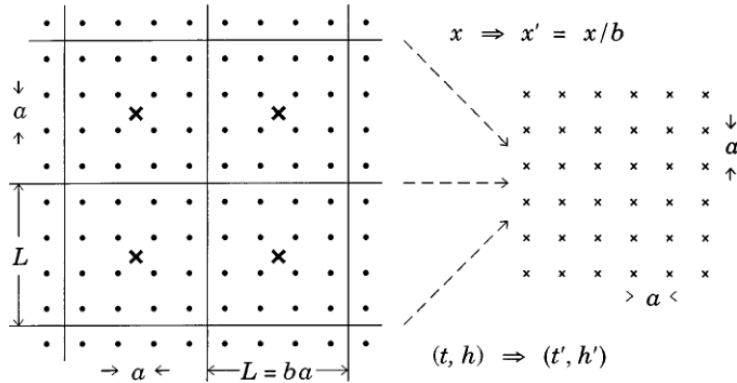


Figure 2: 图中展示了一个晶格常数为 a 的伊辛自旋晶格（在 $d = 2$ 维空间中），自旋 s_x 取值为 ± 1 ，以实心圆点标示。该晶格被划分为若干卡丹诺夫区块（或称单元），每个区块的尺寸为 $(L = ba) \times (L = ba)$ ，内含一个取值为 ± 1 的区块自旋 s'_x ，以十字标示。经过坐标重标度 $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x}/b$ 后，区块自旋构成的新晶格在外观上与原始晶格完全相同。然而，人们假设原始晶格的温度 t 和磁场 h 可以被重整化，从而为重标度后的区块自旋晶格给出恰当的数值 t' 和 h' ：详见正文。在此示意图中，空间重标度因子取为 $b = 4$ 。

常数 $J > 0$ 相互作用，这倾向于让它们保持平行排列[参见式(17)]。于是，在低温下，绝大多数自旋会自发选择同一个方向，要么集体“向上”，要么集体“向下”——这就是自发磁化强度 $m_0(T)$ ，它随温度升高而衰减，直至在临界温度 $T_c > 0$ 处彻底消失，正如式(11)所描述的那样。

现在，施展一个“显微镜缩放”的魔术：将整个晶格切割成一个个互不相交的区块，每个区块是 $L \times L \times \cdots \times L$ 的超立方体，其中 $L = ba$ ，包含 b^d 个原始自旋（见图(2)）。对于中心位于 \mathbf{x}' 的区块 $\mathfrak{B}_{\mathbf{x}'}$ ，我们赋予它一个新的“有效自旋” $s'_{\mathbf{x}'}$ 。接着，对所有空间坐标进行重标度：

$$\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x}/b, \quad (25)$$

奇妙的是，这样一来，新的块自旋晶格在几何形态上竟与原始晶格别无二致——自由度的密度丝毫未变（见图(2)）。

但表象可能具有欺骗性。要让这种几何相似真正成为物理上的自洽，我们必须建立有效自旋间的新耦合常数 J' 与原始耦合 J 之间的桥梁，或者说，将描写有效自旋的重整化后温度偏差 t' 与原始 t 联系起来。同样，重整化磁场 h' 也要与原始场 h 建立对应关系。

为此，卡丹诺夫设定 b 足够大，却又小于关联长度 $\xi(t, h)$ 与晶格常数 a 的比值 ξ/a ；由于 ξ 在临界点处发散，这为我们渐近地任意选择 b 留下了空间。很显然，原晶格的自由能密度 $f(t, h)$ 和重整化后块自旋晶格的自由能密度 $f(t', h')$ 之间满足

$$f(t, h) = b^{-d} f(t', h'). \quad (26)$$

卡丹诺夫敏锐地指出：外磁场 h 与包含 b^d 个自旋的区块总耦合，等价于与区块平均自旋的耦合：

$$\bar{s}_{\mathbf{x}'} \equiv b^{-d} \sum_{\mathbf{x} \in \mathfrak{B}_{\mathbf{x}'}} s_{\mathbf{x}} \equiv \zeta(b) s'_{\mathbf{x}'}, \quad (27)$$

这里求和遍历区块 $\mathfrak{B}_{\mathbf{x}'}$ 内的所有格点 \mathbf{x} ，而与新伊辛块自旋 $s'_{\mathbf{x}'}$ 的“渐近等价性”则由某个“自旋重标度因子” $\zeta(b)$ 来刻画。根据自由能间的关系

$$h \sum_{\mathbf{x} \in \mathfrak{B}_{\mathbf{x}'}} s_{\mathbf{x}} = h' s'_{\mathbf{x}'} \Rightarrow h b^d \bar{s}_{\mathbf{x}'} = h' s'_{\mathbf{x}'}. \quad (28)$$

从而即有

$$h' = b^d \zeta(b) h. \quad (29)$$

类似地，引入温度重标度因子 $\vartheta(b)$ ，我们得到递推关系：

$$t' \approx \vartheta(b)t \quad \text{和} \quad h' \approx b^d \zeta(b) h. \quad (30)$$

相应地，基本关联函数应该按如下方式重整化：

$$G(x; t, h) \equiv \langle s_0 s_{\mathbf{x}} \rangle \approx \langle \bar{s}_0 \bar{s}_{\mathbf{x}'} \rangle \approx \zeta^2(b) G(\mathbf{x}'; t', h'). \quad (31)$$

换言之，当我们在空间上“zoom out”（拉远视角）并积掉 b^{-d} 比例的微观自由度后，系统在渐近意义上竟映射回了自身——尽管是在重整化后的温度和磁场下！这种映射是完备的，所有统计性质都通过相似性相互关联。

然而，一个关键问题悬而未决：如何确定重标度因子 ζ 和 ϑ ？让我们聚焦临界点 $t = h = 0$ 的情形，此时根据式(30)也有 $t' = h' = 0$ 。若采纳实验与理论预期的幂律衰减式，即 $G_c(\mathbf{x}) \sim 1/|\mathbf{x}|^{d-2+\eta}$ ，与(5)式比较，我们很快发现，为了确保两点函数的标度不变性 $\zeta(b)$ 必须是 $b^{-\Delta}$ 。追随卡丹诺夫（1966），自然假设：

$$\zeta(b) = b^{-\Delta} \quad \text{和} \quad \vartheta(b) = b^\lambda, \quad (32)$$

其中两个临界指数 $\Delta = (d - 2 + \eta)/2$ 和 λ 刻画了所研究的相变点，而 b 是一个本质上不受限制的标度参数。从而由(30)式，知

$$t' \approx b^\lambda t \quad \text{和} \quad h' \approx b^{d-\Delta} h. \quad (33)$$

利用在 $t, h \rightarrow 0$ 时自由选择 b 的特权，或者等价地，迭代递推关系式(30)和(31)，我们可以导出所有的标度律。当然，所有临界指数现在都由 Δ 和 λ 决定：例如，将(33)式代入自由能密度的(26)式，即有

$$f(t, h) = b^{-d} f(b^\lambda t, b^{d-\Delta} h). \quad (34)$$

取 $b = t^{-1/\lambda}$ ，则有如下标度关系

$$f(t, h) = t^{d/\lambda} \mathcal{F}(h/t^{(d-\Delta)/\lambda}). \quad (35)$$

式中 $\mathcal{F}(h/t^{(d-\Delta)/\lambda}) \equiv f(1, h/t^{(d-\Delta)/\lambda})$ 。

例如，磁化强度

$$m(t, h) = -\frac{\partial f}{\partial h} = -b^{-d} \frac{\partial h'}{\partial h} \frac{\partial f}{\partial h'} = b^{-\Delta} m(t', h'). \quad (36)$$

若取 $h = 0, t' = 1 \Rightarrow b = t^{-1/\lambda}$ ，则有

$$m(t) = t^{\Delta/\lambda} m(1, 0) \Rightarrow \beta = \Delta/\lambda. \quad (37)$$

若取 $t = 0, h' = 1 \Rightarrow b = h^{1/(\Delta-d)}$ ，则有

$$m(h) = h^{\Delta/(d-\Delta)} m(0, 1) \Rightarrow \delta = (d - \Delta)/\Delta. \quad (38)$$

磁化率 $\chi = \frac{\partial m}{\partial h}$ ，可以算得

$$\chi(t, h) = b^{d-2\Delta} \chi(t', h') \Rightarrow \chi(t) = t^{(2\Delta-d)/\lambda} \chi(1, 0) \Rightarrow \gamma = (d - 2\Delta)/\lambda. \quad (39)$$

再比如在 $h = 0$ 时算比热 $C = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}$ ，得

$$C(t) = b^{-d+2\lambda} C(t', 0) = t^{-(2\lambda-d)/\lambda} C(1, 0) \Rightarrow \alpha = 2 - d/\lambda. \quad (40)$$

再以上临界指数中消去 Δ 和 λ ，则可以得到指数关系

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad \alpha + \beta(\delta + 1) = 2. \quad (41)$$

另外，很显然，关联长度满足

$$\xi(t) = b\xi(t') = t^{-1/\lambda} \xi(1) \Rightarrow \nu = 1/\lambda. \quad (42)$$

通过消去 λ ，不难得到

$$\alpha = 2 - d\nu, \quad \gamma = (2 - \eta)\nu. \quad (43)$$

正因为能自然解释所有这些指数关系，卡丹诺夫的图像因此获得强力支撑：这一关系在 $d = 2$ 伊辛模型中精确成立！而且对于 $d < 4$ 的所有其他可精确求解模型也都成立。更进一步，这一分析还预言了新的指数关系，即所谓的超标度律 $\alpha = 2 - d\nu$ ，它显式地依赖于空间维度。

然而，与此前所有与维度 d 无关的指数关系不同，超标度在经典理论中失效，除非 $d = 4$ 。既然我们知道（对某些模型甚至是严格证明的）经典指

数值在 $d > 4$ 时仍然有效，超标度就不可能普遍成立。显然，卡丹诺夫的图像中缺失了某块关键拼图。

不过，超标度问题并非阻碍卡丹诺夫理论发展的主要拦路虎。真正的困难在于如何论证重标度因子式(30)、(31)、(32)的幂律形式的合理性，特别是如何证明相邻块自旋（如 $s'_{\mathbf{x}'}$ 和 $s'_{\mathbf{x}'+\sigma}$ ）之间真的可以用单个有效重整化耦合 J' 来描述。想象一下，两个相邻的 $L \times L \times L$ 区块（以 $d = 3$ 为例）的界面，每个界面包含 b^2 个强耦合的原始晶格自旋 $s_{\mathbf{x}}$ 。在远低于 T_c 时，这些自旋统统“冻结”在向上或向下状态，此时用单一耦合描述或许尚可；但在 T_c 及以上，这些自旋在多个尺度上剧烈涨落，单个有效自旋耦合似乎远不足以刻画这种内在的复杂性。

此外，卡丹诺夫的图像并未真正揭示普适性的起源：式(32)中的重标度指数 Δ 和 λ 原则上可能因系统而异。威尔逊的重整化群理论不仅回答了“微观细节如何在粗粒化过程中丢失”这一难题，更为普适性提供了自然而然的解释。

4 威尔逊重整化群理论

4.1 重整化群变换的构建

当试图以具体可计算的方式实现卡丹诺夫的标度图像时，必须额外加上一个关键洞察：任何具体物理系统——或其约化哈密顿量 $\mathcal{H}(t, h, \dots)$ ——本质上只是浩瀚哈密顿量空间 \mathbb{H} 中一个低维的子流形。这一视角的重要性远非仅具形式意义。

在卡丹诺夫的图像中，通常假设经“重标度”或“重整化”后，新的重整化哈密顿量应保持原来的形式不变，仅少数参数（如温度 t 与场 h ）发生重整化。然而，这一假设如同危险的紧身衣，除非特例眷顾，否则往往失效。威尔逊的突破正是从这一束缚中“解放”出来——正是这种自由，为系统设计的重整化群变换敞开了大门。

为阐明此点，不妨回顾吉布斯计算配分函数的经典方案（见式(20)）：对所有 N 个自旋变量 $s_{\mathbf{x}}$ 的允许值求和或积分。这一直截了当的计算却极其困难。取而代之，“分而治之”的策略是将 $\{s_{\mathbf{x}}\}$ 划分为两组：第一组 $\{s_{\mathbf{x}}^{\leq}\}$ 包含 $N' = N/b^d$ 个自旋，作为保留的涨落变量；第二组 $\{s_{\mathbf{x}}^{\geq}\}$ 包含

剩余的 $N - N'$ 个自旋，将被积分或求和掉，从而从问题中消去。借鉴卡丹诺夫的块自旋图像，一种自然的选择是对每个 b^d 自旋块中除中心自旋外的所有自旋进行积分。这一被称为“抽点”的过程，保持了平移不变性，构成了“粗粒化”的具体实现。

完成部分求迹后，必然得到一个仅涉及保留自旋的有效哈密顿量 $\mathcal{H}_{\text{eff}}[s^<]$ 。为忠实于原始物理，该有效哈密顿量须通过其玻尔兹曼因子定义。根据统计力学基础，可以直接导出显式公式：

$$e^{-\mathcal{H}_{\text{eff}}[s^<]} = \text{Tr}_{s^>} \left[e^{-\mathcal{H}[s^< \cup s^>]} \right], \quad (44)$$

其中并集 $s^< \cup s^>$ 即原始自旋的完整集合 $s \equiv \{s_{\mathbf{x}}\}$ 。继而通过重标度与重新标记（如式(27)所示）， $s_{\mathbf{x}}^< \Rightarrow s'_{\mathbf{x}'}$ ，得到“重整化哈密顿量” $\mathcal{H}'[s'] \equiv \mathcal{H}_{\text{eff}}[s^<]$ 。形式上，从原来的 $\mathcal{H}[s]$ 到 $\mathcal{H}'[s']$ 的重整化变换可记为：

$$\mathcal{H}'[s'] = \mathbb{R}_b \{ \mathcal{H}[s] \}, \quad (45)$$

其中下标 b 用于追踪空间重标度因子。

值得注意的是，若接着对重整化自旋求迹以完成吉布斯方案，即得到完整的配分函数 $\mathcal{Z}[\mathcal{H}]$ 。因此并无信息损失：重整化哈密顿量完整保留了所有热力学信息。然而经验表明，与其直接从 \mathcal{H}' 计算 \mathcal{Z} ，不如迭代重整化变换，获得一系列重整化哈密顿量 $\mathcal{H}^{(l)}$ ：

$$\mathcal{H}^{(l)} = \mathbb{R}_b[\mathcal{H}^{(l-1)}] = \mathbb{R}_b^l[\mathcal{H}], \quad (46)$$

其中 $\mathcal{H}^{(0)} \equiv \mathcal{H}$ ， $\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}'$ 。正是这些迭代赋予了重整化群变换以半群特性。

如果取 $b = 1 + \epsilon$ ，我们也可以把上面的迭代方程转化成单参微分方程

$$\frac{d}{dl} \mathcal{H}_l = \mathbb{B}[\mathcal{H}_l]. \quad (47)$$

式中 \mathbb{B} 表示某个变换。

然而关键在于：经重标度与重新标记后，微观变量 $\{s'_{\mathbf{x}'}\}$ 虽与原始自旋 $\{s_{\mathbf{x}}\}$ 完全等价，但当着手通过式(44)确定 \mathcal{H}_{eff} 及随后的 \mathcal{H}' 时，立即显现出一个基本事实——不能期望 \mathcal{H}' 重现 \mathcal{H} 的原始形式。

具体考察零磁场下正方晶格上的伊辛自旋（ $s_{\mathbf{x}} = \pm 1$ ），其初始哈密顿量仅含最近邻相互作用，耦合强度为 $K_1 = J_1/k_B T$ 。在最保守的卡丹

诺夫图像中，重整化耦合本应遵循确定的递推关系 $K'_1 = \mathcal{T}_1(K_1)$ ，体现在某个特定函数 $\mathcal{T}(\cdot)$ 中。但实际上， \mathcal{H}_{eff} 必然包含更多非零自旋耦合：次近邻间的 K_2 、第三近邻间的 K_3 ，直至无限高阶。更甚之，四自旋耦合项如 $K_{\square_1 s_{x_1} s_{x_2} s_{x_3} s_{x_4}}$ 也会出现，且涵盖所有可能的四自旋排列；六自旋、八自旋耦合亦然。事实上，晶格上任意 $2m$ 个伊辛自旋的集合 Q （及其平移等价类）都会生成非零耦合常数 K'_Q 并出现在 \mathcal{H}' 中。

唯一的慰藉在于，进一步迭代式(44)的抽点变换（零场下）不会导致更糟的情况。换言之，零场伊辛自旋哈密顿量空间 \mathbb{H}_b 可由所有可能自旋耦合的无限集合 $\{K_Q\}$ 刻画，且在抽点变换下封闭。形式上， \mathbb{R}_b 因此由全套递推关系描述：

$$K'_P = \mathcal{T}_P(\{K_Q\}) \quad (\text{所有 } P). \quad (48)$$

这显然回答了卡丹诺夫原始图像中那些复杂的“跨块面”相互作用的归宿：它们将重整化哈密顿量推出了（过小的）最近邻伊辛模型流形，引入了（无穷多）进一步的耦合。图(3)示意性地描绘了由此产生的局面： $\mathcal{H}'(t', h')$ 的重整化流形通常与原始流形并无重叠。假如我们考虑的不是离散的重重整化群迭代，而是它的连续版本，那么连续的“迭代”过程就生成了图(3)中的流线或“轨迹”。注意，(48)式实际上是一个无穷维动力系统，它的持续迭代会在哈密顿量空间 \mathbb{H} 生成出很多流线。但是，动力系统当然可能出现固定点，比如图(3)中的 \mathcal{H}^* 就是一个临界固定点，因为既有流线流入这个固定点，也有流线从这个固定点流出，而这往往对应相变。更清楚地显示这样的相变图像的是图(4)。

实践中，式(44)指定的朴素抽点变换通常难以成为有效计算的基础。设计实用的重整化群变换与其说是一门科学，不如说是一门艺术：并无标准配方可循。然而，威尔逊阐述的一般哲学提供了指导原则：首先积去对所研究宏观现象“最不直接重要”的微观变量或自由度，同时保留最重要的那些。对于铁磁或气-液临界点，最重要的现象发生在长的长度尺度上——关联长度 ξ 发散；临界关联 $G_c(r)$ 在长距离上缓慢衰减； T_c 以下出现长程有序。

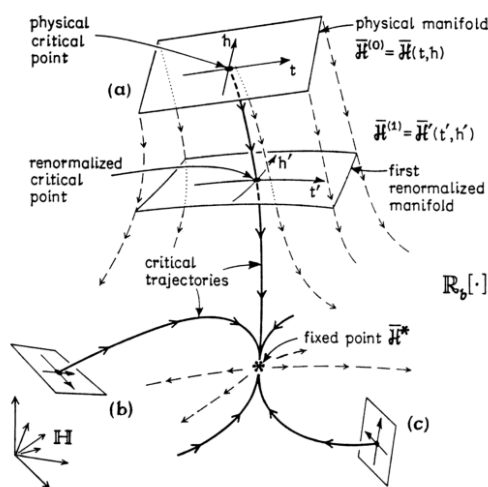


Figure 3: 这是哈密顿量空间 \mathbb{H} 的示意图——其中展示了初始的或物理的流形[标记为(a)、(b)、 \dots 等], 以及由离散RG变换 \mathbb{R}_b (具有空间重标度因子 b)的重复作用、或由相应的连续重整化群所诱导的流动。临界轨迹以粗线显示: 在图示的 \mathbb{H} 区域内, 它们全都终止于一个固定点 \mathcal{H}^* 。一般而言, 完整空间还包含其他非平庸的临界固定点, 描述多临界点和不同的临界点普适类; 此外, 通常还会出现平庸的固定点, 典型的如对应高温相的“汇”(sink), 其没有流出的轨迹。[改绘自Fisher (1983)。]

4.2 流、不动点、普适性与标度

为完善这一理论叙事并填补先前略过的逻辑缺环, 此处需阐明威尔逊于哈密顿量空间 \mathbb{H} 中构建的重整化群变换, 如何使该理论得以解释普适性, 以及原则上如何实现对临界指数的计算。如图(3)所示, 重整化群变换 \mathbb{R}_b 的递归应用在哈密顿量空间 \mathbb{H} 中诱导出一道动力学流。细致观察可见, 那些“明智的”、“合理的”, 或更恰当地说, “设计精良的”重整化群变换具有光滑性, 因此原始物理流形 $\mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{H}(t, h)$ 中彼此靠近的点——例如在温度参数上相近者——经重整化后在 $\mathcal{H}^{(1)} \equiv \mathcal{H}'$ 中依然邻近, 且随着流参数 l 的递增, 在 $\mathcal{H}^{(l)}$ 中始终保持这一邻近性。值得注意的是, 由于空间尺度依 $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x}/b^l$ 重整化, 可将 $l = -\log_b(|\mathbf{x}'|/|\mathbf{x}|)$ 对数式地理解为描述系统的尺度; 然而需注意, 随着“尺度”变更或 l 增大, 哈密顿量的形式

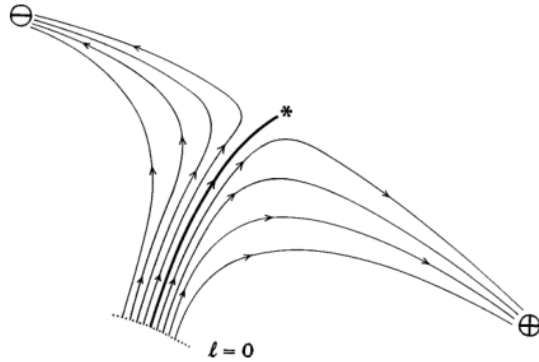


Figure 4: 关于某个大空间中“流”的构想图景。此图传达的观念是：在流的起点——即标记为 $l=0$ 的轨迹处——原本相互接近且平滑相连的点，最终会彼此分离，流向代表截然不同的“终态”的遥远区域：这正是相变的本质所在。用现代术语来说，这一流发生在哈密顿量的空间 \mathcal{H} 中；图中以加粗线条显示的分界线（separatrix）与初始轨迹（ $l=0$ ）的交点即代表物理临界点； $*$ 表示控制性固定点，而 \oplus 和 \ominus 则分别代表渐近的高温无序态和低温有序态。

通常亦随之演化。故而，部分重整化的哈密顿量预期将呈现某种通用的介观形态：这使其成为赋予朗道-金兹堡（现称LGW）有效哈密顿量确切含义的恰当候选者。

鉴于重整化群变换的光滑特质，若已获知第 l 次重整化阶段的自由能密度 $f_l \equiv f[\mathcal{H}^{(l)}]$ ，则原始自由能密度 $f[\mathcal{H}]$ 及其临界行为便随之确定：明确而言，有

$$f(t, h, \dots) \equiv f[\mathcal{H}] = b^{-dl} f[\mathcal{H}^{(l)}] \equiv b^{-dl} f_l(t^{(l)}, h^{(l)}, \dots). \quad (49)$$

此外，光滑性保证了所有普适临界性质在重整化过程中保持守恒。同理，可发现 $\mathcal{H}^{(0)} \equiv \mathcal{H}$ 的临界点映射至 $\mathcal{H}^{(1)} \equiv \mathcal{H}'$ 的临界点，并依此类推，如图(3)中的粗流线所示。因此，追踪 \mathcal{H} 空间中的临界轨迹——即从物理临界点出发的重整化群流线——极具启发意义。原则上，这些轨迹的拓扑结构可能极为复杂，甚至呈现混沌特征；然而实践中，对于设计精良或“贴切”的重整化群变换，最常见的情形是临界流终止——或更精确地说，渐近地停滞——于重整化群的一个不动点(固定点) \mathcal{H}^* ：见图(3)。此类不动

点由方程(46)或(47)简定义为

$$\mathbb{R}_b[\mathcal{H}^*] = \mathcal{H}^* \quad \text{或} \quad \mathbb{B}[\mathcal{H}^*] = 0. \quad (50)$$

不动点何以至关重要？其中某些实则平淡无奇，仅对应于无相互作用或全部自旋冻结等平庸情形。然而非平庸不动点代表着临界态；更有甚者，其临界本质及其邻域内的自由能，必须与所有那些临界轨迹收敛至同一不动点的迥异哈密顿量完全一致！换言之，特定不动点定义了一个普适类，它“统治”或“吸引”所有那些临界点终将映射于其上的系统：见图(3)。

至此，终于获得关于普适性的自然诠释：物理性质迥异的系统，可能仍归属于 \mathbb{R} 中同一不动点 \mathcal{H}^* 的吸引域。不同的流入轨迹反映了它们相关与无关变量的各异物理内涵。

自每个临界不动点至少流出两条“不稳定”或“向外”轨迹。这些轨迹对应于一个或多个**相关变量**，具体而言，对于图(3)和图(4)所示情形，对应于温度或热场 t ，以及磁场或有序场 h 。若存在更多相关轨迹，可预期发生向不同临界行为的交叉。在 \mathbb{R} 空间中，此类轨迹通常导向描述（一般而言）全新普适类的不同不动点。

设计精良的重整化群变换之光滑性意味着，它总可至少在局部展开为泰勒级数。值得强调的是，正是这一性质在临界区的自由能中失效：为重获此能力，庞大的哈密顿量空间至关重要。在满足方程(50)的不动点附近，可相当普遍地期望实现线性化，写作(g 很小)

$$\mathbb{R}_b[\mathcal{H}^* + g\mathcal{Q}] = \mathcal{H}^* + g\mathbb{L}_b\mathcal{Q} + o(g), \quad (51)$$

或微分形式

$$\frac{d}{dl}(\mathcal{H}^* + g(l)\mathcal{Q}) = \frac{d}{dl}(g(l)\mathcal{Q}) = g(l)\mathbb{B}_1\mathcal{Q} + o(g). \quad (52)$$

这里 \mathbb{L}_b 与 \mathbb{B}_1 为线性算符（尽管作用于大空间 \mathbb{R} 上）。因此，可寻求本征值及相应的“本征算符”，例如 \mathcal{Q}_k （这将是“部分哈密顿量”）。于是，有

$$\mathbb{L}_b\mathcal{Q}_k = \Lambda_k(b)\mathcal{Q}_k \quad \text{或} \quad \mathbb{B}_1\mathcal{Q}_k = \lambda_k\mathcal{Q}_k. \quad (53)$$

实际上（由半群性质）本征值必须满足 $\Lambda_k(b) = b^{\lambda_k}$ 。如同任何此类线性问题，了解本征值谱与本征算符，或至少其主导部分，将揭示大量关键信

息。合理推测， Q_k 应构成一般算符的展开之基

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}^* + \sum_{k \geq 1} g_k Q_k. \quad (54)$$

物理上，展开系数 g_k ($= g_k^{(0)}$) 则代表与“临界算符” Q_k 共轭的热力学场，而 Q_k 本身通常接近于某些局域算符的组合。将本征值方程代入(52)即有

$$\frac{d}{dl} g_k(l) = \lambda_k g_k(l). \quad (55)$$

很显然，对于 $\lambda_k > 0$ 的算符，相应扰动将导致流线从临界不动点向外，因此是**相关算符**。反之，对于 $\lambda_k < 0$ 的算符，相应扰动总是被吸向临界不动点，因此这类算符是**无关算符**。对于 $\lambda_k = 0$ 的算符，则称之为**边际算符**。在重整化下，每个 g_k 简单地演化为 $g_k^{(l)} \approx b^{\lambda_k l} g_k^{(0)}$ 。

实际上，在典型临界点问题中，通常可发现两个相关算符，例如 Q_1 与 Q_2 ，具有 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ 。通常，这些算符之一，例如通过其对称性，可被识别为局域能量密度 $Q_1 \cong \mathcal{E}$ ，因而 $g_1 \equiv t$ 为热场；第二个则表征序参量 $Q_2 \cong \psi$ ，其场为 $g_2 \equiv h$ 。

最后，检视自由能的流方程(49)。关键点在于，重整化程度 l 可任意选择得足够大。当 $t \rightarrow 0$ 时，即处于待理解的临界区，明智之选是令 $b^l = 1/|t|^{1/\lambda_1}$ ，其显然发散至 ∞ 。于是发现方程(49)导出如下基本标度关系

$$f_s(t, h, \dots, g_j, \dots) \approx |t|^{\frac{d}{\lambda_1}} \mathcal{F} \left(\frac{h}{|t|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}}, \dots, \frac{g_j}{|t|^{\phi_j}}, \dots \right). \quad (56)$$

其中 $\phi_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_1}$ 。

继而，由于 $\lambda_1 > 0$ ，所以给定 ϕ_j 的符号，从而相应 λ_j 的符号，就决定了相应临界算符 Q_j 及其共轭场 g_j 的相关性。此场可能（但对大多数 j 值并非如此）处于实验的直接控制之下。当不存在边际变量且负得最少的 ϕ_j 之模大于1时，简单的标度描述通常效果良好，卡丹诺夫图像几乎适用，因为这时候，随着 $|t| \rightarrow 0$ ，标度函数 \mathcal{F} 中所有 g_j 变量的贡献都趋于零，从而可以忽略。

4.3 算符乘积展开

重整化群变换相当于不断在空间上“zoom out”（拉远视角）系统，同时平均掉(积掉)小尺度上的微观自由度。所以重整化群变换告诉我们的是如何把关注重心逐步从小的空间尺度转移向大的空间尺度。特别的，在重整化群的不动点位置，由于可以无限地往大尺度走，所以是看不见系统的微观晶格结构的，看到的只能是连续的场，在固定点 \mathcal{H}^* 处求配分函数就相当于以玻尔兹曼因子 $e^{-\mathcal{H}^*}$ 为权重对连续的场进行泛函积分，这对应的是一个连续的欧几里德空间量子场论，它以 \mathcal{H}^* 为欧空间作用量，有时候也记作 S_* 。而且，由于固定点在重标度下不变，所以固定点处的这个量子场论还得有标度不变性，或者说尺度不变性，即在空间尺度的放缩下保持不变。

因此，在固定点附近，可以按照标度量纲来将局域场算符分类。根据(5)式，对于标度量纲为 Δ_i 的局域场算符 \mathcal{O}_i (它可能是个复合算符)，我们有关联函数

$$\langle \mathcal{O}_i(\mathbf{x}) \mathcal{O}_i(0) \rangle = \frac{D}{|\mathbf{x}|^{2\Delta_i}}. \quad (57)$$

现在，考虑两个不同空间点上算符的乘积， $\mathcal{O}_i(\mathbf{x}_1) \mathcal{O}_j(\mathbf{x}_2)$ ，当 $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2$ 时 $\mathcal{O}_i(\mathbf{x}_1)$ 对 $\mathcal{O}_j(\mathbf{x}_2)$ 作用的结果就相当于对后者进行了一个算符空间的变换，变换的结果当然依然是一个 \mathbf{x}_2 位置处的算符，因此可以把变换的最终结果按照 $\mathcal{O}_k(\mathbf{x}_2)$ 进行展开，即有

$$\mathcal{O}_i(\mathbf{x}_1) \mathcal{O}_j(\mathbf{x}_2) = c_{ij}^k(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \mathcal{O}_k(\mathbf{x}_2), \quad (58)$$

式中重复的指标要默认求和(下文同)。展开系数 $c_{ij}^k(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ 包含所有短距离的奇异行为。

为了确定这些系数，我们考虑标度变换 $\mathcal{O}(\mathbf{x}) \rightarrow b^\Delta \mathcal{O}(b\mathbf{x})$ 。将这样的标度变换作用在(58)式的两边，即有

$$b^{\Delta_i + \Delta_j} \mathcal{O}_i(b\mathbf{x}_1) \mathcal{O}_j(b\mathbf{x}_2) = b^{\Delta_k} c_{ij}^k(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \mathcal{O}_k(b\mathbf{x}_2). \quad (59)$$

另一方面

$$\mathcal{O}_i(b\mathbf{x}_1) \mathcal{O}_j(b\mathbf{x}_2) = c_{ij}^k(b(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) \mathcal{O}_k(b\mathbf{x}_2). \quad (60)$$

两个式子比较，即有

$$c_{ij}^k(b(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) = b^{\Delta_k - \Delta_i - \Delta_j} c_{ij}^k(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \quad (61)$$

这一定是下面这样的齐次函数

$$c_{ij}^k(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \frac{c_{ij}^k}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k}}. \quad (62)$$

代入前面的(58)式，立即有

$$\mathcal{O}_i(\mathbf{x}_1)\mathcal{O}_j(\mathbf{x}_2) = \frac{c_{ij}^k}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k}} \mathcal{O}_k(\mathbf{x}_2), \quad \text{当 } \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2. \quad (63)$$

这就是具有标度不变性的量子场论所必须满足的算符乘积展开关系。它描述的是标度不变量子场论的短距离结构。

4.4 固定点附近的重整化群流

假定我们有一个欧空间量子场论，它的作用量是 $S(a)$ ，由于欧空间量子场论就相当于对连续场变量的吉布斯统计力学，所以 $S(a)$ 也相当于这个统计力学中的有效哈密顿量 $\mathcal{H}(a)$ ，其中 a 是定义这个理论所需的一个尺度，比方说如果这个理论是定义在格点上，那么 a 就是格距。现在我们改变 a ，将之变为 \tilde{a} ，并重标度理论，同时调节理论的耦合常数，使得作用量变为 $S(\tilde{a})$ 。重整化群变换的要求是，用新尺度 \tilde{a} 和新作用量 $S(\tilde{a})$ 算出来的关联函数依然和原来用 $S(a)$ 算出来的一样。特别的，在重整化群变换下，配分函数 \mathcal{Z} 应该保持不变。重整化群的固定点就是这样一种特别的作用量 S_* （相当于前面的 \mathcal{H}^* ），它满足

$$S_*(\tilde{a}) = S_*(a). \quad (64)$$

我们这一节要研究的就是固定点附近的重整化群流。考察对固定点理论 $S_*(a)$ 的一个扰动，

$$S_* \rightarrow S = S_* + \int (d^d x) g_i a^{\Delta_i - d} \mathcal{O}_i, \quad (65)$$

式中 \mathcal{O}_i 是一个标度量纲为 Δ_i 的算子， a 是定义理论的尺度，把因子 $a^{\Delta_i - d}$ 单独写出来，是为了确保只需要重标度 a 就能实现对理论的重标度。 g_i 是无量

纲的耦合常数，是一个小扰动，因子 a^{Δ_i-d} 也确保了整个扰动项无量纲。当然，我们默认对 i 求和。那么理论的配分函数近似就是，

$$\mathcal{Z} = \text{Tr}(e^{-S}) = \mathcal{Z}_* \left(- \int (d^d x) g_i a^{\Delta_i-d} \langle \mathcal{O}_i \rangle \right) + \mathcal{Z}_* \left(\frac{1}{2} \int \int_{|x_1-x_2|>a} (d^d x_1)(d^d x_2) g_i g_j a^{\Delta_i+\Delta_j-2d} \langle \mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) \rangle \right), \quad (66)$$

式中 $\mathcal{Z}_* = \text{Tr}(e^{-S_*})$ 是固定点理论的配分函数。由于我们定义理论的尺度是 a ，因此在积分时我们要求两个不同点之间的距离大于 a ，即 $|x_1 - x_2| > a$ 。

现在我们改变定义理论的尺子至 \tilde{a} ，为了保持配分函数不变，我们同时调节耦合常数 $g_i \rightarrow \tilde{g}_i$ ，则

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}_* \left(- \int (d^d x) \tilde{g}_i \tilde{a}^{\Delta_i-d} \langle \mathcal{O}_i \rangle \right) + \mathcal{Z}_* \left(\frac{1}{2} \int \int_{|x_1-x_2|>\tilde{a}} (d^d x_1)(d^d x_2) \tilde{g}_i \tilde{g}_j \tilde{a}^{\Delta_i+\Delta_j-2d} \langle \mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) \rangle \right). \quad (67)$$

下面我们考虑一个无穷小的尺度变换 $\tilde{a} = (1 + \epsilon)a$ ，即取重标度的尺度 $b = 1 + \epsilon$ ， ϵ 是一个无穷小量。利用算子乘积展开

$$\mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) \sim \frac{1}{|x_1 - x_2|^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}} c_{ij}^k \mathcal{O}_k(x_2), \quad (68)$$

我们有

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}_* \left(- \int (d^d x) \tilde{g}_i \tilde{a}^{\Delta_i-d} \langle \mathcal{O}_i \rangle \right) + \mathcal{Z}_* \left(\frac{1}{2} \int \int_{|x_1-x_2|>\tilde{a}} (d^d x_1)(d^d x_2) \tilde{g}_i \tilde{g}_j \tilde{a}^{\Delta_i+\Delta_j-2d} \frac{c_{ij}^k \langle \mathcal{O}_k(x_2) \rangle}{|x_1 - x_2|^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}} \right). \quad (69)$$

上式后一项括号中的部分显然可以写成

$$\frac{1}{2} \int \int_{|x_1-x_2|>a} (d^d x_1)(d^d x_2) \tilde{g}_i \tilde{g}_j \tilde{a}^{\Delta_i+\Delta_j-2d} \langle \mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) \rangle - \frac{1}{2} \int \int_{(1+\epsilon)a>|x_1-x_2|>a} (d^d x_1)(d^d x_2) \tilde{g}_i \tilde{g}_j \tilde{a}^{\Delta_i+\Delta_j-2d} \frac{c_{ijk} \langle \mathcal{O}_k(x_2) \rangle}{|x_1 - x_2|^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}}. \quad (70)$$

保留到一阶无穷小，上式的第二项就是

$$-\frac{1}{2} S_d \epsilon \int (d^d x) g_i g_j a^{\Delta_k-d} c_{ijk} \langle \mathcal{O}_k \rangle, \quad (71)$$

式中 S_d 表示 d 维空间中 $d - 1$ 维单位球面的面积。因此，我们就有

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Z}} = & \mathcal{Z}_* \left[- \int (d^d x) \left(\tilde{g}_k (1 + \epsilon)^{\Delta_k - d} + \frac{1}{2} S_d \epsilon g_i g_j c_{ijk} \right) a^{\Delta_k - d} \langle \mathcal{O}_k \rangle \right] + \\ & \mathcal{Z}_* \left(\frac{1}{2} \int \int_{|x_1 - x_2| > a} d^d x_1 d^d x_2 \tilde{g}_i \tilde{g}_j (1 + \epsilon)^{\Delta_i + \Delta_j - 2d} a^{\Delta_i + \Delta_j - 2d} \langle \mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) \rangle \right). \end{aligned}$$

显然,为了保持配分函数不变,即为了保证 $\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}$,我们应该将 \tilde{g}_i 取成

$$\tilde{g}_k = g_k (1 + \epsilon)^{d - \Delta_k} - \epsilon \frac{1}{2} S_d g^i g^j c_{ijk}, \quad (72)$$

这里我们精确到一阶无穷小。也即是说,我们有重整化群流

$$\begin{aligned} \frac{dg_k}{d\epsilon} &= (d - \Delta_k) g_k - \frac{1}{2} S_d g^i g^j c_{ijk} \\ &= - \frac{\partial}{\partial g_k} \left(\frac{1}{2} (\Delta_i - d) g_i^2 + \frac{1}{3!} S_d c^{ijk} g_i g_j g_k \right). \end{aligned} \quad (73)$$

从上面的重整化群流方程我们很容易看出,对于 $\Delta_k > d$ 的扰动,重整化群固定点是稳定的,也就是说在这个扰动方向上重整化群流指向固定点,这样的扰动我们称之为无关扰动。然而,对于 $\Delta_k < d$ 的那些扰动方向,重整化群流的流向是背离固定点的,这是一些不稳定的扰动方向,这样的扰动称之为相关扰动。用前面小节的话来说即是,线性化之后的本征值 $\lambda_k = d - \Delta_k$ 。

4.5 重整化群方程

前面我们讲过,重整化变换就是积去小尺度短程自由度。有时候我们也将这样的操作说成是从物理上忽视短程自由度,它有点像我们给一副图片打码赛克,使得图片的某些细节被忽视。物理上系统地进行这种操作的办法是将“图片”进行缩放。我们总可以通过将“图片”不断缩小,从而把打码的像素缩小成基本像素单位,进而看到整幅图片越来越宏观的结构。在重整化变换中即是,我们总可以通过不断重标度(即缩小),从而把浮动的截断尺度 a 化约为1个基本单位,从而得到大尺度的有效理论,当然,这么做的代价是会引入放大倍率 e^{-l} (即缩小)(即取 $b = e^l$)。这一节我们就来研究,系统的关联函数如何随着这个缩放倍率的变化而变化,这就叫做重整化群方程。

假设我们考察的量子场论系统有一组局域的可观测量算符 $\mathcal{O}_i(x)$ ，它们的标度量纲分别为 Δ_i ，当我们将这个量子场论系统放大 e^{-l} 倍时(即缩小)， $\mathcal{O}_i(x)$ 将变为 $\mathcal{O}'_i(x)$ ，由于缩小系统会使得能量密度更大，所以我们应该有如下算符混合关系，

$$\mathcal{O}_i(x) \simeq e^{-l\Delta_i} \mathcal{O}'_i(e^{-l}x). \quad (74)$$

等价地，我们也可以将这个方程写成

$$\mathcal{O}_i(e^l x) \simeq e^{-l\Delta_i} \mathcal{O}'_i(x). \quad (75)$$

这里我们没有写等于号，而是用的 \simeq 号，这是因为定义加撇算符的理论和定义不加撇算符的理论其实不是一回事，两者之间相差一个重整化，下面我们会进一步澄清这一点。

对于一个量子场论而言，假设基本场变量为 ϕ ，欧氏作用量为 S ，那么量子场论的关键在于计算泛函积分 $\text{Tr}(e^{-S}) \equiv \int [\mathcal{D}\phi] e^{-S}$ ，比方说，在计算关联函数时，我们就是要计算这样的泛函积分。因此，一个关键的问题是，当我们将量子场论系统放大 e^{-l} 倍时，这个泛函积分会怎么变？换言之，我们得搞清楚理论本身如何重整化。

这里出现一个关键的问题，即实际上，当我们说把量子场论系统放大 e^{-l} 倍(即缩小)时，我们实际在物理上并不能真正做到这一点，我们实际上做的只是离这个系统远一点，在更远的地方来观测这个系统从而使得自己能够忽略一些小尺度细节而已。换句话说，我们实际上是在用一把更大的尺子来衡量这个系统。或者说在重整化过程中，系统中各点的物理距离是不变的，将坐标距离放大 e^{-l} 倍(即缩小)必然同时要将尺子放大 e^l 倍。物理系统的尺子就反映为度规张量，所以，将量子场论系统的坐标距离放大 e^{-l} 倍必然同时要将度规张量 h 放大 e^{2l} 倍，即同时进行如下变换

$$h \rightarrow e^{2l}h. \quad (76)$$

式中 h 为度规张量，其用指标写出来的分量形式为 h_{ab} 。

根据上面的分析我们就能写出关联函数的基本缩放(重整化)方程

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{O}_1(e^l x_1) \mathcal{O}_2(e^l x_2) \dots \mathcal{O}_n(e^l x_n) \rangle_h \\ &= e^{-(\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n)l} \langle \mathcal{O}'_1(x_1) \mathcal{O}'_2(x_2) \dots \mathcal{O}'_n(x_n) \rangle_{e^{2l}h}. \end{aligned} \quad (77)$$

$\langle \dots \rangle_h$ 表示计算相应的泛函积分时，作用量中的时空度规取作 h ，也即是说， $\langle \dots \rangle_h$ 意味着理论是定义在度规为 h 的黎曼流形上。注意，与度规 $e^{2l}h$ 对应的算子都是加撇的，因为根据以上所说，算子加撇和度规放大为 $e^{2l}h$ 是同步的，两者一起就是所谓的重整化变换。下面我们就是要从这个方程(77)出发，得到关联函数在缩放下满足的关于 l 的微分方程。

首先我们注意到，在经典物理的层次上，对于欧氏作用量 S ，它在度规变动 δh_{ab} 下满足 $\delta S = - \int_M \frac{1}{2} T^{ab} \delta h_{ab}$ ， T^{ab} 就是经典的能动量张量¹， \int_M 表示在时空流形上积分。我们关心的度规无穷小变动是度规 $e^{2l}h_{ab}$ 在 l 作无穷小改变时引起的，这时候在经典物理的层次上必有 $\delta_l S = \frac{\partial S}{\partial l} = - \int_M T_a^a(l)$ ， $T_a^a(l)$ 表示定义在度规 $e^{2l}h_{ab}$ 上的能动量张量的缩并。为此，我们可以假设在量子的层次上，在 l 做无穷小变动时，作用量和泛函积分测度 $[D\phi]e^{-S}$ 的变动为

$$\int_M T'(l), \quad (78)$$

式中 $T'(l)$ 为前面 $T_a^a(l)$ 的量子版本，是一个算符。

根据上一段的分析我们容易知道，当我们将方程(77)中的 l 作无穷小变动时，必有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial l} \langle \mathcal{O}_1(e^l x_1) \mathcal{O}_2(e^l x_2) \dots \mathcal{O}_n(e^l x_n) \rangle_h \\ &= - (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n) \langle \mathcal{O}_1(e^l x_1) \mathcal{O}_2(e^l x_2) \dots \mathcal{O}_n(e^l x_n) \rangle_h \\ & \quad + e^{-(\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n)l} \langle \mathcal{O}'_1(x_1) \mathcal{O}'_2(x_2) \dots \mathcal{O}'_n(x_n) \int_M T'(l) \rangle_{e^{2l}h}. \end{aligned} \quad (79)$$

下面假设 $\int_M T'(l)$ 可以用局域算子 \mathcal{O}'_i 展开成

$$\int_M T'(l) = \sum'_i \int_M \beta^i(g) \mathcal{O}'_i(x), \quad (80)$$

求和号中的'号表示我们仅仅对标度量纲小于等于时空维数 d 的算子求和，因为能动量张量的标度量纲不能超过 d 。另一方面，我们也可以将度规 $e^{2l}h$ 上的有效作用量用局域算子展开为

$$S = \sum'_i g_i \int_M \mathcal{O}'_i(x). \quad (81)$$

¹这个结果的正负号不用死记，取一个标量场论算一下就知道了。

同样，由于我们关心的是长程物理，所以我们仅仅只需要关心相关算子，或者说可重整项。上式中的 g_i 是一个一般性的记号，它包括相互作用耦合常数以及质量等等参数。由此我们可以知道，方程(79)可以重写成

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial l} \langle \mathcal{O}_1(e^l x_1) \mathcal{O}_2(e^l x_2) \dots \mathcal{O}_n(e^l x_n) \rangle_h \\ &= - (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n) \langle \mathcal{O}_1(e^l x_1) \mathcal{O}_2(e^l x_2) \dots \mathcal{O}_n(e^l x_n) \rangle_h \\ & \quad - e^{-(\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n)l} \sum_i' \beta^i(g) \frac{\partial}{\partial \lambda^i} \langle \mathcal{O}'_1(x_1) \mathcal{O}'_2(x_2) \dots \mathcal{O}'_n(x_n) \rangle_{e^{2l}h}. \end{aligned} \quad (82)$$

将加撇算符变回不加撇算符，简单整理一下即有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial l} \langle \mathcal{O}_1(e^l x_1) \mathcal{O}_2(e^l x_2) \dots \mathcal{O}_n(e^l x_n) \rangle_h \\ &= - (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n) \langle \mathcal{O}_1(e^l x_1) \mathcal{O}_2(e^l x_2) \dots \mathcal{O}_n(e^l x_n) \rangle_h \\ & \quad - \sum_i' \beta^i(g) \frac{\partial}{\partial g_i} \langle \mathcal{O}_1(e^l x_1) \mathcal{O}_2(e^l x_2) \dots \mathcal{O}_n(e^l x_n) \rangle_h. \end{aligned} \quad (83)$$

这就是我们要推导的**重整化群方程**。

如果不用度规的办法进行重整化，而像前面的小节一样认为重整化就是调节耦合常数 g_i ，因此它是一个依赖于 l 的 $g_i(l)$ ，则我们还有

$$\frac{dg_i}{dl} = -\beta^i(g). \quad (84)$$

可见， $\beta^i(g)$ 就是通常所说的Beta函数。只不过我们这里的 l 是对长度尺度的放大倍率，而不是对能量尺度的放大倍率，所以Beta函数的方程(84)多了一个负号。

5 临界指数的计算

5.1 经典平均场理论

能给出具体临界指数的最简单办法就是朗道的平均场理论，虽然它给出的临界指数是错的，但不失为一个好的起点。本节以伊辛铁磁体为例讨论朗道平均场论。

首先，自由能 F 是序参量场 $m(\mathbf{x})$ 的泛函 $F[m(\mathbf{x})]$ (或者也可以称作有效哈密顿量)。朗道-金兹堡假设这个泛函可以解析地进行泰勒展开，不过，由于 $m(\mathbf{x})$ 可以随空间变化，所以我们要在展开中包含 $m(\mathbf{x})$ 的空间梯度项，忽略无关的常数项，这个展开即是

$$F[m(\mathbf{r})] = \int d^d \mathbf{x} \left[\frac{1}{2} b(t) m^2(\mathbf{x}) + \frac{1}{4} c(t) m^4(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} (\nabla m(\mathbf{x}))^2 + \dots \right] \quad (85)$$

式中，通过合适地将一个常数系数吸收到 $m(\mathbf{x})$ 的定义中，我们已经把 $\frac{1}{2}(\nabla m(\mathbf{x}))^2$ 项的系数归一化为1了。由于微观相互作用有 \mathbf{Z}_2 对称性，自由能作为 m 的函数必定会保持这种对称性，因此我们已经要求 $F[m(\mathbf{x})]$ 在 $m \rightarrow -m$ 的 \mathbf{Z}_2 变换下保持不变了，这也就相当于要求 $F[m(\mathbf{x})]$ 是 m 的偶函数，所以上述展开式中没有 m 的奇次项。上述表达式忽略了高于四次的泰勒展开项，因为在临界点附近，自发磁化的 m 其实是小量，四次以上的项太小而可以忽略，而且，正如我们马上会看到的，保留到四次项已经足以解释连续相变的临界行为了。

自由能极小的条件现在变成了泛函 $F[m(\mathbf{x})]$ 对 $m(\mathbf{x})$ 的变分求极小。不难求出

$$\delta F = \int d^d \mathbf{x} \left[b(t) m(\mathbf{x}) + c(t) m^3(\mathbf{x}) - \nabla^2 m(\mathbf{x}) + \dots \right] \delta m(\mathbf{x}). \quad (86)$$

式中我们进行了分部积分，并丢掉了边界项(假设边界上的变分 $\delta m(\mathbf{x})$ 为零)。由 $\delta F = 0$ ，即可以得

$$b(t) m(\mathbf{x}) + c(t) m^3(\mathbf{x}) - \nabla^2 m(\mathbf{x}) = 0. \quad (87)$$

上面这个方程当然不止一个解，其中最简单的解是 $m(\mathbf{x})$ 取常数 m ，这时候方程变成

$$[b(t) + c(t) m^2] m = 0. \quad (88)$$

注意到临界温度以上，即 $t > 0$ 时，没有自发磁化，物理上序参量只能取 $m = 0$ ，且这个 $m = 0$ 要使 $F[m]$ 取极小值，因此朗道假设 $t > 0$ 时， $b(t) > 0, c(t) > 0$ ，否则要么 $m = 0$ 不是极小，要么上述方程还存在 $m \neq 0$ 的解。同样， $t < 0$ 时，物理上要求 $m \neq 0$ ，因此上述 $m = 0$ 的解必定不是 $F[m]$ 的极

小值，这就要求 $t < 0$ 时， $b(t) < 0$ ，进一步要求上述方程存在 $m \neq 0$ 的解，因此必定还有 $t < 0$ 时， $c(t) > 0$ 。此时这个非零的 m 解为

$$m = \pm m_0 \quad \text{其中 } m_0 = \sqrt{-\frac{b(t)}{c(t)}}, \quad (89)$$

\pm 号表示这时候向上磁化和向下磁化均有可能，虽然实际的物理系统只会随机取其中一种磁化。 $b(t) > 0$ 时，自由能密度 $f(m) = F[m]/V$ 的函数图像如图(5)所示，而 $b(t) < 0$ 时，自由能密度 $f(m)$ 的函数图像如图(6)所示。

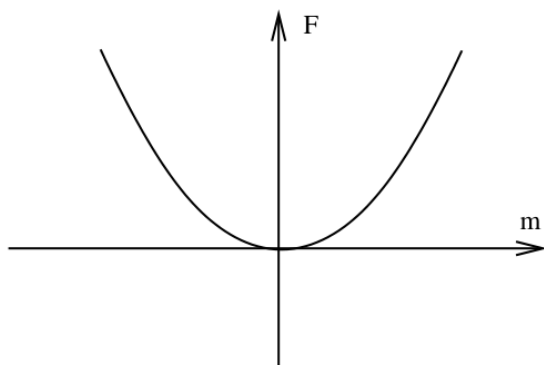


Figure 5: $b(t) > 0$ 时，自由能密度 $f(m)$ 的函数图像

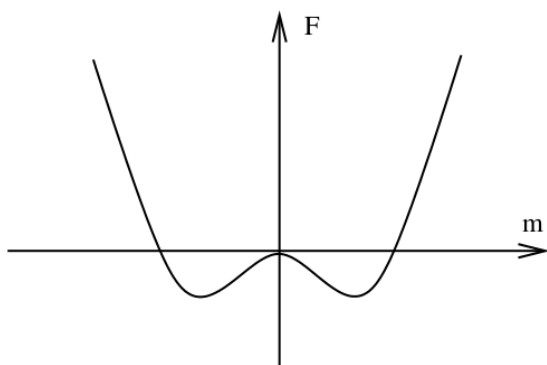


Figure 6: $b(t) < 0$ 时，自由能密度 $f(m)$ 的函数图像

朗道理论清楚地把序参量由零变成非零的过程与对称性自发破缺联系起来。首先，理论本身具有 \mathbf{Z}_2 对称性，因为自由能函数在 $m \rightarrow -m$ 的 \mathbf{Z}_2 变换下保持不变。其次， $t > 0$ 时，自由能函数只有 $m = 0$ 这一个极小值，它本身就是 \mathbf{Z}_2 不变的。但是， $t < 0$ 时， $m = 0$ 不再是极小值，而是局部极大值，相反，这时候极小值分裂成了两个，分别在 $\pm m_0$ 。虽然这两个极小值是 \mathbf{Z}_2 对称的，但是，只看其中一个的话，每一个都没有 \mathbf{Z}_2 对称性，而真实的系统只能选取两个极小值中的一个，但只要选取了一个，那么 \mathbf{Z}_2 对称性就自发破缺了。

综合以上分析(特别要注意 $b(t)$ 在 $t > 0$ 和 $t < 0$ 时要改变正负号而 $c(t)$ 则不变号)，朗道假设在临界点附近，参量 $a(t), b(t), c(t)$ 可以泰勒展开成

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 + a_1 t + \cdots \\ b(t) &= b_0 t + \cdots \quad \text{其中 } b_0 > 0 \\ c(t) &= c_0 + c_1 t + \cdots \quad \text{其中 } c_0 > 0 \end{aligned} \quad (90)$$

由此立即可以得到沿着相界线趋于临界点时磁化强度 $m(t)$ 的临界行为

$$m(t) = m_0 \sim (-t)^{1/2}. \quad (91)$$

这就是前面所说的，经典平均场论预言 $\beta = 1/2$ 的来源，当然这个结果与实验是不吻合的，但是，稍微想想你就明白了，它是具有普适性的。

为了进一步研究经典平均场论的临界指数。我们引入外磁场 h ，由于外磁场和自旋磁矩的耦合，此时自由能密度将成为

$$f(m) = -hm + \frac{1}{2}b(t)m^2 + \frac{1}{4}c(t)m^4 + \cdots \quad (92)$$

自由能极小的条件将告诉我们

$$h = [b(t) + c(t)m^2]m. \quad (93)$$

当我们从高温趋于临界点时，前面已经看到，磁化强度一直是零，这一点当外磁场很弱时只有很弱的修正，因此可以忽略(93)式中的 m^3 次方项，进而可以计算磁化率 $\chi(t)$ 如下

$$h \approx b(t)m \Rightarrow \chi(t) \equiv \frac{\partial m}{\partial h} \sim 1/b(t) \sim t^{-1}. \quad (94)$$

也即是说，对于伊辛类，从经典平均场论可以得到 $\gamma = 1$ ，这当然也是不对的。

回到方程(87)的一般情况。朗道-金兹堡理论最重要的应用之一，是理解系统在空间不同点上涨落之间的关联。具体来说，假设我们在空间某点——比如说 $\mathbf{x} = 0$ 的原点处——加上一个无限尖锐的外磁场 $h(\mathbf{x}) = \epsilon\delta^d(\mathbf{x})$ (式中 ϵ 为小量， $\delta^d(\mathbf{x})$ 为 d 维delta函数)来扰动它，以激发起当地的磁化强度，我们想知道这对别处的磁化强度会产生什么影响？加了这样的一个外磁场扰动以后，原来的自由能泛函就要多加上一项，即 $\int d^d\mathbf{x}[-m(\mathbf{x})h(\mathbf{x})] = \int d^d\mathbf{x}[-m(\mathbf{x})\epsilon\delta^d(\mathbf{x})]$ 。进而变分求自由能极小时对应的方程就是

$$b(t)m(\mathbf{x}) + c(t)m^3(\mathbf{x}) - \nabla^2 m(\mathbf{x}) = \epsilon\delta^d(\mathbf{x}). \quad (95)$$

假设温度低于临界值，即 $t < 0$ ，且扰动前系统原本处在 $m(\mathbf{x}) = m_0 = \sqrt{-\frac{b(t)}{c(t)}}$ 的极小值处，外磁场把系统扰动到了

$$m(\mathbf{x}) = m_0 + \delta m(\mathbf{x}), \quad (96)$$

式中扰动 $\delta m(\mathbf{x})$ 是小量。代入(95)式，并保留到扰动 $\delta m(\mathbf{x})$ 的线性阶，即有

$$\begin{aligned} (b(t) + 3c(t)m_0^2)\delta m(\mathbf{x}) - \nabla^2 \delta m(\mathbf{x}) &= \epsilon\delta^d(\mathbf{x}) \\ \Rightarrow -2b(t)\delta m(\mathbf{x}) - \nabla^2 \delta m(\mathbf{x}) &= \epsilon\delta^d(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (97)$$

这个方程的解是

$$\delta m(\mathbf{x}) \sim \frac{e^{-|\mathbf{x}|/\xi(t)}}{|\mathbf{x}|^{d-2}} \quad (98)$$

这个解其实就是前面的两点函数 $G(\mathbf{x})$ ，从这里很容易读出经典理论的结果 $\eta = 0$ 。式中 $\xi(t)$ 为

$$\xi(t) = \sqrt{\frac{1}{-2b(t)}}. \quad (99)$$

$\xi(t)$ 的含义是，原点处外磁场扰动的效应在离原点远大于 $\xi(t)$ 的距离上会迅速衰减为零，因此通常称 $\xi(t)$ 为关联长度。

不难看出，沿着相界线趋于临界点时，关联长度的临界行为是

$$\xi(t) \sim (-t)^{-1/2}, \quad (100)$$

特别的，这意味着，在临界点附近，关联长度会发散。换言之，在临界点附近，序参量的涨落会在长程上保持关联。正是因为这种长程关联，使得气液相变临界点对光的散射会增强，从而使得原来透明的气体或者液体，在接近临界点时变得浑浊起来，呈现一片乳白色，这就是气液临界点附近的临界乳光现象。

朗道理论给出来的这些临界指数与实验不吻合。问题出在，我们忽略了在不同的空间局部上，序参量可以有涨落，在算配分函数时，要对所有这些序参量涨落进行泛函积分，而不是仅仅求一个泛函极小值就可以了。尤其在临界点附近，序参量的涨落将变得非常强，而且长程关联，平均场近似此时是失效的。不过，如何系统地考虑序参量的涨落并不是一件简单的事情。这个困难最终是威尔逊通过他的重整化群计算解决的。

5.2 积去小尺度自由度

重整化群实际上是一个关于如何处理多尺度多自由度系统的纲领，重整化变换的物理实质就是积去小尺度的短程自由度，这样的操作之所以起作用是基于两个基本的观察：第一，小尺度短程自由度对于更大尺度的长程物理是有影响的，第二，但是只要合适地选取表达理论的变量，那么这个影响就可以用几个相关参数来概括，几个参数就可以概括小尺度的所有相关信息，至于短程结构的更多细节信息则与大尺度物理无关。因此，通过积去短程自由度你就能忽略小尺度结构的无关细节，得到一个与你所关心的尺度的物理密切相关的有效理论。的确，有效场论的有效二字可以理解成无效的反义词，它暗示说如果你的理论与你所要考察的物理不在同一尺度上，那么你的理论就是一种徒劳。下面我们就一个具体的算例来看看通过积去小尺度短程自由度进而得到有效理论这个操作可以如何进行。

考虑到对序参量涨落的泛函积分以后，朗道平均场理论中的自由能泛函就成为一个欧氏量子场论的有效作用量。为此，不妨考察一个定义在 d 维欧空间的标量场论，场变量为 $\phi(x)$ ，你可以将它理解为上一小节的磁化强度 $m(\mathbf{x})$ 。根据朗道平均场理论的自由能展开可知，在截断尺度 a ，它的有

效作用量(自由能泛函)可以写成(写法和上一小节看起来不同, 实际上一样的)

$$S(a) = \int d^d x \left(\frac{1}{2} (\partial_i \phi \partial_i \phi + t a^{-2} \phi^2) + \frac{1}{4!} g a^{d-4} \phi^4 \right), \quad (101)$$

式子明显地写出尺度 a 相关的因子 a^{-2} 和 a^{d-4} , 是为了保证我们只需重标度 a 就能实现对理论的重标度, 同时这两个因子也确保了相应的项无量纲。式中的 t 和 g 是无量纲的耦合常数(t 可以理解为约化温度或者说热场), 我们就是要研究它们如何依赖于重整化尺度 a 。为此, 我们考虑一个更长一点的临近尺度 $\tilde{a} = a(1 + \epsilon)$, 即取重标度尺度 $b = 1 + \epsilon$, ϵ 是一个无穷小量。根据定义, 在截断尺度 \tilde{a} 上的理论当然应该是

$$S(\tilde{a}) = \int d^d x \left(\frac{1}{2} (\partial_i \phi \partial_i \phi + \tilde{t} \tilde{a}^{-2} \phi^2) + \frac{1}{4!} \tilde{g} \tilde{a}^{d-4} \phi^4 \right). \quad (102)$$

重整化的物理实质相当于说, $S(\tilde{a})$ 可以通过在 $S(a)$ 的基础上积去波长在 $\lambda \in [a, a(1 + \epsilon)]$ 区间之内的自由度而得到。我们不妨以 ϕ 来表示波长比 $a(1 + \epsilon)$ 更长的自由度, 而以 $\eta(x)$ 来表示波长在 $\lambda \in [a, a(1 + \epsilon)]$ 之内的自由度, 因此 $S(a)$ 中的场就应该替换成 $\phi + \eta$, 这样一来, 重整化群的物理实质就相当于说

$$e^{-S(\tilde{a})} = \int [d\eta] e^{-S(a)}. \quad (103)$$

根据自由度按波长的这种分解, 我们可以将 $S(a)$ 重写成

$$\begin{aligned} S(a) = & \int d^d x \left(\frac{1}{2} (\partial_i \phi \partial_i \phi + t a^{-2} \phi^2) + \frac{1}{4!} g a^{d-4} \phi^4 \right) \\ & + \int d^d x \left(\partial_i \eta \partial_i \phi + t a^{-2} \eta \phi + \frac{1}{3!} g a^{d-4} \phi^3 \eta \right) \\ & + \frac{1}{2} \int d^d x \left(\partial_i \eta \partial_i \eta + t a^{-2} \eta^2 + \frac{1}{2} g a^{d-4} \phi^2 \eta^2 \right). \end{aligned} \quad (104)$$

这个式子中 η 的线性项取 $\int d^d x A(x) \eta$ 的形式, $A(x)$ 是一个关于 ϕ 的函数, ϕ 的波长大于 $a(1 + \epsilon)$, 而 $\eta(x)$ 的波长小于 $a(1 + \epsilon)$, 因此 $A(x)$ 相对于 $\eta(x)$ 来说是变化缓慢的, 由于 $\eta(x)$ 的相对较快的振荡线性项 $\int d^d x A(x) \eta$ 的积分实际上等于零。因此, 在进行(103)的泛函积分计算时, 我们实际上要算的就

是 $\eta(x)$ 的二次项的高斯积分，由熟知的高斯积分公式可知这个积分算出来是

$$\det[-\partial^2 + ta^{-2} + \frac{1}{2}ga^{d-4}\phi^2]^{-\frac{1}{2}}. \quad (105)$$

利用 $\det(A) = e^{\text{Tr}\ln(A)}$ ，我们可以得到

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \frac{d^d x d^d p}{(2\pi)^d} \Big|_{(1-\epsilon)1/a < p < 1/a} \ln(p^2 + ta^{-2} + \frac{1}{2}ga^{d-4}\phi^2) \right\} \\ & \simeq \exp \left\{ -\epsilon \frac{1}{2} \frac{S_d}{(2\pi a)^d} \int d^d x \ln(a^{-2} + ta^{-2} + \frac{1}{2}ga^{d-4}\phi^2) \right\} \\ & = \exp \left\{ \epsilon C - \epsilon \frac{1}{2} \frac{S_d}{(2\pi a)^d} \int d^d x \ln(1 + t + \frac{1}{2}ga^{d-2}\phi^2) \right\} \\ & = \exp \left\{ \epsilon C' - \epsilon \frac{1}{2} \frac{S_d}{(2\pi a)^d} \int d^d x \left(\frac{1}{2}g(1-t)a^{d-2}\phi^2 - \frac{1}{8}g^2a^{2d-4}\phi^4 \right) \right\}, \quad (106) \end{aligned}$$

式中 S_d 表示 d 维欧空间中单位球面的面积， C 和 C' 均是与场无关的常数，可以通过在原来的标量场作用量中加上一个常数来重整化，因此我们将忽略它。

现在，方程(103)告诉我们

$$\begin{aligned} e^{-S(\tilde{a})} & = \exp \left\{ -\int d^d x \left(\frac{1}{2}(\partial_i \phi \partial_i \phi + ta^{-2}\phi^2) + \frac{1}{4!}ga^{d-4}\phi^4 \right) \right. \\ & \quad \left. - \epsilon \frac{1}{2} \frac{S_d}{(2\pi a)^d} \int d^d x \left(\frac{1}{2}g(1-t)a^{d-2}\phi^2 - \frac{1}{8}g^2a^{2d-4}\phi^4 \right) \right\} \\ & = \exp \left\{ -\int \left(\frac{1}{2}(\partial_i \phi \partial_i \phi + \tilde{t}(a(1+\epsilon))^{-2}\phi^2) + \frac{1}{4!}\tilde{g}(a(1+\epsilon))^{d-4}\phi^4 \right) \right\}, \end{aligned}$$

这个式子的最后一行用到了(102)。比较上面这个方程的相应项，我们可以得到

$$\begin{aligned} \tilde{t} & = t + \epsilon \left(2t + \frac{S_d}{2(2\pi)^d} g(1-t) \right) \\ \tilde{g} & = g + \epsilon \left((4-d)g - \frac{3S_d}{2(2\pi)^d} g^2 \right). \quad (107) \end{aligned}$$

也即是说，我们有重整化群方程

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\epsilon} & = \left(2t + \frac{S_d}{2(2\pi)^d} g(1-t) \right) \\ \frac{dg}{d\epsilon} & = \left((4-d)g - \frac{3S_d}{2(2\pi)^d} g^2 \right). \quad (108) \end{aligned}$$

如果 $d = 4$ ，即假如我们研究的是一个四维量子场论，那么重整化群方程(108)就是

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\epsilon} &= \left(2 - \frac{1}{16\pi^2}g\right)t + \frac{1}{16\pi^2}g \\ \frac{dg}{d\epsilon} &= -\frac{3}{16\pi^2}g^2.\end{aligned}\quad (109)$$

这个方程只有平凡的固定点 $t = 0, g = 0$ ，在固定点附近 ϕ^2 项扰动是相关扰动， ϕ^4 扰动则是无关扰动。

如果 $d < 4$ ，当然重整化群方程(108)依然有平凡的固定点 $t = 0, g = 0$ ，在这个固定点附近 ϕ^2 扰动和 ϕ^4 扰动均是相关扰动。但是除了这个平凡的固定点之外，这时候方程(108)还有一个非平凡的固定点，即 $g = \frac{2(2\pi)^d}{3S_d}(4-d)$ ， $t = -\frac{4-d}{2+d}$ ，在这个固定点附近重整化群可以线性化为

$$\begin{aligned}\frac{d\delta t}{d\epsilon} &= \frac{2+d}{3}\delta t + \frac{3S_d}{(2+d)(2\pi)^d}\delta g \\ \frac{d\delta g}{d\epsilon} &= -(4-d)\delta g,\end{aligned}\quad (110)$$

很显然，这时候 ϕ^2 扰动依然是相关的，但是 ϕ^4 扰动已经变成无关扰动了。如果一个物理系统的重整化群流从这个非平凡固定点附近经过，那么由线性化的重整化群方程(110)人们容易知道，这个系统的关联长度 ξ 的临界指数 ν 为($\lambda_1 = \frac{2+d}{3}$)

$$\nu = \frac{3}{2+d}, \quad \alpha = 2 - \frac{3d}{2+d}\quad (111)$$

代入 $d = 3$ ，得 $\nu = 0.6$ ，与测量值0.63吻合得还可以，值少比平均场理论的值 $1/2 = 0.5$ 好多了，同样，由 $d = 3$ 得 $\alpha = 0.2$ ，与测量值0.11比虽然有所偏离，但不算离谱，要知道平均场理论甚至只能算出一个比热跳变。关于临界指数更系统的计算，请参阅下面这篇写得非常漂亮的经典论文，Kenneth G. Wilson, John B. Kogut, The renormalization group and the ϵ expansion, Physics Reports, DOI: 10.1016/0370-1573(74)90023-4

5.3 从重整化群的物理实质到理解生命现象

首先，让我们重复一下前面的这段话：重整化群实际上是一个关于如何处理多尺度多自由度系统的纲领，重整化变换的物理实质就是积去小尺度的

短程自由度，这样的操作之所以起作用是基于两个基本的观察：第一，小尺度短程自由度对于更大尺度的长程物理是有影响的，第二，但是只要合适地选取表达理论的变量，那么这个影响就可以用几个相关参数来概括，几个参数就可以概括小尺度的所有相关信息，至于短程结构的更多细节信息则与大尺度物理无关。因此，通过积去短程自由度你就能忽略小尺度结构的无关细节，得到一个与你所关心的尺度的物理密切相关的有效理论。

重整化群这种处理多尺度多自由度系统的纲领已经被证明反映了凝聚态物理系统和量子场论系统的本质。然而，生命现象也是从无生命的原子分子中呈展出来的，任何有生命的系统都是一个多尺度多自由度系统。但是这种多尺度多自由度系统和传统凝聚态物理或量子场论中研究的系统有所不同，其中一个关键的不同是，凝聚态系统和量子场论系统的大尺度物理都是由小尺度结构决定的，重整化群流只能从小尺度流向大尺度，然而生命系统的典型特征之一是，大尺度可以反过来影响和调节小尺度的结构，也即是说，在生命系统这样的系统中，多尺度之间的相互沟通更为复杂和丰富，因此重整化群的纲领很可能不能完全适用，这里很可能还需要全新的想法！

与此相关的另一个重要不同是，一般来说在重整化群流之下，系统的熵一定是增加的，因为重整化操作本身就意味着不断舍弃小尺度的无关信息。然而，生命系统与此相当不同，当然，在生命系统中从小尺度到大尺度也一定有大量信息是无关而应该被舍弃的，不同的是，在生命系统中许多真正有意思的信息并不是原来就存在于小尺度结构之中，反而正是来源于宏观大尺度的输入，因此，生命系统的从小尺度到大尺度不完全是一个提取相关信息舍弃无关信息的过程（正是这一点和重整化群有本质区别），它同时还需要相关信息（负熵）的输入（也即是，生命系统总体上要保持在向环境排出更多熵而吸收更少熵的状态）。也许，正是这个相关信息（负熵）的输入使得生命系统的大尺度结构可以反过来调节小尺度结构。归纳来说，在生命系统中存在两个不同的相关信息流向，一个是小尺度的相关信息随着重整化群流流向大尺度的结构，然而，在生命系统中同时还存在一个负熵流，或者说一个反向的相关信息流，它是从大尺度流向小尺度的。生命现象正是这两种相关信息流向共同作用的结果，因此要真

正理解生命现象我们也许就必须发展一个处理多尺度多自由度系统的新框架，重整化群和负熵流也许必须同时被包括进这样的框架之中。

通过相关信息在多尺度之间的振荡，生命系统将体现出一种全息的性质，也就是生命系统每一个小尺度局部都将在一定程度上编码系统整体的信息。这是因为，假设原来系统有两个相距遥远的小尺度局部，它们的信息是不相关联的，然而，随着小尺度信息跟着重整化群流流向大尺度，这两个局部的信息就可以在大尺度上关联起来，然后它们再被负熵流压缩回小尺度，因此，最后每一个小尺度局部都将含有最初相距遥远的两个局部的信息，从而体现出一种全息的性质，或者也可以说是某种非局域性。

在最后这一节，我们花了一点篇幅来讨论重整化群的物理实质和它的可能推广。目的是为了说明，生命系统同样是一个多尺度多自由度物理系统，然而这个系统和我们以前用重整化群来处理的那些系统都有所不同，人们也许需要一个新的框架才能处理生命系统这样不可思议的多尺度多自由度系统。

6 参考文献

1. 开创性双论文：建立完整的动量空间重整化群框架，引入粗粒化与重整化的系统方法，解决临界现象中的多尺度耦合问题。

Kenneth G. Wilson, Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture, Phys. Rev. B 4, 3174, DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.4.3174>

Kenneth G. Wilson, Renormalization Group and Critical Phenomena. II. Phase-Space Cell Analysis of Critical Behavior, Phys. Rev. B 4, 3184-3205, DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.4.3184>

2. 引入 ϵ 展开 ($\epsilon = 4 - d$) 技术，开创了用微扰方法计算临界指数的先河，是RG 从概念走向定量计算的关键。

Kenneth G. Wilson, Michael E. Fisher, Critical Exponents in 3.99 Dimensions, Phys. Rev. Lett. , DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.240>

3. 这篇长篇综述 (125页) 是RG 理论的圣经级文献，系统总结了动量空

间RG、 ϵ 展开、固定点理论，是深入理解Wilson RG 的必读原文。

Kenneth G. Wilson, John B. Kogut, The renormalization group and the ϵ expansion, Physics Reports, DOI: 10.1016/0370-1573(74)90023-4

4. Wilson 的诺贝尔演讲综述，回顾RG 思想的发展历程。

Wilson (1983), The Renormalization Group and Critical Phenomena, Rev. Mod. Phys. 55, 583-600

5. 深刻影响了本文写作的一篇回顾

Michael E. Fisher, Renormalization group theory: Its basis and formulation in statistical physics, Rev. Mod. Phys. 70, 653 - Published 1 April, 1998