

两维伊辛模型

陈童

March 6, 2026

Contents

1 模型的提出和伊辛的“错误证明”	1
2 两维伊辛模型，Kramers-Wannier对偶	4
3 费米子方法	9
4 Grassmann变量积分方法	22
5 参考文献	32

本文是一个关于两维伊辛模型的讲义，核心内容是关于两维伊辛模型的精确解。我们介绍了两种不同的求解方法：一种是Schultz-Mattis-Lieb 1964年在RMP的综述文章中给出的方法，当然这种方法其实是Kaufman 1949年方法的修订版；另一种方法是，1980年Stuart Samuel给出的利用Grassmann变量积分来求解的办法。当然，为了给这两种方法做准备，我们还粗略介绍了伊辛模型的高(低)温展开，以及Kramers-Wannier对偶。

1 模型的提出和伊辛的“错误证明”

本文要处理的是两维伊辛模型。但我们想首先回到一维情形，因为伊辛模

型首先是在一维情形下被提出的。这是一个关于科学史上著名“失败”的精彩故事，其中蕴含着深刻的物理教训。让我们回顾一下这段历史。

Wilhelm Lenz (1888-1957) 是德国物理学家，曾在汉堡大学任教，是量子力学发展中的重要人物（著名的“兰斯-艾森伯交换作用”中的“兰斯”就是他）。1920年，他在研究铁磁性的微观机制时，提出了一个极简的模型：其核心思想是，铁磁性可能源于相邻原子磁矩之间的相互作用，而不需要外场。Lenz将这个想法告诉了他的研究生Ernst Ising (1900-1998)，建议他用这个模型来研究铁磁性的起源。这就是伊辛(Ising)模型的来源。

模型的定义与Ising的“结论”

Lenz提出的模型如下：一维链上排列着 N 个格点，每个格点 i 上有一个可以取两个值的“自旋”变量： $s_i = \pm 1$ （+1表示自旋向上，-1表示自旋向下）。最近邻自旋之间有相互作用，哈密顿量为：

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1},$$

其中 $J > 0$ 为铁磁耦合（也即是相邻自旋同向时能量更低）。加上外磁场 h 后：

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1} - h \sum_{i=1}^N s_i.$$

这就是著名的**Ising模型**——但注意，其实是Lenz提出了它，Ising只是做了计算。

Ising在1924年完成了他的博士论文，研究了一维Ising模型的统计力学性质。他的核心结论是：“**一维Ising模型在任何有限温度下都不存在铁磁相变。**”换句话说，一维情况下没有自发磁化。

Ising的原始论证大体如下（简化版）：Ising考虑了长程序（long-range order）的存在性。他的思路大致如下：

1. 基态分析（ $T = 0$ ）：在温度 $T = 0$ 时，所有自旋同向排列时能量最低： $E_0 = -J(N - 1)$ ，此时存在完全的铁磁长程序，形如(↑↑↑⋯↑↑↑)。

2. 激发态分析（ $T > 0$ ）：热激发会产生畴壁（domain walls），在畴壁两边的自旋指向刚好相反，形如(↑⋯↑↑↓↓⋯↓)。因此，产生每个畴壁的能量代价为 $\Delta E = 2J$ 。

3. Ising的关键论证：在一维链中，畴壁是一个点（零维）。在有限温度 T 之下，熵的贡献倾向于产生畴壁。Ising估计：畴壁的熵约为 $S \sim k_B \ln N$ （畴壁可以在 N 个位置中的任意一个）。因此每个畴壁对应的自由能贡献为： $\Delta F = 2J - k_B T \ln N$

4. Ising的结论：对于任何有限温度，在 $N \rightarrow \infty$ 的热力学极限之下， $k_B T \ln N \rightarrow \infty$ 。因此 $\Delta F < 0$ ，系统总是趋向于产生很多畴壁。从而使得所有自旋均同向的长程序被破坏，因此平均来说，没有自发磁化，从而没有相变。

Ising的论证大体是正确的（一维确实没有相变），虽然推理过程有一些缺陷，尤其是这种论证未严格计算配分函数，从而逻辑不够严密。Ising幸运地得出了正确结论，但他的论证不够严谨。这在科学史上并不罕见——正确的结论往往比正确的证明更早出现。但问题是Ising错误地将这个一维情形下得到的结论推广到了更高维。Ising在论文中**断言**：“**这个模型在二维或三维也不会有相变。**”

这是完全错误的。Onsager在1944年证明了二维Ising模型存在严格的相变。Onsager的结果打破了Ising的悲观预言，证明了统计物理模型的丰富性。更重要的是，证明了统计物理可以用来理解相变现象。

Ising为何做出这个错误推断？他可能认为维度增加不会改变“畴壁总是破坏有序”的图像。他没有意识到高维中畴壁的拓扑性质改变（一维是点，二维是线，但不需要是直线，三维是面，但不需要是平面），从而导致高维中畴壁的能量-熵竞争与一维有本质不同，可以存在有序相。

Ising的错误断言使该模型被忽视了约20年。Onsager 1944年的精确解因此更加震撼，开创了统计物理的新纪元。有意思的是：Onsager在1944年的论文中只给出了结果，没有展示推导过程。他后来在1947年的一个会议黑板上写下了关键的旋量方法，但从未发表完整推导。Kaufman在1949年给出了更清晰的方法。讨论两维Ising模型的精确解就是本文后面的核心内容。

一维没有相变的严格证明（转移矩阵方法）

一维Ising模型的严格解实际上非常简单，可以用所谓的**转移矩阵方法**。为了说清楚这种方法，我们不妨设想 N 个自旋围成了一个首尾相连的

圆周，满足 $s_{N+1} \equiv s_1$ 的周期性边界条件，从而可以将一维Ising模型的哈密顿量重写为

$$H = -J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} - h \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (s_i + s_{i+1}). \quad (1)$$

于是系统的配分函数可以写成

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{s_i\}} \prod_{i=1}^N \exp [\beta J s_i s_{i+1} + \beta h \frac{1}{2} (s_i + s_{i+1})]. \quad (2)$$

现在我们引入一个 2×2 的转移矩阵 T ，矩阵元为 $T_{s_i s_{i+1}}$ ，其定义为：

$$T = \begin{pmatrix} e^{K+h'} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-h'} \end{pmatrix}.$$

其中 $K = \beta J$ ， $h' = \beta h$ 。于是配分函数 \mathcal{Z} 刚好可以写成 $T_{s_i s_{i+1}}$ 相乘的形式

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{s_i\}} T_{s_1 s_2} T_{s_2 s_3} \cdots T_{s_N s_1} = \text{Tr}(T^N) = \lambda_+^N + \lambda_-^N.$$

式中 λ_{\pm} 为转移矩阵 T 的本征值：

$$\lambda_{\pm} = e^K \cosh h' \pm \sqrt{e^{2K} \sinh^2 h' + e^{-2K}}.$$

关键观察：对于任何 $T > 0$ （即 $K < \infty$ ）， $\lambda_+ > \lambda_- > 0$ ，因此在 $N \rightarrow +\infty$ 的热力学极限之下， λ_- 对配分函数的贡献可以忽略，即有 $\mathcal{Z} \approx \lambda_+^N$ 。从而不难发现自由能密度 $f = -k_B T \log \mathcal{Z} / N \approx -k_B T \ln \lambda_+$ 是 T 的解析函数，从而系统不存在相变。而且不难算出，磁化强度 $m = -\frac{\partial f}{\partial h}$ 在 $h \rightarrow 0^+$ 时趋于零，从而没有自发磁化。**严格结论：**一维Ising模型的自由能在 $T > 0$ 时解析，不存在相变。

2 两维伊辛模型，Kramers-Wannier对偶

下面我们把伊辛模型从一维推广到两维。我们考虑一个二维正方晶格上的零场伊辛模型，所谓零场指的是外磁场 $h = 0$ 。其中所有自旋变量 s_i 都定义在正方晶格的格点上，下标 i 表示第 i 个格点。这个模型的哈密顿量为

$$H = -J \sum_{\langle i, j \rangle} s_i s_j, \quad (3)$$

其中 $\langle i, j \rangle$ 表示 i, j 两个格点是最近邻格点，我们要对这样的最近邻格点对进行求和。从而系统的配分函数为($K = \beta J$)

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{s_i\}} \prod_{\langle i, j \rangle} e^{K s_i s_j}. \quad (4)$$

高温展开

注意到 $s_i = \pm 1$, 从而 $(s_i)^2 = 1$, 因此有

$$e^{K s_i s_j} = \cosh(K) + s_i s_j \sinh(K). \quad (5)$$

进而可以将上述配分函数写成

$$\mathcal{Z} = [\cosh(K)]^{2N} \sum_{\{s_i\}} \prod_{\langle i, j \rangle} [1 + s_i s_j \tanh(K)]. \quad (6)$$

注意对于 N 个格点的正方格子，每个格点有4条边，每条边被2个格点共享，从而总边数为 $4N/2 = 2N$ 。在温度很高时， K 是小量，从而 $\tanh(K) \ll 1$ 可以看作小量，因此可以将上式对 $\tanh(K)$ 进行级数展开。这个展开的领头阶就是每个乘积因子都取1。接下来的贡献是取少量 $\tanh(K)$ 因子，而多取因子1。但需要注意的是，每一个 $\tanh(K)$ 因子必然连带着一对自旋因子 $s_i s_j$ 一起出现。由于最后需要对每一个格点上的自旋 s_i 的两个不同值 ± 1 求和，所以如果某个特定的 s_i 在级数展开中仅出现奇数次，那由于 $(+1) + (-1) = 0$ ，这一项最终的贡献就必定为零。因此，所有的非零贡献中，必定每个自旋变量都出现偶数次(包括零次)，从而所有的自旋变量都会抵消(由于 $(s_i)^2 = 1$)。

我们可以将每一个 $s_i s_j \tanh(K)$ 因子的近邻对 $\langle i, j \rangle$ 画一条粗线连接起来。那么级数展开的每一非零贡献中，这些近邻对的连线必定会形成一条闭合回路，因为只有闭合回路才能保证其连接的每一个格点上的 s_i 都出现偶数次。如此一来，就可以将(6)式展开的每一项与一个如图(1)所示的回路图形 Γ 联系起来。每一个特定回路图形中的每一个近邻对链接对配分函数的贡献为 $\tanh(K)$ 。所以，最终可以将配分函数(6)写成

$$\mathcal{Z}(K) = [\cosh(K)]^{2N} 2^N \sum_{\Gamma} [\tanh(K)]^{L(\Gamma)}, \quad (7)$$

式中需要对所有可能的回路图形求和, $L(\Gamma)$ 表示图形 Γ 的总周长(以晶格格距为单位), 式中前面的因子 2^N 是来自于每个格点上的自旋都有2种取值, 而算配分函数时要对所有自旋的不同取值进行求和。值得注意的是, 这里的多边形回路 Γ 是可以交叉重叠的回路。

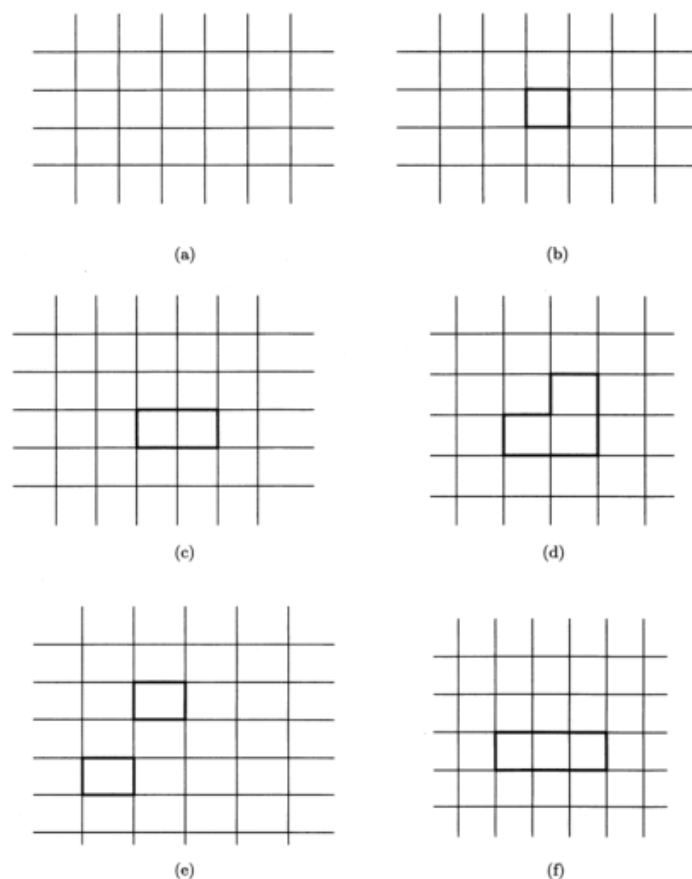


Figure 1: 高温展开图示例。图(a)、(b)、(c)分别为长度等于0, 4, 6的回路; 图(d)、(e)、(f)是长度等于8的回路, 它有三种不同的拓扑结构。

低温展开

而当温度很低时, K 很大。这时候可以将配分函数 Z 写成 $Z = \sum_n \Omega_n e^{-\beta E_n}$, 式中 E_n 是伊辛模型第 n 个可能的总能量取值, Ω_n 表示具有这种总能量值的

自旋位形数目。当温度很低时， β 很大，我们可以将不同的能量取值按从低到高排列， $E_0 < E_1 < E_2 < \dots$ ，由于 β 很大，所以显然，能量越低的位形对配分函数的贡献越大。

首先，二维方格子Ising模型有两个基态，即两个最低能的自旋位形，分别对应自旋全向上或者全向下，能量为 $E_0 = -2NJ$ (注意总边数为 $2N$)，或者说 $\beta E_0 = -2NK$ 。

激发态(高能量的自旋位形)可以通过在基态的基础上翻转自旋而成，所以关键是考虑两个不同自旋取向区域的分界线(称作畴壁，domain walls)，因为自旋的相对翻转就是发生在这样的分界线上。我们可以把这样的分界线画在对偶的格子上(所谓对偶格子，如图(2)所示，就是以原格子每个正方形的中心为新格点所形成的新格子，很显然，正方格子的对偶格子依然是正方格子)，不难明白，原格子上的畴壁正好是对偶格子上的闭合回路 Γ 。记 $L(\Gamma)$ 为畴壁总长度，也就是 Γ 在对偶格子上的边数。则很显然，每一个 Γ 贡献的能量为 $E = E_0 + 2JL(\Gamma)$ ，或者说 $\beta E = -2NK + 2KL(\Gamma)$ 。很显然，配分函数的低温展开就是对畴壁进行展开，最后即有

$$\mathcal{Z}(K) = 2e^{2NK} \sum_{\Gamma} [e^{-2K}]^{L(\Gamma)}. \quad (8)$$

其中前面的因子2来自于基态的二重简并。另外，由于现在的回路 Γ 是原格子上两个区域的分界线，所以它是不能交叉重叠的(与高温展开的情形不同)。不难看出，在这种低温的情况下，大的畴壁是被压制的。但是，当温度很高时，这种低温展开就失效了，这意味着高温时，畴壁回路可以自由涨落。

对比(7)式的高温展开和(8)式的低温展开，可以看出，两者都是对某种闭合回路进行展开，只不过高温展开是原格子上的闭合回路，而低温展开是对偶格子上的闭合回路。另外，高温展开是以 $\tanh(K)$ 为每条边的权重，而低温展开则是以 e^{-2K} 为每条边的权重。因此，两个展开具有相同的组合结构！这暗示存在变量替换使得它们等价。

Kramers-Wannier对偶

Kramers-Wannier指出，我们可以在对偶格子上定义一个对偶的伊辛模

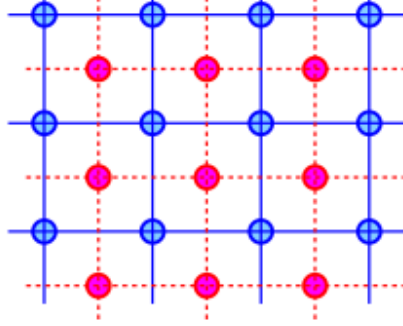


Figure 2: 用两种不同颜色格点标记的原格子与其对偶格子

型，它不是以 K 而是以对偶的 K^* 为耦合常数，式中 K^* 的定义为

$$e^{-2K^*} \equiv \tanh(K). \quad (9)$$

我们也可以利用双曲函数的恒等式将上式改成更对称的

$$\sinh(2K) \sinh(2K^*) = 1. \quad (10)$$

则原格子配分函数的高温展开为

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{Z}(K)}{[2 \sinh(2K)]^{N/2}} &= \frac{2^N [\cosh(K)]^{2N}}{[2 \sinh(2K)]^{N/2}} \sum_{\Gamma} [\tanh(K)]^{L(\Gamma)} \\ &= \frac{2^N [\cosh^2(K)]^N}{[2 \sinh(2K)]^{N/2}} \sum_{\Gamma} [e^{-2K^*}]^{L(\Gamma)}. \end{aligned} \quad (11)$$

利用 $\sinh(2K) \sinh(2K^*) = 1$ 以及 $\cosh^2(K) = \frac{e^{4K^*}}{e^{4K^*} - 1}$ (请证明), 不难得到

$$\begin{aligned} \frac{2^N [\cosh(K)]^{2N}}{[2 \sinh(2K)]^{N/2}} &= \frac{2^N e^{4NK^*}}{(e^{4K^*} - 1)^N \left(\frac{2}{\sinh(2K^*)}\right)^{N/2}} = \frac{2^{N/2} e^{4NK^*} \sinh^{N/2}(2K^*)}{(e^{4K^*} - 1)^N} \\ &= \frac{2^{N/2} e^{4NK^*} \sinh^{N/2}(2K^*)}{e^{2NK^*} 2^N \sinh^N(2K^*)} = \frac{e^{2NK^*}}{[2 \sinh(2K^*)]^{N/2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

代入上面的关于原格子的高温展开, 即有

$$\frac{\mathcal{Z}(K)}{[2 \sinh(2K)]^{N/2}} = 2 \frac{e^{2NK^*}}{[2 \sinh(2K^*)]^{N/2}} \sum_{\Gamma} [e^{-2K^*}]^{L(\Gamma)}. \quad (13)$$

很显然，结果正好是对偶格子配分函数的低温展开除以 $[2 \sinh(2K^*)]^{N/2}$ ，式中已经考虑到高温展开的 Γ 可以交叉重叠，而低温展开的不能，这使得式子前面多出一个因子2 (严格的讨论要稍微复杂一些，这里从略)。换言之，我们有

$$\frac{\mathcal{Z}(K)}{[2 \sinh(2K)]^{N/2}} = \frac{\mathcal{Z}(K^*)}{[2 \sinh(2K^*)]^{N/2}}. \quad (14)$$

Kramers-Wannier对偶变换将 $K \leftrightarrow K^*$ 。对于自对偶点， $K = K^* = K_c$ ，由(10)式，很显然有

$$\sinh(2K_c) = 1. \quad (15)$$

不难解得

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{1}{2} \operatorname{arsinh}(1) = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.440686... \\ \Leftrightarrow \frac{J}{k_B T_c} &\approx 0.440686... \Rightarrow T_c \approx 2.269J/k_B. \end{aligned} \quad (16)$$

人们可以合理假设Ising模型只有一个相变点，则这个点必定只能是自对偶点 K_c ，相应的相变温度必定是 T_c ，否则相变点就至少为两个，因为 K 和与之对偶的 K^* 在物理上是等价的。另外，由(10)式不难看出， K 小(原格子高温相)则 K^* 大(对偶格子低温相)，反之亦然。所以Kramers-Wannier对偶变换交换了原格子和对偶格子的高低相。对于正方格子，由于其对偶格子依然为一样的正方格子，所以相变点只能是自对偶点。如此一来，通过Kramers-Wannier对偶性，我们就可以在不用精确求解完整配分函数的情况下，确定了相变点的温度。这是Kramers和Wannier在1941年的工作，早于Onsager 1944年的精确解。

3 费米子方法

本节将讨论本质上由Kaufman在1949年给出的求解两维Ising模型的费米子方法，当然我们采用的是Schultz-Mattis-Lieb 的修改版本。

为了精确求解两维伊辛模型(假定 $h = 0$)，不妨考虑一个 N 行 M 列的正方格子，在格子的四周加上周期性边界条件。相应的伊辛模型哈密顿量可以

写成

$$H = -J_1 \sum_n^N \sum_m^M s_{n,m} s_{n+1,m} - J_2 \sum_n^N \sum_m^M s_{n,m} s_{n,m+1}, \quad (17)$$

式中我们已经把第 n 行第 m 列的格点上的自旋写成了 $s_{n,m}$ ，并且我们记相邻行之间的耦合常数为 J_1 ，而相邻列之间的耦合常数为 J_2 。类似的，我们记 $K_1 = \beta J_1$ ， $K_2 = \beta J_2$ 。

转移矩阵

不妨记 $\mathbf{s}_n = (s_{n,1}, s_{n,2}, \dots, s_{n,M})$ ，由于每一个自旋有两个不同取值，所以这是一个 2^M 个分量的矢量。则不难看出，系统的配分函数可以写成

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\mathbf{s}_n\}} (e^{K_1 \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2} e^{K_2 \sum_m^M s_{1,m} s_{1,m+1}}) \dots (e^{K_1 \mathbf{s}_N \cdot \mathbf{s}_1} e^{K_2 \sum_m^M s_{N,m} s_{N,m+1}}). \quad (18)$$

其中小括号里的项仅仅包含同一行之内的相互作用以及相邻行之间的相互作用。类似的，记 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_M)$ 。不妨定义如下 $2^M \times 2^M$ 的矩阵 V_1, V_2 (分别描述行间和行内相互作用)

$$V_{1,\mathbf{s}\mathbf{s}'} \equiv e^{K_1 \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}'} \quad V_{2,\mathbf{s}\mathbf{s}'} \equiv e^{K_2 \sum_m^M s_m s_{m+1}} \delta_{\mathbf{s},\mathbf{s}'}. \quad (19)$$

则很显然，上述配分函数可以重写成

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\mathbf{s}_n\}} [(V_1 V_2)_{\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2} (V_1 V_2)_{\mathbf{s}_2 \mathbf{s}_3} \dots (V_1 V_2)_{\mathbf{s}_N \mathbf{s}_1}] = \text{Tr}(V_1 V_2)^N. \quad (20)$$

利用矩阵求迹的性质，也可以写成更对称的

$$\mathcal{Z} = \text{Tr}(V_2^{1/2} V_1 V_2^{1/2})^N. \quad (21)$$

当然， $V \equiv V_2^{1/2} V_1 V_2^{1/2}$ 就是所谓的转移矩阵。

引入作用在第 m 列上的泡利矩阵 $\vec{\sigma}_m = (\sigma_m^x, \sigma_m^y, \sigma_m^z)$ ，其行列指标分别用自旋变量来标记，即记作 s_m, s'_m ，从而 $(\sigma_m^z)_{s_m s'_m} = s_m \delta_{s_m s'_m}$ 。由此不难看出

$$V_2 = e^{K_2 \sum_m^M \sigma_m^z \sigma_{m+1}^z}. \quad (22)$$

注意，Kramers-Wannier对偶变换是完全对称的，所以必定也有

$$e^{-2K} \equiv \tanh(K^*). \quad (23)$$

据此不妨定义

$$e^{K_1} \equiv A(K_1) \cosh(K_1^*), \quad e^{-K_1} \equiv A(K_1) \sinh(K_1^*). \quad (24)$$

从而 $1 = A^2 \sinh(K_1^*) \cosh(K_1^*) = A^2 \frac{1}{2} \sinh(2K_1^*) = A^2 / (2 \sinh(2K_1))$ ，从而

$$A(K_1) = [2 \sinh(2K_1)]^{1/2}. \quad (25)$$

为了处理非对角矩阵 V_1 ，我们注意到 $e^{K_1 s_m s'_m}$ 可以用 2×2 矩阵形式写成

$$e^{K_1 s_m s'_m} = \begin{pmatrix} e^{K_1} & e^{-K_1} \\ e^{-K_1} & e^{K_1} \end{pmatrix} = A(K_1) \begin{pmatrix} \cosh(K_1^*) & \sinh(K_1^*) \\ \sinh(K_1^*) & \cosh(K_1^*) \end{pmatrix} \quad (26)$$

另一方面，注意到 $e^{K_1^* \sigma_m^x}$ (利用 $(\sigma^x)^2 = 1$) 正好可以写成

$$e^{K_1^* \sigma_m^x} = \cosh(K_1^*) 1_{2 \times 2} + \sigma_m^x \sinh(K_1^*) = \begin{pmatrix} \cosh(K_1^*) & \sinh(K_1^*) \\ \sinh(K_1^*) & \cosh(K_1^*) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

所以我们有

$$e^{K_1 s_m s'_m} = [2 \sinh(2K_1)]^{1/2} (e^{K_1^* \sigma_m^x})_{s_m s'_m} \quad (28)$$

从而很显然有

$$V_1 = [2 \sinh(2K_1)]^{M/2} e^{K_1^* \sum_m^M \sigma_m^x}. \quad (29)$$

为了把矩阵 V_1, V_2 写成更方便的形式，我们做一个相似变换(不改变矩阵求迹)，也就是一个绕 y 轴的 90 度旋转，使得

$$\sigma^x \rightarrow -\sigma^z, \quad \sigma^z \rightarrow \sigma^x. \quad (30)$$

从而可以将 V_1, V_2 写成

$$V_1 = [2 \sinh(2K_1)]^{M/2} e^{-K_1^* \sum_m^M \sigma_m^z}, \quad V_2 = e^{K_2 \sum_m^M \sigma_m^x \sigma_{m+1}^x}. \quad (31)$$

注意，在这个新的形式下， V_1 才是对角的。

Jordan-Wigner变换

类似于前面的一维情形，为了算出配分函数，我们至少需要求出转移矩阵最大的本征值。这可以通过利用所谓的Jordan-Wigner变换的方法来完成。

我们定义 $\sigma^+ \equiv \frac{1}{2}(\sigma^x + i\sigma^y)$, $\sigma^- \equiv \frac{1}{2}(\sigma^x - i\sigma^y)$, 不难得到 $(\sigma^\pm)^2 = 0$, $\sigma^+\sigma^- = \frac{1}{2}(1 + \sigma^z)$, $\sigma^-\sigma^+ = \frac{1}{2}(1 - \sigma^z)$, 从而 $[\sigma^+, \sigma^-] = \sigma^z$, 同时反对易子 $\{\sigma^+, \sigma^-\} = 1$ 。

Jordan-Wigner变换是定义如下算符

$$\begin{aligned} c_m &\equiv \exp\left(i\pi \sum_{j=1}^{m-1} \sigma_j^+ \sigma_j^-\right) \sigma_m^- \\ c_m^\dagger &\equiv \exp\left(i\pi \sum_{j=1}^{m-1} \sigma_j^+ \sigma_j^-\right) \sigma_m^+. \end{aligned} \quad (32)$$

我们的目标是要验证这两类算符构成了费米子的产生湮灭算符。为了验证一些代数关系，下面式子是有用的(请证明)

$$(\sigma^+\sigma^-)^2 = \sigma^+\sigma^- \Rightarrow e^{\theta\sigma^+\sigma^-} = 1 + \sigma^+\sigma^-(e^\theta - 1) \Rightarrow e^{2\pi i\sigma^+\sigma^-} = 1. \quad (33)$$

由此不难验证， c_m 与 c_m^\dagger 的确互为厄米共轭。另外，由此不难算得

$$c_m^\dagger c_m = \sigma_m^+ \sigma_m^-, \quad c_m c_m^\dagger = \sigma_m^- \sigma_m^+. \quad (34)$$

所以的确有

$$\{c_m^\dagger, c_m\} = 1. \quad (35)$$

但是，为了真正描述费米子，我们还需要验证，不同指标 m 的这两类算

符是反对易的。验证如下：对于 $n > m$ ，我们有

$$\begin{aligned}
c_n c_m^\dagger &= \sigma_n^- \exp\left(i\pi \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j^+ \sigma_j^-\right) \exp\left(i\pi \sum_{j=1}^{m-1} \sigma_j^+ \sigma_j^-\right) \sigma_m^+ \\
&= \sigma_n^- e^{2\pi i \sum_{j=1}^{m-1} \sigma_j^+ \sigma_j^-} e^{i\pi \sigma_m^+ \sigma_m^-} e^{i\pi \sum_{j=m+1}^{n-1} \sigma_j^+ \sigma_j^-} \sigma_m^+ \\
&= e^{i\pi \sum_{j=m+1}^{n-1} \sigma_j^+ \sigma_j^-} \sigma_n^- e^{i\pi \sigma_m^+ \sigma_m^-} \sigma_m^+ \\
&= e^{i\pi \sum_{j=m+1}^{n-1} \sigma_j^+ \sigma_j^-} \sigma_n^- [1_m + \sigma_m^+ \sigma_m^- (e^{i\pi} - 1)] \sigma_m^+ \\
&= e^{i\pi \sum_{j=m+1}^{n-1} \sigma_j^+ \sigma_j^-} \sigma_n^- [\sigma_m^+ - 2\sigma_m^+ \sigma_m^- \sigma_m^+] \\
&= e^{i\pi \sum_{j=m+1}^{n-1} \sigma_j^+ \sigma_j^-} \sigma_n^- [\sigma_m^+ - 2\sigma_m^+] \\
&= -e^{i\pi \sum_{j=m+1}^{n-1} \sigma_j^+ \sigma_j^-} \sigma_n^- \sigma_m^+.
\end{aligned} \tag{36}$$

类似的，可以算得

$$c_m^\dagger c_n = e^{i\pi \sum_{j=m+1}^{n-1} \sigma_j^+ \sigma_j^-} \sigma_m^+ \sigma_n^-. \tag{37}$$

所以，的确有 c_m^\dagger, c_n 反对易。其它情形的反对易均可以类似地验证。

由于 $\sigma_m^z = 2\sigma_m^+ \sigma_m^- - 1_m = 2c_m^\dagger c_m - 1_m$ ，所以

$$V_1 = [2 \sinh(2K_1)]^{M/2} e^{-K_1^* \sum_m^M \sigma_m^z} = [2 \sinh(2K_1)]^{M/2} e^{-2K_1^* \sum_m^M (c_m^\dagger c_m - \frac{1}{2})}. \tag{38}$$

为了得到算符 V_2 的费米子表达式，我们注意到

$$\sigma_m^x \sigma_{m+1}^x = (\sigma_m^+ + \sigma_m^-)(\sigma_{m+1}^+ + \sigma_{m+1}^-) = \sigma_m^+ \sigma_{m+1}^+ + \sigma_m^- \sigma_{m+1}^- + \sigma_m^+ \sigma_{m+1}^- + \sigma_m^- \sigma_{m+1}^+.$$

另一方面，对于 $m < M$ ，利用和前面验证费米子反对易关系时类似的计算，可以算得

$$c_m^\dagger c_{m+1} = \sigma_m^+ \sigma_{m+1}^-, \quad c_m c_{m+1} = -\sigma_m^- \sigma_{m+1}^-, \quad c_m^\dagger c_{m+1}^\dagger = \sigma_m^+ \sigma_{m+1}^+. \tag{39}$$

代入前面的结果即有

$$\begin{aligned}
\sigma_m^x \sigma_{m+1}^x &= c_m^\dagger c_{m+1}^\dagger - c_m c_{m+1} + c_m^\dagger c_{m+1} + c_{m+1}^\dagger c_m \\
&= (c_m^\dagger - c_m)(c_{m+1}^\dagger + c_{m+1}).
\end{aligned} \tag{40}$$

而对于 $m = M$ ，我们需要考虑到周期性边界条件，这时候可以算得

$$\begin{aligned}\sigma_M^+ \sigma_1^- &= -(-)^F c_M^\dagger c_1 \neq c_M^\dagger c_1 \\ \sigma_M^+ \sigma_1^+ &= -(-)^F c_M^\dagger c_1^\dagger \neq c_M^\dagger c_1^\dagger \\ \sigma_M^- \sigma_1^- &= (-)^F c_M c_1 \neq -c_M c_1.\end{aligned}\quad (41)$$

式中 F 是总费米子数目算符

$$F \equiv \sum_m^M \sigma_m^+ \sigma_m^- = \sum_m^M c_m^\dagger c_m. \quad (42)$$

因此，综合上面所有结果，即知算符 V_2 可以用费米子表达成

$$V_2 = e^{K_2 \sum_m^M \sigma_m^x \sigma_{m+1}^x} = e^{K_2 \left[\sum_{m=1}^{M-1} (c_m^\dagger - c_m)(c_{m+1}^\dagger + c_{m+1}) - (-)^F (c_M^\dagger - c_M)(c_1^\dagger + c_1) \right]}. \quad (43)$$

很显然，算符 $(-)^F$ 数的是有偶数个费米子还是奇数个费米子，所以称作费米宇称算符。由于算符 V_1 和 V_2 的指数上涉及的都是费米子算符的二次型(偶数个费米子)，所以很显然

$$[(-)^F, V_1] = [(-)^F, V_2] = 0. \quad (44)$$

因此我们可以分别考虑转移矩阵 V 在费米奇宇称态($(-)^F$ 的本征值为负)和费米偶宇称态($(-)^F$ 的本征值为正)上的作用。很明显，在费米偶宇称态上 V_2 等价于

$$V_2^+ = e^{K_2 \left[\sum_{m=1}^M (c_m^\dagger - c_m)(c_{m+1}^\dagger + c_{m+1}) \right]}, \text{ 其中, } c_{M+1} = -c_1, c_{M+1}^\dagger = -c_1^\dagger. \quad (45)$$

在费米偶奇称态上 V_2 等价于

$$V_2^- = e^{K_2 \left[\sum_{m=1}^M (c_m^\dagger - c_m)(c_{m+1}^\dagger + c_{m+1}) \right]}, \text{ 其中, } c_{M+1} = c_1, c_{M+1}^\dagger = c_1^\dagger. \quad (46)$$

两种情况相应的转移矩阵 $V = V_2^{1/2} V_1 V_2^{1/2}$ 我们分别记作 V^+, V^- 。

因此求转移矩阵本征值的问题就变成一个对角化三个算符的乘积算符的问题，这三个算符中的每一个都是费米子二次型的指数化。这个问题虽然不简单，但并不是不可解决的。

傅里叶变换

因为整个系统是平移不变的，所以不妨先进行如下傅里叶变换

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-i\pi/4} \sum_q e^{iqm} \eta_q. \quad (47)$$

其中引入额外的因子 $e^{-i\pi/4}$ 是为了确保当将 V^\pm 用 η_q 来表达时，所有项的系数均为实数。进而不难看出，偶费米宇称态的周期性边界条件(45)要求

$$q \equiv l = \pm\pi/M, \pm3\pi/M, \dots, \pm(M-1)\pi/M. \quad (48)$$

而奇费米宇称态的周期性边界条件(46)要求

$$q \equiv k = 0, \pm2\pi/M, \pm4\pi/M, \dots, \pm(M-2)\pi/M, \pi. \quad (49)$$

这里为了方便起见，我们已经假定 M 为偶数。

对于偶费米宇称态，显然，傅里叶变换的性质确保

$$\sum_m (c_m^\dagger c_m - 1/2) = \sum_{q=l} (\eta_q^\dagger \eta_q - 1/2) = \sum_{q=l>0} (\eta_q^\dagger \eta_q + \eta_{-q}^\dagger \eta_{-q} - 1). \quad (50)$$

对于奇费米宇称态， $q = k = 0, \pi$ 这两种情况要单独处理，其它都和偶费米宇称态一样。由此即可以知道 V_1 如何用 η_q 来表达。

为了得到算符 V_2 用 η_q 表达的式子，我们依然先考虑偶费米宇称态，经过一些繁琐的计算，并利用 $\sum_{q=l>0} \cos(q) = 0$ ，可以得到此时

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M (c_m^\dagger - c_m)(c_{m+1}^\dagger + c_{m+1}) \\ &= 2 \sum_{q=l>0} [(\sin q)(\eta_{-q}^\dagger \eta_q^\dagger + \eta_q \eta_{-q}) + (\cos q)(\eta_q^\dagger \eta_q + \eta_{-q}^\dagger \eta_{-q})]. \end{aligned} \quad (51)$$

对奇费米宇称态，讨论也是类似的，只是需要单独处理 $q = k = 0, \pi$ 的贡献。

综合所有这些结果，可以得到

$$V^\pm = [2 \sinh(2K_1)]^{M/2} \prod_{0 \leq q \leq \pi} V_q, \quad (52)$$

式中， q 要么取 l 类可能性，要么取 k 类可能性。对于 $q \neq 0, \pi$,

$$V_q = (V_{2q})^{1/2} V_{1q} (V_{2q})^{1/2}, \quad (53)$$

其中

$$\begin{aligned} V_{1q} &= \exp \left[-2K_1^*(\eta_q^\dagger \eta_q + \eta_{-q}^\dagger \eta_{-q} - 1) \right] \\ V_{2q} &= \exp \left\{ 2K_2 [(\sin q)(\eta_{-q}^\dagger \eta_q^\dagger + \eta_q \eta_{-q}) + (\cos q)(\eta_q^\dagger \eta_q + \eta_{-q}^\dagger \eta_{-q})] \right\}. \end{aligned} \quad (54)$$

而对于 $q = 0$,

$$V_0 = \exp \left[-2(K_1^* - K_2)(\eta_0^\dagger \eta_0 - \frac{1}{2}) \right], \quad (55)$$

而对于 $q = \pi$,

$$V_\pi = \exp \left[-2(K_1^* + K_2)(\eta_\pi^\dagger \eta_\pi - \frac{1}{2}) \right]. \quad (56)$$

对角化

由于 V_q 和 $V_{q'}$ 这样的算符涉及到费米子的二次型，费米子是反对易的，其二次型对易，因此对于两个不同的 q 和 q' ， V_q 和 $V_{q'}$ 必定相互对易，从而可以被同时对角化。对于 V_0 和 V_π ，很显然，在占有数表象中，它们已经是对角的了。而很显然，对于更一般的 q ，我们只需要在 $\Phi_0, \Phi_q, \Phi_{-q}, \Phi_{-qq}$ 这四个矢量中对角化 V_q ，其中 Φ_0 是费米子真空态， $\Phi_{-qq} = \eta_{-q}^\dagger \eta_q^\dagger \Phi_0$ ， Φ_q 和 Φ_{-q} 的含义类似。

不难看出， Φ_q 和 Φ_{-q} 已经是 V_q 的本征矢量了。这是因为，它们同时是 $\eta_q \eta_{-q}$ 和 $\eta_{-q}^\dagger \eta_q^\dagger$ 的本征值为零的本征矢量，同时还是 $\eta_q^\dagger \eta_q + \eta_{-q}^\dagger \eta_{-q}$ 的本征值为 1 的本征矢量。因此，对于 $q \neq 0, \pi$ ，我们有

$$V_q \Phi_q = \exp(2K_2 \cos q) \Phi_q, \quad (57)$$

Φ_{-q} 的情况类似。

下一步就是在矢量 Φ_0 和 Φ_{-qq} 上对角化 V_q 。很容易计算 V_{1q} 和 V_{2q} 在这两个矢量上的矩阵元。其中 V_{1q} 已经是对角的，为

$$V_{1q} = \begin{pmatrix} \exp(-2K_1^*) & 0 \\ 0 & \exp(2K_1^*) \end{pmatrix}. \quad (58)$$

为了计算 $V_{2q}^{1/2}$ 的矩阵元，我们引入如下对湮灭和对产生算符

$$\sigma_q^- = \eta_q \eta_{-q}, \quad \sigma_q^+ = \eta_{-q}^\dagger \eta_q^\dagger, \quad (59)$$

不难看出，在 Φ_0 和 Φ_{-qq} 张成的两维向量空间中，这两个算符所对应的其实就是泡利矩阵的 σ^- 和 σ^+ 。因此(还是在这个两维空间中)

$$\eta_q^\dagger \eta_q + \eta_{-q}^\dagger \eta_{-q} = \sigma_q^z + 1 \equiv 2\sigma_q^+ \sigma_q^-, \quad \eta_q \eta_{-q} + \eta_{-q}^\dagger \eta_q^\dagger = \sigma_q^x. \quad (60)$$

因此，不难有

$$\begin{aligned} (V_{2q})^{1/2} &= \exp\{K_2[(\sigma_q^z + 1) \cos q + \sigma_q^x \sin q]\} = \exp(K_2 \cos q) \exp(K_2 \sigma_q') \\ &= \exp(K_2 \cos q) (\cosh K_2 + \sigma_q' \sinh K_2) \\ &= \exp(K_2 \cos q) \begin{pmatrix} \cosh K_2 + \sin K_2 \cos q & \sinh K_2 \sin q \\ \sinh K_2 \sin q & \cosh K_2 - \sin K_2 \cos q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

其中 $\sigma_q' \equiv \sigma_q^z \cos q + \sigma_q^x \sin q$ ，它具有 $(\sigma_q')^2 = 1$ 的重要性质。

综合上述结果，即可以得到 V_q 在 Φ_0 和 Φ_{-qq} 张成的两维空间中的矩阵元

$$V_q = \exp(2K_2 \cos q) \begin{pmatrix} A_q & C_q \\ C_q & B_q \end{pmatrix}, \quad (61)$$

其中

$$\begin{aligned} A_q &= \exp(-2K_1^*) (\cosh K_2 + \sinh K_2 \cos q)^2 + \exp(2K_1^*) (\sinh K_2 \sin q)^2 \\ B_q &= \exp(-2K_1^*) (\sinh K_2 \sin q)^2 + \exp(2K_1^*) (\cosh K_2 - \sinh K_2 \cos q)^2 \\ C_q &= (2 \sinh K_2 \sin q) (\cosh 2K_1^* \cosh K_2 - \sinh 2K_1^* \sinh K_2 \cos q). \end{aligned} \quad (62)$$

通过一点代数运算可以得到两个本征值为

$$\exp(2K_2 \cos q) \left\{ \frac{1}{2}(A_q + B_q) \pm \left[\left(\frac{1}{2}(A_q - B_q) \right)^2 + C_q^2 \right]^{1/2} \right\} = \exp(2K_2 \cos q) e^{\pm \epsilon_q},$$

式中 $\epsilon_q > 0$ 满足

$$\cosh \epsilon_q = \cosh 2K_2 \cosh 2K_1^* - \sinh 2K_2 \sinh 2K_1^* \cos q. \quad (63)$$

与 $+$ 、 $-$ 两个符号代表的本征值对应的本征矢量是

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \cos \phi_q \Phi_0 + \sin \phi_q \Phi_{-qq} \\ \Psi_{-qq} &= -\sin \phi_q \Phi_0 + \cos \phi_q \Phi_{-qq}. \end{aligned} \quad (64)$$

其中 ϕ_q (模 π)由下式定义

$$\tan \phi_q = C_q / (e^{\epsilon_q} - A_q). \quad (65)$$

通过一些代数运算, 也可以将这个定义换成

$$\tan(2\phi_q) = 2C_q / (B_q - A_q), \quad (66)$$

不过, 现在就变成模 $\pi/2$, 为了保持和上面模 π 的情形一致, 我们额外要求

$$\text{sgn}(2\phi_q) = \text{sgn}(q). \quad (67)$$

我们可以用波哥留波夫简化超导BCS理论的同样方法来简化 V_q 的表达式, 为此, 引入如下变换

$$\begin{aligned} \xi_q &= \cos \phi_q \eta_q + \sin \phi_q \eta_{-q}^\dagger \\ \xi_{-q} &= \cos \phi_q \eta_{-q} - \sin \phi_q \eta_q^\dagger. \end{aligned} \quad (68)$$

进而不难验证

$$\begin{aligned} \xi_q \Psi_0 &= \xi_{-q} \Psi_0 = 0, & \Phi_q &= \Psi_q = \xi_q^\dagger \Psi_0, \\ \Phi_{-q} &= \Psi_{-q} = \xi_{-q}^\dagger \Psi_0, & \Phi_{-qq} &= \xi_{-q}^\dagger \xi_q^\dagger \Psi_0. \end{aligned} \quad (69)$$

利用 ξ 算符, 即可以把 V_q 表达成

$$V_q = \exp(2K_2 \cos q) \exp[-\epsilon_q (\xi_q^\dagger \xi_q + \xi_{-q}^\dagger \xi_{-q} - 1)]. \quad (70)$$

对于 $q = 0$ 和 $q = \pi$ 的特殊情况, 我们可以定义

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 0 \quad \text{且} \quad \epsilon_0 = 2(K_1^* - K_2) \\ \phi_\pi &= 0 \quad \text{且} \quad \epsilon_\pi = 2(K_1^* + K_2). \end{aligned} \quad (71)$$

进而即可以得到 V^\pm 的表达式

$$V^\pm = (2 \sinh 2K_1)^{M/2} \exp\left[-\sum_q \epsilon_q \left(\xi_q^\dagger \xi_q - \frac{1}{2}\right)\right], \quad (72)$$

这里我们已经利用了 $2K_2 \sum_q \cos q = 0$ 的事实。

注意，一个仅仅涉及偶数(奇数)个 ξ 粒子的态同样只涉及偶数(奇数)个 η 粒子。所以 V^+ 的被允许的本征态仅能涉及偶数个 ξ 粒子。类似的， V^- 的被允许的本征态仅能涉及奇数个 ξ 粒子。不妨分别记 V^+ 和 V^- 的本征态为 Ψ^+ 与 Ψ^- 。

定义 T_c 为使得下式成立的温度

$$K_1^* = K_2, \quad (73)$$

或者根据 K^* 的定义，等价的有

$$\sinh(2J_1/k_B T_c) \sinh(2J_2/k_B T_c) = 1. \quad (74)$$

当 $T \neq T_c$ 时

$$\epsilon_q \geq \epsilon_{\min} > 0, \quad q \neq 0. \quad (75)$$

且不难看出

$$\begin{aligned} \text{对于 } T > T_c, \quad \epsilon_0 &= + \lim_{q \rightarrow 0} \epsilon_q > 0 \\ \text{对于 } T < T_c, \quad \epsilon_0 &= - \lim_{q \rightarrow 0} \epsilon_q < 0. \end{aligned} \quad (76)$$

类似于前面一维伊辛模型的讨论，可知，在 $N, M \rightarrow \infty$ 的热力学极限之下，系统的配分函数由转移矩阵 V 的最大本征值的 N 次方给出。所以想算出配分函数的话，只需要求出 V 的最大本征值。

很显然， V^+ 的最大本征值 λ_0^+ 相应于 ξ_l 粒子的真空态， Ψ_0^+ ，

$$\lambda_0^+ = (2 \sinh 2K_1)^{M/2} \exp\left[\frac{1}{2} \sum_l \epsilon_l\right]. \quad (77)$$

所有其它的本征值至少比上述本征值小 $\exp(-\epsilon_{\min})$ 因子。

对于 V^- ，我们要分 $T > T_c$ 与 $T < T_c$ 两种情况来讨论。对于 $T > T_c$ 情形，由于 $\epsilon_0 > 0$ ，所以这时候 V^- 的最大本征值相应于 ξ_k 粒子真空态 Ψ_0^- ，对应的本征值为

$$\lambda_0^- = (2 \sinh 2K_1)^{M/2} \exp\left[\frac{1}{2} \sum_k \epsilon_k\right]. \quad (78)$$

但这个本征态不被费米奇宇称允许。所以这时候整个 V 的最大本征值就是 λ_0^+ 。

对于 $T < T_c$ 情形, 由于 $\epsilon_0 < 0$, 所以这时候 V^- 最大本征值对应的态是 $\Psi_{k=0}^- = \xi_{k=0}^\dagger \Psi_0^-$, 相应的本征值 $\lambda_{k=0}^-$ 由下式给出

$$\lambda_{k=0}^- = (2 \sinh 2K_1)^{M/2} \exp\left[\frac{1}{2} \sum_k |\epsilon_k|\right]. \quad (79)$$

注意, 这个态是被费米奇宇称允许的。所以, 在这种情况下, 为了决定到底哪个是 V 的最大本征值, 我们需要比较 λ_0^+ 和 $\lambda_{k=0}^-$ 。不过, 不难看出, 在 $M \rightarrow \infty$ (从而可以允许 $q \rightarrow 0$)的热力学极限之下, 这两个本征值其实是简并的, 都趋于下面的 λ_0

$$\lambda_0 = (2 \sinh 2K_1)^{M/2} \exp\left[\frac{M}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \epsilon_q dq\right]. \quad (80)$$

所以无论高温还是低温, 两维伊辛模型的配分函数 \mathcal{Z} 均可以写成

$$\mathcal{Z}/[2 \sinh(2K_1)]^{NM/2} = \exp\left[\frac{NM}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \epsilon_q dq\right]. \quad (81)$$

对于低温情形, 前面要多乘以一个因子2, 它来自于本征值的2重简并。但是, 这个因子2对于自由能的贡献是非延展的, 所以在热力学极限之下可以忽略。

为了简化上述结果, 我们使用下面数学恒等式(证明稍微放后面一点)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log[2 \cosh x - 2 \cos \omega] d\omega = |x|. \quad (82)$$

从而即有

$$\mathcal{Z}/[2 \sinh(2K_1)]^{NM/2} = \exp\left[\frac{NM}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(2 \cosh \epsilon_q - 2 \cos \omega) d\omega\right].$$

代入(63)式, 即有(忽略掉非延展的 $\log(2)$)

$$\begin{aligned} & \log [\mathcal{Z}/[2 \sinh(2K_1)]^{NM/2}] \\ &= \frac{NM}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dq \int_0^{2\pi} d\omega \log[2(\cosh 2K_2 \cosh 2K_1^* - \sinh 2K_2 \sinh 2K_1^* \cos q) - 2 \cos \omega]. \end{aligned}$$

利用 $\sinh(2K_1^*) = 1/\sinh(2K_1)$, 以及

$$\begin{aligned}\cosh(2K_1^*) &= \frac{e^{2K_1^*} + e^{-2K_1}}{2} = \frac{\frac{1}{\tanh(K_1)} + \tanh(K_1)}{2} \\ &= \frac{\cosh^2(K_1) + \sinh^2(K_1)}{2 \sinh(K_1) \cosh(K_1)} = \coth(2K_1).\end{aligned}\quad (83)$$

进而就可以把刚才的结果重写成

$$\begin{aligned}&\log [\mathcal{Z}/[2 \sinh(2K_1)]^{NM/2}] \\ &= \frac{NM}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dq \int_0^{2\pi} d\omega \log[2(\cosh 2K_2 \coth 2K_1 - \sinh 2K_2 \frac{1}{\sinh 2K_1} \cos q) - 2 \cos \omega] \\ &= \frac{NM}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dq \int_0^{2\pi} d\omega \log[(\cosh 2K_1 \cosh 2K_2 - \sinh 2K_2 \cos q) - \sinh 2K_1 \cos \omega]. \\ &\quad + \frac{NM}{2} \log(2/\sinh 2K_1) \\ &= \frac{NM}{2\pi^2} \int_0^{\pi} dq \int_0^{\pi} d\omega \log[(\cosh 2K_1 \cosh 2K_2 - \sinh 2K_2 \cos q) - \sinh 2K_1 \cos \omega]. \\ &\quad + \frac{NM}{2} \log(2/\sinh 2K_1).\end{aligned}$$

特别的, 对于 $K_1 = K_2 = K$ 的情形,

$$\begin{aligned}\log [\mathcal{Z}/[2 \sinh(2K)]^{NM/2}] &= \frac{NM}{2} \log(2/\sinh 2K) \\ &+ \frac{NM}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dq \int_{-\pi}^{\pi} d\omega \log[\cosh^2 2K - \sinh 2K(\cos q + \cos \omega)].\end{aligned}\quad (84)$$

利用和差化积公式, 即有

$$\begin{aligned}\log [\mathcal{Z}/[2 \sinh(2K)]^{NM/2}] &= \frac{NM}{2} \log(2/\sinh 2K) \\ &+ \frac{NM}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi_2 \log[\cosh^2 2K - 2 \sinh 2K \cos \phi_1 \cos \phi_2]\end{aligned}$$

定义 $\kappa \equiv 2 \sinh 2K / \cosh^2 2K$, 则有

$$\begin{aligned}\log [\mathcal{Z}/[2 \sinh(2K)]^{NM/2}] &= NM \log 2 - \frac{NM}{2} \log \kappa \\ &+ \frac{NM}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi_2 \log[1 - \kappa \cos \phi_1 \cos \phi_2] \\ &= NM \log 2 - \frac{NM}{2} \log \kappa + \frac{NM}{2\pi^2} \int_0^{\pi} d\phi_1 \int_0^{\pi} d\phi_2 \log[1 - \kappa \cos \phi_1 \cos \phi_2]\end{aligned}\quad (85)$$

这就是我们的**核心结果**。

回过头来简单说一下数学恒等式(82)的证明，这又是用到如下恒等式(请自行证明): 对于 $|r| \leq 1$ ，有

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 + re^{i\theta}) d\theta = 0. \quad (86)$$

从而对于 $x > 0$ ，可令 $r = e^{-x}$ ，从而

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log[2 \cosh x - 2 \cos \omega] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log[e^x + e^{-x} - 2 \cos \omega] d\omega \\ &= x + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log[1 - 2r \cos \omega + r^2] d\omega \\ &= x + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 - re^{i\omega})(1 - re^{-i\omega}) d\omega \\ &= x + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 - re^{i\omega}) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 - re^{-i\omega}) d\omega \\ &= x. \end{aligned} \quad (87)$$

得证!

4 Grassmann变量积分方法

1980年，Stuart Samuel 给出了也许是最简单优雅的二维伊辛模型精确解推导。他使用Grassmann 变量的Berezin 积分，将该问题表述为一个自由费米子路径积分模型。相关的Grassmann 作用量是二次型的，因此可以通过著名的高斯积分公式来求解。不过，Stuart Samuel的这个工作本质和Berezin 1969年的一篇论文是一样的，只是Berezin的论文由于发表在苏联而长期被人们忽视了。

让我们仿照Samuel 的原始工作，从两维Ising模型的低温展开开始。根据(8)式，这时配分函数可以写成

$$\mathcal{Z}(K) = 2z^{-N} \sum_{\Gamma} z^{L(\Gamma)}. \quad (88)$$

式中 $z = e^{-2K}$ 。式中的求和是对对偶格子上的畴壁求和，它们是对偶格子上不交叉重叠的多边形闭合回路。也即是说，伊辛模型的每个构型对应于一个特定的畴壁构型。因此，对所有畴壁构型求和等价于对所有自旋态求和，除了一个2重简并，因为每个畴壁构型对应2个可能的自旋构型。

上面的回路 Γ 由仅连接对偶格子上最近邻格点的边组成，称每一条这样的边为布洛赫壁，显然，它可以是水平向的，也可以是竖直向的。对于每个这样的“闭合图” Γ ，都有相应的有向图，其中链接是有方向的。由于任何这样的有向图中每条边(每个布洛赫壁)最多出现一次，但从不出现在两次或更多次，而且每条边都有两个端点，因此，我们可以通过为每条边分配一对Grassmann 变量(分别对应两个端点)来枚举这样的闭合有向图。

Samuel的核心想法是，将上面这种低温展开转换成对Grassmann 变量的Berezin 积分。关于这种Berezin 积分的详细讨论请读者问人工智能或者参阅相关文献。这里只给一个简单回顾，假设有 N 个相互反对易的Grassmann 变量 $\eta_i, (i = 1, 2, \dots, N)$ 。则由于幂零性 $(\eta_a)^2 = 0$ ，可以将这些变量的任意函数 $f(\eta)$ 级数展开成

$$f = a_0 + \sum_i a_i \eta_i + \sum_{i < j} a_{ij} \eta_i \eta_j + \dots + a_{12\dots N} \eta_1 \eta_2 \dots \eta_N. \quad (89)$$

则Berezin 积分的定义是

$$\int d\eta f(\eta) = \int d\eta_1 d\eta_2 \dots d\eta_N f(\eta) \equiv a_{12\dots N}. \quad (90)$$

称作， f 级数展开的 $a_{12\dots N}$ 项使得Berezin 积分饱和。

我们将利用Grassmann 变量的两个性质。第一个性质是反对易性，因此Grassmann 变量的平方为零。这种幂零性 (nilpotency) 可以用来对每个畴壁单元计数不超过一次。我们将利用的第二个性质的Berezin 积分特有的特征。回想一下，只有当被积函数中的Grassmann 变量与积分变量完全匹配或对应时，Berezin 多重积分才不为零。如果有一个积分变量不匹配，整个多重积分就消失，因为对于任何没有匹配的Grassmann 变量 θ 的Berezin 积分 $\int d\theta = 0$ 。从现在开始，如果所有积分变量都被被积函数变量匹配，我们将说被积函数饱和 (saturates) 了Berezin 积分。因此，第二个性质的多重Berezin 积分能够仅选择饱和积分的项的能力。

关键部分

让我们定义一个修改的配分函数：

$$\mathcal{Z}' = \sum_{\Gamma} z^{L(\Gamma)}. \quad (91)$$

使得 $\mathcal{Z} = 2z^{-N}\mathcal{Z}'$ 。因此，我们今后的目标是计算 \mathcal{Z}' 。为此，我们将使用 Grassmann 变量和 Berezin 积分。

让我们在对偶格子的每个格点 x 上定义一对垂直方向的 Grassmann 变量 $\eta_{+1}(x), \eta_{-1}(x)$ ，以及另一对水平方向的 Grassmann 变量 $\eta_{+2}(x), \eta_{-2}(x)$ 。对于一个给定的格点，我们约定

$$\int d\eta_{-1}d\eta_{+1}\eta_{-1}\eta_{+1} = 1. \quad (92)$$

我们宣称 \mathcal{Z}' 可以由如下 Berezin 积分得到(稍后会作论证)：

$$\mathcal{Z}' = (-1)^N \int e^S \prod_x d\eta_{-1}(x)d\eta_{+1}(x)d\eta_{-2}(x)d\eta_{+2}(x). \quad (93)$$

式中 S 是上面引入的 Grassmann 变量的二次型，由于每个不重叠回路 Γ 由 (i) 连接对偶晶格上相邻格点的边（布洛赫壁单元），(ii) 畴壁穿过该格点的边格点，以及 (iii) 水平和竖直两种布洛赫壁相交成一个拐角的拐角格点组成。所以 S 可以分解成三部分之和 $S = S_L + S_M + S_C$ 。(i) 布洛赫壁或“线”项 S_L ，(ii) “单体”（monomer）项 S_M ，以及 (iii) 拐角项 S_C 。

技巧的实质是将适当选择的作用量指数化。有限个 Grassmann 变量函数的泰勒级数是一个多项式（由于幂零性）。这个多项式可以编码各种图以及图的部分的其他奇怪组合，例如孤立拐角或单体。然后，通过 Berezin 积分，我们可以仅选择饱和积分的项。如果作用量选择得当，饱和项就精确对应于非重叠的布洛赫畴回路。

上述布洛赫壁项的定义如下：

$$S_L = z \sum_x [\eta_{+1}(x)\eta_{-1}(x + \hat{1}) + \eta_{+2}(x)\eta_{-2}(x + \hat{2})], \quad (94)$$

其中 $\hat{1}$ 表示沿着垂直方向移动一个格距， $\hat{2}$ 表示沿着水平方向移动一个格距。其中 $\eta_{+1}(x)\eta_{-1}(x + \hat{1})$ 是用来计数一个布洛赫垂直壁，而 $\eta_{+2}(x)\eta_{-2}(x + \hat{2})$ 是用来计数水平壁。

单体项则非常简单。我们希望单体项“什么都不做”，即仅在需要时贡献因子1。根据约定(92)，因此我们简单地得到：

$$S_M = \sum_x [\eta_{-1}(x)\eta_{+1}(x) + \eta_{-2}(x)\eta_{+2}(x)] \quad (95)$$

所谓的“单体”项由2个水平或2个垂直变量组成，它们表示相应边的缺失。一个格点处的单个单体项表示在相应方向上穿过该格点的畴壁不存在(请读者细想一下这是为什么)，同一格点处的两个单体项表示在水平和竖直两个方向上穿过该格点的畴壁都不存在，从而该格点是一个内点，即不在畴壁上的格点。

为了与上述两个定义保持一致，拐角项必须定义为：

$$S_C = \sum_x [\eta_{+1}(x)\eta_{-2}(x) + \eta_{+2}(x)\eta_{-1}(x) + \eta_{+2}(x)\eta_{+1}(x) + \eta_{-2}(x)\eta_{-1}(x)] \quad (96)$$

要理解原因，考虑沿着先水平向前再垂直向前的路径形成的拐角。因此你有2个布洛赫壁段在拐角处相遇。为了计数此拐角，我们希望先饱和水平壁，然后饱和垂直壁。水平壁贡献 $\eta_{+2}(x - \hat{2})\eta_{-2}(x)$ ，垂直壁贡献 $\eta_{+1}(x)\eta_{-1}(x + \hat{1})$ 。所以我们想用拐角因子 $\eta_{+2}(x)\eta_{-1}(x)$ 来饱和该格点 x 处的Berezin积分。这是拐角作用量中的第2项。其他3项可以类似地推导出来。

注意，拐角项和单体项每个格点有偶数个Grassmann变量，而线项在两个相邻格点上每个只有一个Grassmann变量。因此，为了饱和Berezin积分，偶数个线项（因此是0、2或4个）必须在给定格点处汇合。固定格点 x 处的Berezin积分只能通过以下方式饱和：

- 两个单体项，一个水平和一个垂直。
- 两条线(均垂直或均水平)和一个单体项(表示另一个方向的线缺失)。
- 两条线(一条水平一条垂直)和一个拐角。
- 四条线。

以下在任何格点处都是被禁止的：1. 奇数条线（因为没有办法饱和缺失的Grassmann变量）。2. 一个拐角和一个单体（因为一个Grassmann变量必然重复，因此幂零性杀死该项，类似地一个变量缺失，也导致零）。

还有另一种有趣的情况：没有线的2个拐角项。在这种情况下，格点处的每个Grassmann变量恰好出现一次，因此这样的项确实有贡献。而且，每个这样的项都与具有另外两种拐角的项匹配。例如，双拐角项 $[\eta_{+1}(x)\eta_{-2}(x)][\eta_{+2}(x)\eta_{-1}(x)]$ 与 $[\eta_{-2}(x)\eta_{-1}(x)][\eta_{+2}(x)\eta_{+1}(x)]$ 匹配。但是，不难看出：

$$[\eta_{-2}(x)\eta_{-1}(x)][\eta_{+2}(x)\eta_{+1}(x)] = +\eta_{+1}(x)\eta_{-2}(x)\eta_{+2}(x)\eta_{-1}(x)$$

因此，结合2个拐角的两种方式导致双倍的贡献。但前一个双拐角实际上是有两个单体的项的负值：

$$[\eta_{+1}(x)\eta_{-2}(x)][\eta_{+2}(x)\eta_{-1}(x)] = -\eta_{-1}(x)\eta_{+1}(x)\eta_{-2}(x)\eta_{+2}(x).$$

因此，在每一个格点上，双单体项加上两种双拐角项的总贡献为 $+1 - 2 = -1$ 。由于回路上的格点总数必定为偶数，所以假设共有 N 个格点，其中 N' 个不在回路上，则必有 $(-1)^{N'} = (-1)^N$ 。这解释了公式(93)前面那个 $(-1)^N$ 因子的来源。

综合上面的讨论，并注意到最后，由于每一个畴壁单元有一个权重 z ，所以整个闭合回路 Γ 的总权重就是 $z^{L(\Gamma)}$ ，可知关键的(93)式成立。这样我们就成功地将计算二维伊辛模型配分函数的问题转换成了一个计算Berezin积分的问题。

其实，我们可以把(93)式前面的因子 $(-1)^N$ 吸收掉，吸收的办法就是在每个格点上多加一个因子 -1 。很显然，这相当于把 S_C 和 S_M 等式右边都整体地加个负号。

结果将证明，对于二维伊辛模型，作用量 S 是一个二次型，因此我们本质上有一个自由费米子模型。具体而言，二次型作用量通过傅里叶变换被“对角化”，立即导出Onsager最初发现的精确解。在所有求解伊辛模型的方法中，这种方法也许是最简单、最美丽且最强大的。而且，可以证明，对于三维的立方晶格，人们得到的将是一个包含四费米子相互作用项的作用量，正如该领域的专家所熟知的那样。因此，在这个意义上，三维伊辛模型并不直接等价于自由费米子模型，而是等价于相互作用费米子模型。

Berezin 积分的计算

二次型作用量 S 具有平移不变性，因此可以利用傅里叶变换来将其对角化。为此，定义

$$\eta_i(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ik \cdot x} \hat{\eta}_i(k). \quad (97)$$

式中 $k = k_x \hat{1} + k_y \hat{2}$ ，其中

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{N_x}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{N_y}, \quad (98)$$

式中 N_x, N_y 分别为格子的行数和列数， $N_x N_y = N$ 。为了方便起见，通常取 $N_x = 2l_x + 1$ ， $N_y = 2l_y + 1$ ，从而可以取

$$\begin{aligned} n_x &= -l_x, -l_x + 1, \dots, l_x - 1, l_x \\ n_y &= -l_y, -l_y + 1, \dots, l_y - 1, l_y. \end{aligned}$$

由于傅里叶变换的么正性，不难验证，傅里叶变换之后的 $\hat{\eta}_\alpha(k)$ 也是反对易的Grassmann 变量。而且，同样是由于傅里叶变换的么正性，也不难验证

$$\prod_x d\eta_{-1}(x) d\eta_{+1}(x) d\eta_{-2}(x) d\eta_{+2}(x) = \prod_k d\hat{\eta}_{-1}(k) d\hat{\eta}_{+1}(k) d\hat{\eta}_{-2}(k) d\hat{\eta}_{+2}(k). \quad (99)$$

所以，为了算出(93)式的Berezin 积分，我们只需要将作用量 S 用傅里叶变换之后的 $\hat{\eta}_\alpha(k)$ 来表达，并算出相应的Berezin 积分即可。

注意到作用量在 η 中是二次的。具体来说，作用量是Grassmann 变量中的二次型，我们可以写成：

$$S = \sum_{x,y,i,j} \eta_i(x) A_{ij}(x,y) \eta_j(y). \quad (100)$$

我们将在下面显式定义 $A_{ij}(x,y)$ ，但暂时我们不必担心它，只需注意它只是一个矩阵。注意，对于固定的一对不一定不同的位点 x 和 y ， A 是一个真正的 (4×4) 矩阵，只有两个指标。类似地，对于固定的 i, j ， A 是一个 $N \times N$ 矩阵。我们将对位点变量 x, y 应用傅里叶变换，注意到作用量具有内积的形式，并且通过傅里叶变换的么正性，可以将作用量重写为：

$$S = \sum_{k,k',i,j} \hat{\eta}_i^*(k) \hat{A}_{ij}(k,k') \hat{\eta}_j(k'). \quad (101)$$

我们这里所做的只是应用了Plancherel 定理，有时也称为Parseval 定理。带帽符号表示傅里叶变换后的量。

二维Ising 模型的平移不变二次型作用量只连接相邻位点。作用量的唯一非对角部分是由于这种到相邻位点的平移。但在傅里叶变换后，我们消除了平移，获得了一个在傅里叶变换后变量 k 中对角的作用量。换句话说， $\widehat{A}_{ij}(k, k') = \widehat{A}_{ij}(k, k)\delta_{k, k'}$ ，其中 $\delta_{k, k'}$ 是Kronecker delta 符号。

让我们引入更紧凑的符号以使计算更容易。让我们定义向量：

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_{-1} \\ \eta_{+1} \\ \eta_{-2} \\ \eta_{+2} \end{bmatrix}. \quad (102)$$

对 $\widehat{\eta}$ 也类似。那么我们可以写成：

$$S = \sum_{x, y} \eta^T(x) A(x, y) \eta(y). \quad (103)$$

上标 T 表示转置。矩阵 A_C 和 A_M 由(96)和(95)给出，且在位点指标 x, y 中是对角的，考虑到吸收 $(-1)^N$ 因子后：

$$A_C(x, y) = -\delta_{x, y} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (104)$$

$$A_M(x, y) = -\delta_{x, y} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

矩阵 A_L 由(94)给出，它在位点指标中不是对角的，因为它连接相邻位点：

$$A_L(x, y) = z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{x+1, y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{x+2, y} & 0 \end{bmatrix}. \quad (105)$$

用 $\hat{\eta}$ 来表示，我们可以将作用量写成：

$$S = \sum_k \hat{\eta}^\dagger(k) \hat{A}(k, k) \hat{\eta}(k). \quad (106)$$

求和现在只对单个指标 k 的原因是 A 具有平移不变性，应用Parseval定理允许我们将位点平移转换为相位，因此 $\hat{A}(k_1, k_2) = \delta_{k_1, k_2} \hat{A}(k_1, k_1)$ 。换句话说， \hat{A} 在傅里叶变量（如 k ）中是对角的。

作为一个说明性例子，让我们显式地展示最后这一点。考虑 $\sum_y C(x, y) \eta(y)$ 的傅里叶变换，其中 $C(x, y) = C_0 \delta_{x+\hat{1}, y}$ 是平移不变的：

$$\begin{aligned} \sum_x e^{-ik \cdot x} \sum_y C(x, y) \eta(y) &= \sum_x e^{-ik \cdot x} \sum_y C_0 \delta_{x+\hat{1}, y} \eta(y) \\ &= \sum_x e^{-ik \cdot x} C_0 \eta(x + \hat{1}) \\ &= \sum_{x'} e^{-ik \cdot (x' - \hat{1})} C_0 \eta(x') \\ &= e^{ik \cdot \hat{1}} C_0 \sum_{x'} e^{-ik \cdot x'} \eta(x') \\ &= e^{ik_x} C_0 \hat{\eta}(k). \end{aligned} \quad (107)$$

因此 $\hat{A}(k, k)$ 在之前解释的意义上是对角的。它很容易计算为：

$$\hat{A}(k, k) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ ze^{ik_x} & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & ze^{ik_y} & 0 \end{bmatrix}. \quad (108)$$

注意到作用量中出现了共轭转置变量 $\hat{\eta}^\dagger(k)$ 。我们需要处理这个问题。由于 $\eta(x)$ 原则上是一个“实”Grassmann变量，其傅里叶变换满足 $[\hat{\eta}(k)]^* = \hat{\eta}(-k)$ 。实函数傅里叶变换的这一“厄米”性质允许我们将作用量写成：

$$S = \sum_k \hat{\eta}^T(-k) \hat{A}(k, k) \hat{\eta}(k). \quad (109)$$

我们可以显式地计算所需的Berezin积分。但需要一些小心。观察到作用量“混合”了频率 k 和 $-k$ 。当我们将上述作用量中和的指数重写为各项的指数的乘积时，这些指数不仅包含构成向量 $\hat{\eta}(k)$ 的4个Grassmann变量，还包含 $\hat{\eta}(-k)$ 中的另外4个变量。因此完整的Berezin积分不是

分解为对4个变量的Berezin积分，而是对8个变量的积分。因此我们将Grassmann微分重新分组为8个一组，而不是4个一组，如下所示：

$$\prod_k d\hat{\eta}_{-1}(k)d\hat{\eta}_{+1}(k)d\hat{\eta}_{-2}(k)d\hat{\eta}_{+2}(k) = \prod_{k \geq 0} d\hat{\eta}(k)d\hat{\eta}(-k). \quad (110)$$

(这里我们稍微滥用一点符号，写 $k \geq 0$ 表示 $k > 0$ 和 $-k > 0$ 不会同时包含在连乘中) 式中

$$d\hat{\eta}(k)d\hat{\eta}(-k) \equiv d\hat{\eta}_{-1}(k)d\hat{\eta}_{+1}(k)d\hat{\eta}_{-2}(k)d\hat{\eta}_{+2}(k)d\hat{\eta}_{-1}(-k)d\hat{\eta}_{+1}(-k)d\hat{\eta}_{-2}(-k)d\hat{\eta}_{+2}(-k).$$

为了正确地分解完整的Berezin积分，我们需要收集所有含 k 和 $-k$ 的项，这可以通过将作用量中的求和重写为 k 的一半值来实现。我们用 $k \geq 0$ 表示 $k > 0$ 和 $-k > 0$ 不会同时包含在求和中。使用这个符号，我们有：

$$e^S = \prod_{k \geq 0} \exp \left[\hat{\eta}^T(-k)\hat{A}(k, k)\hat{\eta}(k) + \hat{\eta}^T(k)\hat{A}(-k, -k)\hat{\eta}(-k) \right]. \quad (111)$$

如果我们定义：

$$B(k) = \hat{A}(k, k) - \hat{A}^T(-k, -k). \quad (112)$$

那么可以将作用量写成：

$$S = \sum_{k \geq 0} \hat{\eta}^T(-k)B(k)\hat{\eta}(k). \quad (113)$$

完整的Berezin积分现在可以写成：

$$\mathcal{Z}' = \prod_{k \geq 0} \int \exp \left[\hat{\eta}^T(-k)B(k)\hat{\eta}(k) \right] d\hat{\eta}(k)d\hat{\eta}(-k). \quad (114)$$

每个Berezin积分因子都是一个高斯积分。回忆一下，对于Grassmann数 x_i 和 y_i 以及复矩阵 A ：

$$\int e^{\sum_{ij} x_i A_{ij} y_j} dx dy = \det(A). \quad (115)$$

因此：

$$\mathcal{Z}' = \prod_{k \geq 0} \det B. \quad (116)$$

移除对 $k \geq 0$ 的限制, 我们有:

$$\mathcal{Z}' = \prod_k \sqrt{\det B}. \quad (117)$$

忽略非延展的 $\log(2)$, 我们有:

$$\log(\mathcal{Z}) = -N \log(z) + \log \mathcal{Z}' = -N \log(z) + \frac{1}{2} \sum_k \log \det B. \quad (118)$$

在热力学极限下, 求和变为积分, 因此:

$$\log(\mathcal{Z}) = -N \log(z) + N \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \log \det B. \quad (119)$$

反对称矩阵 B 不难求出来, 为:

$$B(k) = \begin{bmatrix} 0 & -(1 + ze^{-ik_x}) & 1 & 1 \\ (1 + ze^{ik_x}) & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -(1 + ze^{-ik_y}) \\ -1 & -1 & (1 + ze^{ik_y}) & 0 \end{bmatrix}. \quad (120)$$

其行列式为:

$$\det B = (1 + z^2)^2 - 2z(1 - z^2)(\cos k_x + \cos k_y). \quad (121)$$

代入上面的积分, 即可以得到配分函数的表达式:

$$\begin{aligned} \log(\mathcal{Z}) &= -N \log(z) + \\ &N \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \log [(1 + z^2)^2 - 2z(1 - z^2)(\cos k_x + \cos k_y)] \\ &= N \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \log [(z^{-1} + z)^2 - 2(z^{-1} - z)(\cos k_x + \cos k_y)]. \end{aligned} \quad (122)$$

在最后的結果中代入 $z = e^{-2K}$, 不难看出这个結果正与上一节的结果(84)完全一致。

我们完成了! (84)和(122)就是Onsager 著名的結果!

三维Ising 模型

自从1944年Onsager发表他的开创性论文以来，多年来人们提出了许多针对三维或立方Ising模型的tentative精确解猜想。如前所述，立方Ising模型的Grassmann作用量是四次的。在量子场论中，四次Grassmann作用量与相互作用费米子模型相关联，而二次作用量与自由费米子模型相关联。后者可以通过Pfaffian和行列式公式轻松求解，就像我们上面所做的那样，但目前还没有已知的方法能够给出具有四次Grassmann作用量的晶格模型的精确解（在热力学极限下）。因此，任何声称对立方Ising模型有精确解的人都必须解释他们如何克服处理四次作用量的数学困难，或者至少解释新方法如何绕过这一数学障碍。

Barry Cipra在《科学》杂志的一篇文章中，将三维Ising问题称为“统计力学的圣杯”。该文章列出了我们可能永远无法实现找到立方Ising模型显式精确解目标的许多其他原因。立方Ising模型的精确解也许是一个不可能的问题！

5 参考文献

1. Two-Dimensional Ising Model as a Soluble Problem of Many Fermions, T. D. SCHULTZ, D. C. MATTIS, and E. H. LIEB, Rev. Mod. Phys. 36, 856 - Published 1 July, 1964, DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.36.856>
2. Samuel, Stuart (1980). "The Use of Anticommuting Integrals in Statistical Mechanics. 1". J. Math. Phys. 21 (12): 2806 - 2814. Bibcode:1980JMP....21.2806S. doi:10.1063/1.524404.
3. Samuel, Stuart (1980). "The Use of Anticommuting Integrals in Statistical Mechanics. 2". J. Math. Phys. 21 (12): 2815. Bibcode:1980JMP....21.2815S. doi:10.1063/1.524405.
4. Samuel, Stuart (1980). "The Use of Anticommuting Integrals in Statistical Mechanics. 3". J. Math. Phys. 21 (12): 2820. Bibcode:1980JMP....21.2820S. doi:10.1063/1.524406
5. F. A. Berezin, The Plane Ising Model, Russ. Math. Surv. 24, 1 (1969).