

微观可逆性与宏观不可逆性

陈童

October 20, 2025

你只见过杯子从桌子上摔下来，落在地上，碎成一地。但是，与之相反的逆过程，地上的碎玻璃自动聚合起来，组合成一个完整的杯子并飞回桌面，你从来没有见过。电影倒着放会引人发笑，因为所有人都知道银幕上发生的一切不合常理。宏观世界是不可逆的，对此人们习以为常。然而深研物理的那些人无不对此陷入深思，因为他们知道，宏观世界是由微观粒子组成的，而微观粒子所满足的哈密顿力学方程却是时间可逆的。不是吗，一个粒子受力在空中飞舞，拍成影片倒着放，依然是一个粒子在空中飞舞，只不过粒子的动量反向了，粒子是在倒着飞，对此，没有人会发笑，因为没有任何不合常理的地方。那么，为什么当粒子的数目到达阿伏加德罗常数的宏观量级，即 10^{23} 个的量级，倒放的电影就不合常理了呢？微观世界的可逆性如何转变成宏观世界的不可逆性了呢？

此问题之所以重要，因为它牵涉到过去和未来的区别如何产生。微观世界时间可逆，因此微观粒子不会感受到过去和未来有任何区别，过去和未来的区别完全是宏观世界的现象，虽然它对于我们人类这样的宏观物体来说是如此根本。对于宏观世界而言，时间只能从过去走向未来，不能反过来，否则，即使只是电影，也足以使我们发笑。那么，这个区别是如何产生的呢？

这个问题最容易在经典力学和经典统计力学的框架下澄清。为此假设我们考虑一个由 N 个粒子所构成的孤立系统 \mathcal{S} ，所谓孤立系统，即指这些粒子与外界没有相互作用，包括没有物质和能量的交换。这里 N 当然要是一个超过 10^{23} 量级的宏观数目。实际上， N 如此之大，以至于我们可以认为系统中每一个宏观小局部中都还包含了了大量的微观粒子，有时候也称这

样的宏观小局部为“物理小”，即宏观上看很小，但微观上看其实依然很大。这种物理小局部的存在反映了本问题的一个核心特征，即在宏观尺度与微观尺度之间存在一个“天堑”！

1 基础知识

记系统 \mathcal{S} 的微观状态为 X ，它由系统中各粒子的位置和动量刻画，即 $X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_N)$ ，式中 \mathbf{x}_i 为 i 粒子的位置矢量， \mathbf{p}_i 为其动量。系统所有可能微观状态所构成的空间称作相空间，记作 \mathcal{M} ，因此 X 就是 \mathcal{M} 中的点。很显然， \mathcal{M} 是一个 $6N$ 维空间，由于 N 是一个巨大的数字，所以 \mathcal{M} 是一个极端高维的空间。

系统的微观动力学可以由如下哈密顿正则方程描述

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i}. \quad (1)$$

其中 $H(X)$ 为系统的哈密顿量，也就是总能量，通常具有如下形式

$$H(X) = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N), \quad (2)$$

这里 U 为粒子间的相互作用势能。哈密顿正则方程的解描述的就是系统在相空间中的演化过程。

对于某个任意的初始条件 X_0 ，记哈密顿正则方程相应的解为 $X_t = (\dots, \mathbf{x}_i(t), \mathbf{p}_i(t), \dots)$ ，它描述的是一条从 X_0 点发出的相轨迹。我们可以抽象地把这个解简记为

$$X_t = g_t X_0, \quad (3)$$

式中 g_t 称作相流，它是一个抽象的运算， g_t 作用在初始相点 X_0 上，即得到 t 时刻的相点 X_t ，换言之， g_t 的抽象作用所产生的，就是系统在相空间的时间演化。很显然， g_0 应该是一个恒等作用，不妨记作

$$g_0 = 1. \quad (4)$$

假设我们把时间平移一下，从 s 时刻开始演化一段时间 t (即演化到 $t + s$ 时刻)，则应该有 $X_{t+s} = g_t X_s = g_t g_s X_0$ ，另一方面，我们也可以直接从0时刻演化到 $t + s$ 时刻，从而有 $X_{t+s} = g_{t+s} X_0$ ，两者一比较，即有

$$g_t g_s = g_{t+s}. \quad (5)$$

特别的， $g_t g_s = g_s g_t$ 。也即是说，相流 g_t 是相空间的一个单参变换群，而且是一个阿贝尔群，群的乘法由相流的抽象作用决定。

记相空间的体积元为

$$dX \equiv \prod_{i=1}^N \frac{d^3 \mathbf{x}_i d^3 \mathbf{p}_i}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (6)$$

式中常数 \hbar 的引入是为了使得整个体积元无量纲化(它实际上就是普朗克常数)。则，著名的刘维尔定理告诉我们

$$dX_t = dX_0, \quad (7)$$

即在相流的作用下，相空间体积元保持不变！关于这个定理的证明，请读者参阅统计物理的教科书。

假设我们在相空间中任取一个区域 D_0 ，记它的体积为 $\text{Vol}(D_0)$ ，并记在相流的作用下，这个区域在 t 时刻演化成 D_t ，即 $D_t = g_t D_0$ ，则刘维尔定理告诉我们

$$\text{Vol}(D_t) = \text{Vol}(D_0). \quad (8)$$

即在时间演化之下，相空间的体积保持不变。这是因为

$$\text{Vol}(D_t) = \int_{D_t} dX_t = \int_{D_0} \det\left(\frac{\partial X_t}{\partial X_0}\right) dX_0 = \int_{D_0} dX_0 = \text{Vol}(D_0). \quad (9)$$

式中我们注意到，由于刘维尔定理的(7)式，雅可比行列式 $\det\left(\frac{\partial X_t}{\partial X_0}\right)$ 其实等于1。

现在考虑 $t \rightarrow -t$ 的时间反演，我们记微观状态 X 的时间反演态为 \bar{X} 。很显然，在时间反演之下，粒子的动量会反向，即 $\mathbf{p}_i \rightarrow -\mathbf{p}_i$ ，从而

$$\bar{X} = (\mathbf{x}_1, -\mathbf{p}_1, \mathbf{x}_2, -\mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{x}_N, -\mathbf{p}_N). \quad (10)$$

从(2)式不难看出，系统的哈密顿量是时间反演不变的，即满足

$$H(\overline{X}) = H(X). \quad (11)$$

进而不难看出，哈密顿正则方程(1)也是时间反演不变的！这正好说明系统的微观力学具有时间可逆性。

假设在 t_0 时刻取系统的一个微观态 X_{t_0} ，让它演化一段时间 τ ，则会得到 $t_0 + \tau$ 时刻的微观态 $X_{t_0+\tau}$ 。微观力学的可逆性意味着，假设我们在 $t_0 + \tau$ 时刻反转所有粒子的动量，进而得到 $\overline{X_{t_0+\tau}}$ ，然后让系统接着再演化一个 τ 时间，则系统将逆向演化，最终 $t_0 + 2\tau$ 时刻的微观态正好回归到 $\overline{X_{t_0}}$ 。

直观的道理

设想一个密闭的刚性盒子，里面装有6个微观粒子，盒子正中有一张隔板将盒子均分成两半，初始时这6个粒子都处于左边那半。现在，将中间的隔板移开，那么这6个粒子由于相互之间的碰撞以及与盒壁的碰撞，就会逐渐地从左半边盒子扩散到右半边。然而，如果你有一点耐心，那么不需要等上几天，你就能发现，偶尔的，这6个粒子也会全部跑回左半边盒子。也即是说，如果粒子的数目不多，那么扩散过程就是可逆的。但是，如果粒子的数目达到 10^{23} 个，那么你就只会观察到粒子从左边扩散到右边，即使你等到天荒地老宇宙毁灭，也不会见到所有的粒子又自动跑回左半边盒子。因此，对于宏观数目的粒子，扩散过程就不可逆了。

少数几个粒子和宏观数目的粒子为什么会引起这么大的区别呢？简单的回答是，这是一个概率问题，碰撞着的粒子总有概率从分布于整个盒子跑回到左半边盒子，问题是，如果粒子数目很少，那么这个概率是可观的，以至于你无需等上几天就能观察到这个现象。但是，如果粒子的数目达到 10^{23} 个，那么这个概率将极端接近于零，大约在 $2^{-10^{23}}$ 量级(每个粒子都有 $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ 的概率回到左边)，因此，即使你等到宇宙毁灭，也不会有机会观察到它发生一次。特别的，在 $N \rightarrow +\infty$ 的所谓热力学极限之下，相应的概率将无限接近于零，这时扩散过程就变成100%不可逆的。

下面我们要做的，就是按照玻尔兹曼的思路，将这个关于微观可逆性与宏观不可逆性的直观道理发展成一个系统的理论。

2 宏观不可逆性的起源

考虑黑白两种不同颜色的墨水分别占据一个密闭盒子的左右两半，移开中间的隔板让两种墨水扩散混合的过程。如图(1)是对这个过程的四张快照，我们的任务是，判断这四张快照的时间顺序。

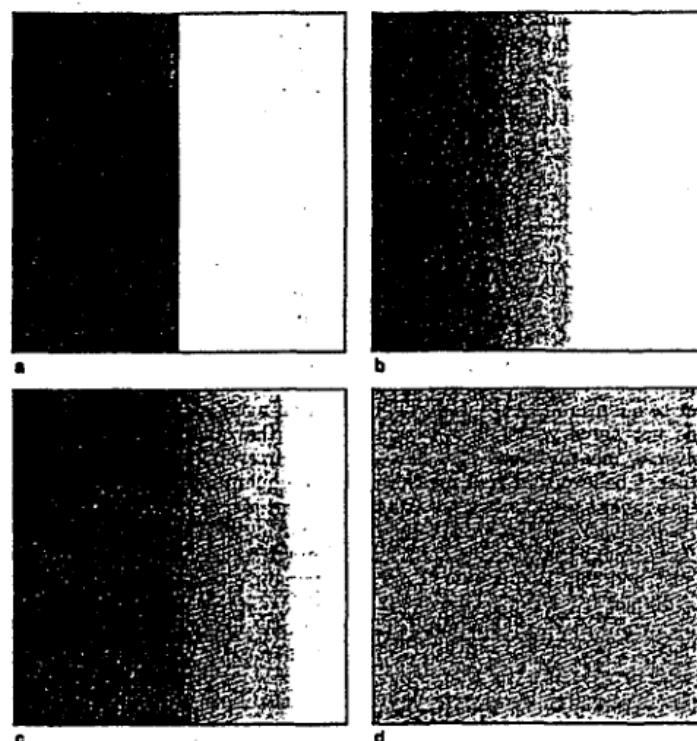


Figure 1: 墨水扩散混合过程的四张快照。墨水是在一个密闭盒子里，左右两半墨水的颜色不同。

任何一个有生活经验的人都很容易判断出，这四张快照的正确时间顺序是从 a 到 d ，即 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$ 。因为我们从来没有见过相反的顺序。然而，正如前文所说，微观墨水分子的运动其实是可逆的，如果 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$ 的顺序可以发生，那么把所有墨水分子的运动方向反过来，就会有相反的 $d \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a$ 的顺序同样可以发生。那么我们为什么没有见过混合均匀的两种墨水分子自动分离的这种逆过程呢？

记墨水分子系统的微观状态为 X , 很显然, 图(1) 中的快照不能完全地刻画 X , 快照只是对 X 的粗略刻画, 我们称之为系统的宏观态, 记作 $M(X)$, 表示与微观态 X 相对应的系统宏观状态。完全可以设想很多微观细节不同甚至差异甚大的系统微观态 X 所拍出来的快照是分辨不出差异的, 从而对应同一个宏观态 M 。比方说, 快照无法分辨每一个物理小局部的微观细节。再比方说, 很显然, 快照不能反映墨水分子的运动方向, 因此在我们这个快照的例子中, X 和 \bar{X} 所对应的宏观态必定相同, 也即是说 $M(X)$ 是时间反演不变的。

总之, 我们通过快照来定义系统的宏观态, 一张快照对应很多不同的微观态, 根据这个定义, 宏观态 M 当然就可以等同为相空间 \mathcal{M} 的某个子集, 记作 $M \subset \mathcal{M}$, 对应于同一张快照的所有微观态 X 就构成这个子集的所有相点。而且由于 M 时间反演不变, 所以我们可以把 M 中任何互为时间反演的一对微观态分别归入子集 M^+ 和 M^- 中, 进而即可以把 M 进一步分解成 M^+ 和 M^- 的并, $M = M^+ \cup M^-$, 其中 M^+ 和 M^- 互为对方的时间反演, 即 $M^- = \overline{M^+}$ 。如何用数学语言精确地指定快照所对应的宏观态(子集) M 是一个问题, 不过, 只要宏观尺度与微观尺度之间存在巨大的差异, 那么我们对宏观态 M 的时间演化所做的所有定性描述, 其实都与其精确指定无关。

假设 t_1 时刻的宏观态 M_1 在 $t_2 = t_1 + \tau$ 时刻演化成宏观态 M_2 , 这句话的含义是什么呢? 含义是, 在宏观态 M_1 中有某个微观态 $X \in M_1$, 如果让系统从这个微观态开始演化一段时间 τ , 记所得的微观态为 Y , 那么, Y 属于 $t_2 = t_1 + \tau$ 时刻的宏观态 M_2 , $Y \in M_2$ (注意, 按照微观动力学进行演化的永远只有微观态)。不妨设 $X \in M_1^+$, $Y \in M_2^+$ 。则根据微观动力学的可逆性, 假设我们在 t_2 时刻从微观态 $\bar{Y} \in M_2^- \subset M_2$ 出发, 让系统接着再逆向演化一个 τ 时间, 最终的微观态将正好回归到 $\bar{X} \in M_1^- \subset M_1$ 。因此, 根据微观动力学, 前面四张快照 M_a, M_b, M_c, M_d 的时间顺序完全是可逆的, 可以是 $M_a \rightarrow M_b \rightarrow M_c \rightarrow M_d$, 但只需要将所有墨水分子的动量反过来, 完全也可以是 $M_d \rightarrow M_c \rightarrow M_b \rightarrow M_a$ 。

所以, 我们对四张快照时间顺序的确定并不是根据微观动力学, 而是根据我们的经验, $M_a \rightarrow M_b \rightarrow M_c \rightarrow M_d$ 的顺序符合我们的经验, 而 $M_d \rightarrow M_c \rightarrow M_b \rightarrow M_a$ 的顺序我们从来没有见过, 即使从微观动力学的

角度它同样可能。要回答的问题是，我们何以有此经验？

为了回答这个问题，我们先试着弄清楚一个宏观态 M 中具体包含的微观态数目 Γ_M 有多少？很显然，这可以用集合 M 的相空间体积 $\text{Vol}(M)$ 来衡量，即

$$\Gamma_M \equiv \text{Vol}(M). \quad (12)$$

比如对于上面四张快照中的 M_a 和 M_d ，由于在 M_a 中每个墨水分子的运动范围是盒子的一半，而在 M_d 中每个墨水分子的运动范围是整个盒子，根据相空间体积的定义(其中需要对每个粒子占据的空间范围积分)，不难看出

$$\Gamma_{M_d}/\Gamma_{M_a} \sim 2^N \sim 2^{10^{23}}. \quad (13)$$

也即是说，宏观态 M_d 中所包含的微观态数目远远大于宏观态 M_a 中所包含的微观态数目。类似的讨论告诉我们，顺着 $M_a \rightarrow M_b \rightarrow M_c \rightarrow M_d$ 的时间顺序，宏观态序列所包含的微观态数目是不断增加的，而且每一步都是天文倍数地增加！

那么，为什么我们日常经验看到的时间顺序总是沿着微观态数目不断增加的方向呢？简单的回答是，这是一个概率问题。为了说清楚这个回答，不妨让我们假设前面的四张快照是每间隔一个 τ 时间所拍摄的，记 M_a 快照的拍摄时刻为 t_a ，则 M_d 快照的拍摄时刻就是 $t_d = t_a + 3\tau$ 。为了一般性地考察宏观态 M_a 的演化，我们可以按照微观力学演化其中一个任意的微观态 $X_a \in M_a$ ，比方说经过一段 3τ 时间演化到 t_d 时刻，进而得到微观态 $g_{3\tau}X_a$ ，如果这个微观态属于 M_d ，那我们就把宏观态 M_a 演化到了 M_d ，但是如果微观态 $g_{3\tau}X_a$ 不属于 M_d ，那宏观态 M_a 在 t_d 时刻就没有演化到 M_d 。

问题就在于， M_a 演化到 M_d 的概率 $p_{a \rightarrow d}$ 有多大？很显然，这个概率由所有 $X_a \in M_a$ ，相应 $g_{3\tau}X_a \in M_d$ 的概率决定！作为估算，可以认为这个概率大约是 $(g_{3\tau}M_a) \cap M_d$ 的相空间体积与 $(g_{3\tau}M_a)$ 的相空间体积之比，即

$$p_{a \rightarrow d} = \frac{\text{Vol}(g_{3\tau}M_a \cap M_d)}{\text{Vol}(g_{3\tau}M_a)}. \quad (14)$$

另一方面，根据刘维尔定理 $\text{Vol}(g_{3\tau}M_a) = \text{Vol}(M_a)$ ，而前面我们估算过 $\text{Vol}(M_a) \sim 2^{-N}\text{Vol}(M_d)$ ，所以 M_d 是一个远远比 $(g_{3\tau}M_a)$ “大得多”的

集合，从而不难设想当 N 很大时， $(g_{3\tau}M_a)$ 几乎完全被包含在 M_d 之内，因此 $g_{3\tau}M_a \cap M_d$ 非常接近于 $g_{3\tau}M_a$ 本身。从而即有

$$p_{a \rightarrow d} = \frac{\text{Vol}(g_{3\tau}M_a \cap M_d)}{\text{Vol}(g_{3\tau}M_a)} \approx \frac{\text{Vol}(g_{3\tau}M_a)}{\text{Vol}(g_{3\tau}M_a)} = \frac{\text{Vol}(M_a)}{\text{Vol}(M_a)} = 1. \quad (15)$$

也即是说，当粒子数目 N 很大时，宏观态 M_a 演化到宏观态 M_d 的概率非常接近于1。类似的讨论也能进一步告诉我们，当 N 很大时，系统宏观态按照 $M_a \rightarrow M_b \rightarrow M_c \rightarrow M_d$ 演化的概率非常接近于1。

为了完满地回答问题。我们还需要解释为什么逆向的 M_d 演化到 M_a 的概率非常接近于零。要逆向演化到 M_a ，我们需要掉转 $g_{3\tau}M_a \cap M_d$ 中那些微观态的动量方向，换言之，只有 $\overline{(g_{3\tau}M_a)} \cap M_d$ 中的微观态才能逆向演化到 M_a 。前面说过， $(g_{3\tau}M_a)$ 几乎完全被包含在 M_d 之内，由于 M_d 时间反演不变，所以 $\overline{(g_{3\tau}M_a)}$ 也几乎完全被包含在 M_d 之内，所以 $\overline{(g_{3\tau}M_a)} \cap M_d$ 几乎和 $\overline{(g_{3\tau}M_a)}$ “一样大”。问题是， $\overline{(g_{3\tau}M_a)} \cap M_d$ 中的这些微观态在所有 M_d 的微观态中是非典型的！换言之，当我们观察到系统处于宏观态 M_d 时，其典型的微观态不太可能处在 $\overline{(g_{3\tau}M_a)} \cap M_d$ 之内，处在这个之内的概率大约为

$$\frac{\text{Vol}(\overline{(g_{3\tau}M_a)} \cap M_d)}{\text{Vol}(M_d)} \approx \frac{\text{Vol}(\overline{(g_{3\tau}M_a)})}{\text{Vol}(M_d)} = \frac{\text{Vol}(g_{3\tau}M_a)}{\text{Vol}(M_d)} = \frac{\text{Vol}(M_a)}{\text{Vol}(M_d)} \sim 2^{-N} \sim 2^{-10^{23}}.$$

可见，当 N 为宏观数目时，这个概率非常接近于0。但是，这个概率就是宏观态 M_d 逆向演化到 M_a 的概率啊。正因为宏观态这个逆向演化的概率如此之低，所以你哪怕等到天荒地老宇宙毁灭也不会等到它的发生！

特别的，在 $N \rightarrow +\infty$ 的热力学极限下，宏观态逆向演化的概率将趋于零，从而我们只能观察到沿着微观态数目增加方向的正向演化！（对于前文的墨水系统，也就是只能观察到 $M_a \rightarrow M_b \rightarrow M_c \rightarrow M_d$ 的宏观态时间顺序。）玻尔兹曼进一步把这个结论与熵增加原理联系起来，对于宏观态 M ，玻尔兹曼定义

$$S_B(M) = k_B \log(\Gamma_M), \quad (16)$$

称之为玻尔兹曼熵。因此宏观态的演化总是沿着相应微观态数目增加的方向就相当于总是沿着熵增加的方向，这就是熵增加原理。

回到我们的墨水系统，上面的分析也告诉我们，如果墨水分子数目不太大，逆向演化就完全是可能的，尤其是当你把快照 d 中所有分子的动量都

反向，那它就会开始逆向演化，混合均匀的墨水分子会开始自动分离。问题是，将动量进行逆向不可能做得无限精确，免不了有误差，而只要有一点误差，其逆向演化就不精确了，是的，如果误差很小，混合均匀的墨水分子还是会进行一段时间的自动分离，但是，这个时间不会很长，之后随着分子间的碰撞，分子动量反向的效果就会完全被打乱，系统又开始正向演化。而且，墨水分子的数目越大，那么将分子动量反向以后的这个逆向演化时间就持续得越短，如果 $N \rightarrow 0$ ，那逆向演化持续的时间将趋于零(只要动量反向时有无限小的误差)，换言之，在热力学极限下，系统根本不可能进行逆向演化。

3 相空间的分形结构与熵增加原理

前面说到，逆向演化之所以极端罕见的原因，在于 $(g_{3\tau} M_a) \cap M_d$ 中的点在集合 M_d 之内是非典型的。本节的目的就是加深对这种非典型性的理解。为此，我们还是一般性地考察 N 个相互作用粒子所构成的孤立系统 \mathcal{S} 。

假设系统各粒子间的相互作用足够，以至于会产生混沌力学。因此，系统在相空间中的演化将对初始条件极端敏感，从而，相空间两个邻近的初始相点，在相流的作用下一般来说会迅速地相互远离。结合前面关于刘维尔定理的推论，即有：给定相空间的一个初始小区域 D_0 （比如一个小球体），在时间演化之下，由于对初始条件的极端敏感，它在某些方向上将被拉伸（这些方向上的邻近点在相互远离），而又由于总体积要保持不变，它在其它方向上就必定会被压缩，而且拉伸以后的部分还可能会发生弯折、扭曲等一系列形变。

由于我们是在一个相对于日常生活的宏观时间尺度来说很小，但是相对于系统微观过程的典型时间来说却很长的时间尺度 τ 上追踪系统演化过程的。所以，经过了一段固定的时间 τ 之后， $D_\tau = g_\tau D_0$ 就会被拉扯成如图(2)所示的八爪鱼形状，其中每一条爪都被拉扯得很细长。而且由于我们所考察的相空间是一个极端高维的空间，所以与图中所示的二维情况不同，实际可以拉伸的方向是很多的，八爪鱼 D_τ 的细长爪子其实非常多。

进一步，我们可以考察 $D_{2\tau}$ ，由于它是相流 g_τ 作用在 D_τ 上的结果，即 $D_{2\tau} = g_\tau D_\tau$ ，所以 $D_{2\tau}$ 必定是由前一步的八爪鱼 D_τ 再进行一个和上面类

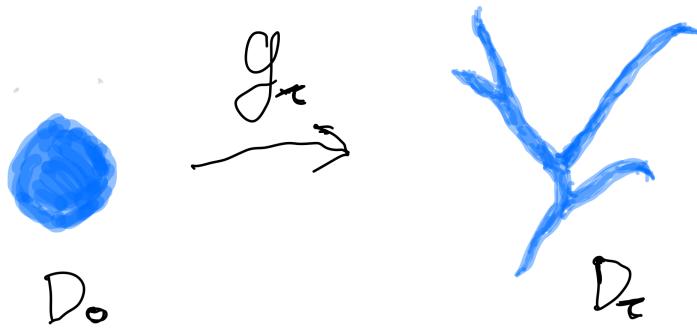


Figure 2: 相空间区域 D_0 在 g_τ 作用下变成 D_τ 。

似的拉扯的结果。具体来说，就是把 D_τ 的每一个局部区域都进一步拉扯成和上面类似但是更小、爪子更细一些的八爪鱼。完全类似的道理，由于 $D_{n\tau} = g_\tau D_{(n-1)\tau}$ ，所以，在时间演化的第 n 步(即 $n\tau$ 时刻)所产生的相空间结构，其实是在第 $n - 1$ 步的相空间结构的基础上再进行一个类似的拉扯而得到，这个拉扯会把 $D_{(n-1)\tau}$ 的每一个局部区域拉扯成更小、爪子更细的八爪鱼。整个这个过程其实就是一个所谓的分形迭代过程。现在，请大家停下来尽力想象一下，当这个迭代过程无限进行下去，我们最终得到的相空间结构 $D_{+\infty}$ 将会是什么？

对，我们将得到一个相空间“恶魔”，它有无数条无限细的爪子，这些爪子密密麻麻地相互纠缠着，像一个剪不断理还乱的毛线球一样，塞满了相空间的所有可达区域。或者我们也可以换一个比喻，相空间的整个可达区域就像一杯水，最初的 D_0 就像滴入水中的一滴墨，随着时间的演化，它会在水中纤维化(伸出细爪)、拉伸、扭曲，最后逐渐均匀地弥漫到整杯水中。是的，所有墨水的总体积依然和最初的墨滴一样，但是这些墨水变成了弥漫在整杯水中的无限精细的结构。 $D_{+\infty}$ 就是一个这样的无限精细的相

空间结构。

然而我们的观测能力是有限的，我们无法识别这样的无限精细的结构，就好像我们无法识别出最终弥漫在水中的墨的精细结构一样，对于我们来说，这些墨就像是均匀地布满了整杯水。同样，对于我们来说， $D_{+\infty}$ 就像是均匀地布满了相空间的所有可达区域。

更精确地说，在相空间中，我们无法识别足够精细的结构，而只能把这相空间切分成足够小的但是体积有限的“像素”，在一个“像素”之内的 $D_{+\infty}$ 精细结构因为无法识别而要被模糊掉。正是在这样的模糊之后， $D_{+\infty}$ 才像是均匀地布满了相空间的所有可达区域。不妨记 $\tilde{D}_{+\infty}$ 为 $D_{+\infty}$ “像素模糊”之后的结果，很显然 $\tilde{D}_{+\infty}$ 的体积 $\text{Vol}(\tilde{D}_{+\infty})$ 就不再是最初的 $\text{Vol}(D_0)$ 了（它现在布满整个相空间可达区域了），而是相对于它大大膨胀了！实际上， $D_{+\infty}$ 内的点在 $\tilde{D}_{+\infty}$ 中就是非典型的！

不仅如此，即使在有限时间，比如 $D_{n\tau}$ 中，也会包含一些很精细的相空间结构，它是从 $D_{(n-1)\tau}$ 中那些八爪鱼爪子的细小尖端进一步拉扯而来的。从这里也能看清为什么 τ 应该是一个相对于微观过程足够长的时间尺度，因为否则在相流 g_τ 的作用下就还来不及使得 $D_{n\tau}$ 相比于 $D_{(n-1)\tau}$ 进一步拉扯出新的精细结构。

总之，“像素模糊”对于 $D_{n\tau}$ 同样也有影响，只是由于 $D_{n\tau}$ 的精细结构没有 $D_{+\infty}$ 那么多，所以“像素模糊”对它的影响相对少一点。直观上很显然的是，随着 n 的增长， $D_{n\tau}$ 中的精细结构会越来越多，因此“像素模糊”对它的影响也就越来越大，“像素模糊”导致的体积膨胀也就越来越大。假设记 $\tilde{D}_{n\tau}$ 为 $D_{n\tau}$ 像素模糊之后的结果。则 $\tilde{D}_{n\tau}$ 的体积相对于 $D_{n\tau}$ 来说也是大大膨胀了的， $D_{n\tau}$ 内的点在 $\tilde{D}_{n\tau}$ 内往往也是非典型的。直观上比较明显的是， $\text{Vol}(\tilde{D}_{n\tau})$ 应该是 n 的增函数，即

$$\cdots < \text{Vol}(\tilde{D}_{(n-1)\tau}) < \text{Vol}(\tilde{D}_{n\tau}) < \cdots < \text{Vol}(\tilde{D}_{+\infty}). \quad (17)$$

也即是说，在“像素模糊”以后，随着时间的增长，相空间区域的体积总是在不断膨胀的（实际上，由于 N 是一个宏观数目，所以每一步的体积膨胀其实都是天文倍数）。

对于一个宏观系统，假设从一个足够小的初始区域 D_0 出发，那么大体上区域 $\tilde{D}_{n\tau}$ 内的所有状态在宏观上看起来都一样，大体上是系统同一宏观状态 M_n 所对应的所有不同微观状态，因此 $\text{Vol}(\tilde{D}_{n\tau})$ 大体上就

是此宏观状态所对应的微观状态数目 Γ_{M_n} 。进而玻尔兹曼定义的 $S_B = k_B \log (\text{Vol}(\tilde{D}_{n\tau}))$ 就是此宏观状态的玻尔兹曼熵。基于上面这个关于相空间区域体积膨胀的观察，我们可以把这种体积膨胀现象解释成熵增加定律。特别的，最终熵最大的 $\tilde{D}_{+\infty}$ 所对应的系统宏观状态就是热平衡态。

4 然而，引力是不一样的

不同颜色的墨水会逐渐混合均匀，看起来这就是世界演化的一般方向，世界会逐渐变得越来越混合、越来越均匀。然而，在比日常宏观更大的尺度上这必定是不对的，因为我们的宇宙已经诞生一百多亿年了，然而，它并没有变得越来越均匀，越来越混合，相反，星系团诞生了，星系诞生了，恒星诞生了，甚至，人类这样的生命也诞生了！所以，在宇观的尺度上，世界并没有变得越来越混合与均匀，即使我们并没有什么理由反对在宇观尺度上使用熵增加原理。

为什么会这样呢？准确的回答是，人类还没有完全了解清楚。但是，我们知道，在宇观的尺度上，我们需要考虑万有引力，而一个包含了万有引力的系统和我们之前考虑的单纯的多粒子系统有根本性的不同。比方说，你设想一个大气团，气体之间通过万有引力相互作用，现在，很偶然的，某个地方的气体密度稍微增加了一点，因此它对周围气体的吸引也就增加了，所以这个地方的气体密度就会进一步增加。所以你看，考虑了万有引力以后，气团不会变得越来越均匀，反而是会把偶然的涨落放大成不均匀的局部成团结构。实际上，这种不稳定的放大机制就是星系形成的原因。

引力会不会有熵的概念呢？回答是有。比方说，我们今天已经知道黑洞可以定义一个贝肯斯坦-霍金熵，它正比于黑洞的表面积。根据熵增加原理，一团物质通过引力塌缩形成黑洞，这个过程熵必定是增加的，最终当它形成一个稳定的黑洞时，熵会达到最大，但是，这个贝肯斯坦-霍金熵是正比于表面积，而不是像通常物质的熵那样正比于体积！

贝肯斯坦-霍金熵的微观解释是什么呢？回答是，目前还没有彻底搞清楚。所以你看，一旦涉及到引力，情况就完全不同了，我们还不太了解如何一般性地考虑引力的熵，也没有了解清楚引力的不稳定性机制如何与熵增加原理相协调一致。看起来这里发生的情况有点儿类似于软物质系统里

常常发生的熵致有序现象，即，整个系统总的熵的确在增加，但是，为了实现这种熵增加，反而要从均匀的宇宙汤中产生不均匀的星系结构这种有序结构。当然，具体到底是怎么回事，目前人们还没有搞清楚。

5 有诗为证

《时间之箭的低语》

你见过杯子坠落，碎成千万片，
却从未见过碎片跃起，重聚为杯。
银幕倒放令人发笑——
因为时间，只朝一个方向奔流。

可若你俯身，窥见那微观的尘埃，
每一粒都循着可逆的律动：
动量翻转，轨迹回溯，
过去与未来，在方程中对称如镜。

为何亿万粒子齐舞，
却再不能逆演那初态？
不是定律禁止，
而是概率将门紧闭。

一个墨滴落入水中，
初时分明，继而弥散；
相空间里，它伸展出亿万细爪，
如幽灵之网，缠绕整个宇宙。

你无法分辨那无限纤细的结构，
只能看见“模糊”后的均匀；
于是熵，悄然生长——

不是命运，而是多数的沉默。

玻尔兹曼低语：

“熵，是微观态数目的对数。”

于是无序，成了时间之箭的羽翎，
指向那最可能的终局。

然而，引力冷笑：

“宇宙并未混匀，反而生出星辰、山河、你我。”
在引力的疆域，
有序竟成熵增的仆从。

于是我们明白：
宏观的不可逆，
并非源于微观的法则，
而是源于初始的偶然，
与观测的有限。

时间之箭，
不在方程里，
而在我们——
这由 10^{23} 粒子组成的、会提问的尘埃之中。