非欧几何：奇妙的庞加莱圆盘世界

陈童

1 庞加莱圆盘世界

你相不相信，也许在某个平行宇宙, 所有的相似三角形必定全等，三角形的内角和小于180度，并且，任何三角形的都不可能无限放大，而是有一个面积最大的三角形。这个世界就是非欧几何的世界，其最简单的例子就是庞加莱圆盘世界。

庞加莱圆盘世界就是(x, y)平面内的单位圆盘$x^2 + y^2 \leq 1$。在生活于这个圆盘世界的人看来，两个邻近的点(x, y)和$(x + dx, y + dy)$ 之间的距离由下式给出

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}. \tag{1}$$

也就是说，同样的坐标差(dx, dy)，在圆盘中心的人看来是一个很小的距离，而在圆盘边缘的人看来却是一个很大的空间距离，(1)包含了两点间距离的所有信息，称为度规。

奇妙的是，庞加莱圆盘世界的人眼中的直线(两点之间的最短线)不同于我们眼中的直线。比方说，连接圆盘边缘附近两点A, B的直线(最短线)就不是我们眼中的直线，为了使得走过的距离尽可能短，一个从A点出发的人不会直接走向B，而是会将路径向着圆盘中心的方向弯，因为同样的坐标差在圆盘中心处对应更短的距离，因此让路径弯向圆盘中心可以节省距离。

比方说，如果我们考虑的这两个点A, B就在圆盘边缘上，那么从(1)可以看出，直接沿着边缘从A到B将是一个无穷大的距离，因为度规在边缘是发散的。从A出发，为了最快地走向B, 你应该先沿着圆盘的径向走，以

使得度规尽快地降下来，然后你再弯向B。实际上，庞加莱圆盘世界的直线是所有和圆盘边缘垂直相交的圆弧。

值得注意的是，在我们眼中，单位圆盘内的直线长度都是有限的，然而，在庞加莱世界的人看来，其直线的长度是无穷的，可以向两端无限延伸。为了看清楚这一点，我们不妨在单位圆盘上取极坐标(r, θ), 并且定义坐标变换$r = \tanh(\rho/2)$, ρ取值范围是$[0, +\infty)$, 在变换以后的坐标中，度规的表达式(1)就变成了，

$$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\theta^2. \tag{2}$$

庞加莱圆盘的边缘现在变到了无穷远处，因此，在庞加莱圆盘世界的人看来，圆盘的边缘实际上意味着无穷远。我们也注意到，只要ρ大到一定程度，(2)中度规的系数就一定大于1，因此ρ坐标值的无穷远实际上也意味着度规距离的无穷远，因此，在庞加莱圆盘世界的人看来，其直线可以向着无穷远无限延伸。

那么，在庞加莱世界中，何为两条直线相互平行呢？通常的定义是, 两条永远不相交的直线就是相互平行的，这当然正是我们在欧几里德平面几何中对平行线的自然定义。然而，稍微画画图你就能够看出来，如果这样定义平行，那么在庞加莱圆盘世界中，过直线外一点可以作无数条直线和已知直线平行。并且，庞加莱圆盘世界的两条平行线之间的距离并非固定不变。如果你从圆盘边缘出发，引两条在边缘处坐标值靠得很近的直线，假如这两条直线不相交，那么你可以很容易地看到，这样的两条平行线之间的距离会以一个恒定的速率增大。两条平行线之间的距离会越来越大实际上说明了庞加莱圆盘世界是一个时空弯曲的世界，而且曲率是负的(如果曲率为正，那么邻近的平行线只会越来越近，比如球面上的两个大圆)。同时，平行线距离增加的速率为定值还说明庞加莱世界的曲率是一个常数，我们取为-1。

现在，在庞加莱圆盘内取三条直线(三条和边缘垂直相交的圆弧)，它们将会交出一个三角形，很显然，这个三角形的内角和小于180度。假如我们

记这个三角形的内角和为Δ, 那么高斯博内特公式告诉我们，

$$\Delta = \pi - S \tag{3}$$

式中S表示这个三角形的面积。为了更好地理解这个公式，你可以在三维空间的单位球面上取一个由三个大圆组成的三角形，你会发现，对于球面S^2上的这些三角形而言，其内角和Δ必定大于180度，并且符合公式$\Delta = \pi + S$。这是因为单位球面的曲率为+1，所以面积对三角形内角和的修正是正的，而庞加莱圆盘的曲率为-1, 所以面积对三角形内角和的修正应该是$-S$。

这就带来两个有趣的结论，第一，如果庞加莱圆盘世界的人只在很小的范围内活动，考虑的总是很小的三角形(边长$\ll 1$), 那么这些三角形的内角和就近似地等于π, 欧几里德几何近似地成立。第二，庞加莱圆盘世界的三角形面积有上限，最大值为π。实际上，将面积最大的三角形的面积规定为π就相当于给庞加莱世界定义了一把绝对的尺子，我们这里所谈的一切几何量其实都是用这把尺子作为单位量出来的。

庞加莱圆盘世界的哪些三角形有最大面积π呢？答案非常简单，所有三个角都落在圆盘边缘上的三角形面积都是π。这是因为三角形必须由三条直线构成，而庞加莱圆盘世界的直线在圆盘边缘一定和边缘相垂直，这样一来，落在边缘的角的两条边只能相切，夹角为0。也就是说，三个角都落在圆盘边缘的任意三角形内角和必定为零，由(3)，这就意味着这些三角形的面积为π。

现在，我们已经解释了庞加莱世界的一些不可思议之处，然而还有一个最令人吃惊的地方，即庞加莱世界中的相似三角形都是全等的，我们将这留到下一节再解释。

2 相似三角形均全等

上一节我们说到，在庞加莱单位圆盘世界中，所有的相似三角形必定全

等。为了理解这个结论，让我们先回顾一下庞加莱圆盘世界中三角形内角和的公式，

$$\Delta = \pi - S. \tag{4}$$

从这个公式很容易看出来，所有的相似三角形因为有相等的内角和，因此也必定有相等的面积，因此它们就不只是相似，而必定是全等。

下面我们想更深入地理解这个奇妙结论的本质。为此，我们在庞加莱圆盘上引入复坐标，$z = x + iy$. 这样一来，庞加莱圆盘就成了复z平面上的一个单位圆盘。复变函数的知识告诉我们，可以用一个分式线性变换将这个单位圆盘变换到复上半平面, 使得圆盘的边缘变为实轴。比方说，我们可以取这个分式线性变换为

$$z = \frac{1 + iw}{1 - iw}, \tag{5}$$

式中$w = u + iv$为变换以后的复坐标。很显然，这样一个变换是复单位圆盘和复上半平面之间的一个全纯同构。

另外，读者容易验证，分式线性变换以后，原来庞加莱圆盘的度规就变成了上半平面$v > 0$上的度规

$$ds^2 = \frac{|dw|^2}{(\mathrm{Im}w)^2} = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}. \tag{6}$$

这个度规称之为克莱因度规，具备这个度规的上半平面我们称之为罗巴切夫斯基平面。很显然，罗巴切夫斯基平面和庞加莱圆盘的几何本质是等价的，它们仅仅是非欧几何的两种不同表示方式而已。

另一方面，假如我们暂时忘记度规，而从复变函数的角度来考虑问题。那么现在复单位圆盘中的三角形就变成了复上半平面中的三角形。又注意到分式线性变换是一个保角变换，因此复单位圆盘中的相似三角形经过(5)变换到复上半平面以后依然相似，反之亦然。换言之，要研究单位圆盘中的相似三角形，我们只需等价地研究复上半平面的相似三角形。而根

据定义，复上半平面的相似三角形就是在复上半平面的保角变换下可以相互等同的那些三角形。因此，要研究复上半平面的相似三角形（实际上任何相似形都一样）那就要研究复上半平面的保角变换。由复变函数的知识我们知道，这就相当于研究整个复上半平面的全纯变换，我们称之为复上半平面的全纯自同构。

实际上，复上半平面的全纯自同构可以由下面的分式线性变换给出,

$$w \to \frac{aw+b}{cw+d}, \tag{7}$$

式中为了确保实轴依然变换为实轴a, b, c, d均必须为实数，而且，为了使得这个分式变换的确代表的是上半平面到上半平面的一个同构，我们还得要求$ad-bc \neq 0$。另外，假如我们将变换中的这四个实参数排成一个矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{8}$$

则读者很容易验证的是，连续的两个全纯自同构的合成就相应于两个这样的2×2实矩阵的矩阵相乘。此外，由于$ad-bc\neq 0$，因此任何一个全纯自同构变换都有一个逆变换。因此，复上半平面的全纯自同构的全体在这个矩阵乘法下就自然地构成一个群，称之为复上半平面的全纯自同构群。

由(7)我们可以知道，a, b, c, d可以相差一个整体的非零实常数，合适地选取这个非零实常数我们总可以要求a, b, c, d满足$ad-bc=1$. 读者可以验证，上一段中谈到的矩阵乘法是保持这个等式不变的。满足所有这些要求的2×2实矩阵的全体所构成的群就是所谓的$SL(2,\mathbb{R})$群。但是，由(7)式读者容易知道，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

这两个不同的$SL(2,\mathbb{R})$群元对应的是复上半平面的同一个全纯自同构。因

此，复上半平面的全纯自同构群实际上是$SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$.

另一面，由(7)和(6)的具体表达式我们可以验证，任何$SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ 的全纯自同构变换都保持上半平面的克莱因度规(6)不变，因此也就是说，复上半平面的全纯自同构群也就是罗巴切夫斯基的等度规群。或者你也可以说，上半平面的复几何与上半平面的罗巴切夫斯基几何是等价的。特别的，上半平面的在复几何下保持相似的三角形从罗巴切夫斯基几何的角度来看那就是全等三角形（等度规变换的必然结论）。

由于上半平面的复几何等价于单位圆盘的复几何，上半平面的罗巴切夫斯基几何又等价于单位圆盘的庞加莱几何。因此上一段的推理告诉我们的必然结论就是，庞加莱圆盘上的相似三角形必然全等。这个结论是本文一开始我们就已经得到了的，但绕了这么一圈以后，现在我们就能够深入地理解这个结论的本质了。

庞加莱圆盘世界的奇妙是怎么强调都不过份的，比如有一个美妙的定理是这么说的：庞加莱圆盘世界是所有亏格$g>1$的黎曼面的万有复叠空间。这个结论的三维推广最终导致了瑟斯顿（Thruston）对三维流形的完整分类。而瑟斯顿的这项重要工作又和庞加莱的另一个伟大贡献密切相关，那就是庞加莱猜想。2006年，数学界最终确认佩雷尔曼证明了瑟斯顿关于三维流形的分类，从而也就证明了悬而未决长达百年的庞加莱猜想。