重整化群讲义

陈童

1 固定点附近的重整化群流

先说两个基本概念：首先，什么是重整化群变换？重整化群变换是一种尺度变换，也就是变动定义量子场论的尺度，同时调节理论的耦合常数，使得长程物理的关联函数保持不变，任何满足这个条件的变换都叫做重整化群变换。重整化群变换是作用在场论有效作用量上的一种变换。第二个概念，什么是重整化群流？重整化群流就是定义在场论所有耦合常数的空间的一个无穷维动力系统，这个无穷维动力系统描写的是在连续的尺度变换下耦合常数以尺度为参数所画出来的流线。重整化群流的固定点就是重整化变换的固定点。

也就是说假定我们有一个理论，它的作用量是$S(a)$, 其中a是定义这个理论所需的一个尺度，比方说如果这个理论是定义在格点上，那么a就是格距。现在我们改变a, 将之变为$\widetilde{a}$, 同时调节理论的耦合常数，使得作用量变为$S(\widetilde{a})$。重整化群变换的要求是，用新尺度$\widetilde{a}$和新作用量$S(\widetilde{a})$ 算出来的关联函数依然和原来用$S(a)$算出来的一样。特别的，在重整化群变换下，配分函数Z应该保持不变。重整化群的固定点就是这样一种特别的作用量S_*，它满足

$$S_*(\widetilde{a}) = S_*(a). \tag{1}$$

我们这一节要研究的就是固定点附近的重整化群流。考察对固定点理论$S_*(a)$的一个扰动,

$$S_* \to S = S_* + \int (d^d x) g_i a^{\Delta_i - d} \mathcal{O}_i, \tag{2}$$

式中$\mathcal{O}_i$是一个Scaling 量纲为Δ_i的算子，a是定义理论的尺度，g_i是无量纲的耦合常数，是一个小扰动，另外，我们默认对i求和。那么理论的配分函

数近似就是，

$$
\begin{aligned}
Z =& Z_* \left(- \int (d^d x) g_i a^{\Delta_i - d} \langle \mathcal{O}_i \rangle \right) + \\
& Z_* \left(\frac{1}{2} \int \int_{|x_1 - x_2| > a} (d^d x_1)(d^d x_2) g_i g_j a^{\Delta_i + \Delta_j - 2d} \langle \mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) \rangle \right), \quad (3)
\end{aligned}
$$

式中Z_*是固定点理论的配分函数。由于我们定义理论的尺度是a, 因此在积分时我们要求两个不同点之间的距离大于a, 即$|x_1 - x_2| > a$。

现在我们改变定义理论的尺子至$\widetilde{a}$, 为了保持配分函数不变，我们同时调节耦合常数$g_i \to \widetilde{g}_i$, 则

$$
\begin{aligned}
\widetilde{Z} =& Z_* \left(- \int (d^d x) \widetilde{g}_i \widetilde{a}^{\Delta_i - d} \langle \mathcal{O}_i \rangle \right) + \\
& Z_* \left(\frac{1}{2} \int \int_{|x_1 - x_2| > \widetilde{a}} (d^d x_1)(d^d x_2) \widetilde{g}_i \widetilde{g}_j \widetilde{a}^{\Delta_i + \Delta_j - 2d} \langle \mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) \rangle \right). \quad (4)
\end{aligned}
$$

下面我们考虑一个无穷小的尺度变换$\widetilde{a} = (1+\epsilon)a$, ϵ是一个无穷小量。利用算子乘积展开

$$
\mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) \sim \frac{1}{|x_1 - x_2|^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k}} c_{ij}^k \mathcal{O}_k(x_2), \quad (5)
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
\widetilde{Z} =& Z_* \left(- \int (d^d x) \widetilde{g}_i \widetilde{a}^{\Delta_i - d} \langle \mathcal{O}_i \rangle \right) + \\
& Z_* \left(\frac{1}{2} \int \int_{|x_1 - x_2| > \widetilde{a}} (d^d x_1)(d^d x_2) \widetilde{g}_i \widetilde{g}_j \widetilde{a}^{\Delta_i + \Delta_j - 2d} \frac{c_{ij}^k \langle \mathcal{O}_k(x_2) \rangle}{|x_1 - x_2|^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k}} \right). \quad (6)
\end{aligned}
$$

上式后一项括号中的部分显然可以写成

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int \int_{|x_1 - x_2| > a} (d^d x_1)(d^d x_2) \widetilde{g}_i \widetilde{g}_j \widetilde{a}^{\Delta_i + \Delta_j - 2d} \langle \mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) \rangle \\
& - \frac{1}{2} \int \int_{(1+\epsilon)a > |x_1 - x_2| > a} (d^d x_1)(d^d x_2) \widetilde{g}_i \widetilde{g}_j \widetilde{a}^{\Delta_i + \Delta_j - 2d} \frac{c_{ijk} \langle \mathcal{O}_k(x_2) \rangle}{|x_1 - x_2|^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k}}. \quad (7)
\end{aligned}
$$

保留到一阶无穷小，上式的第二项就是

$$
-\frac{1}{2} S_d \epsilon \int (d^d x) g_i g_j a^{\Delta_k - d} c_{ijk} \langle \mathcal{O}_k \rangle, \quad (8)
$$

式中S_d表示d维空间中$d-1$维单位球面的面积。因此，我们就有

$$\begin{aligned}\widetilde{Z} =& Z_*[-\int(d^dx)\left(\widetilde{g}_k(1+\epsilon)^{\Delta_k-d}+\frac{1}{2}S_d\epsilon g_ig_jc_{ijk}\right)a^{\Delta_k-d}\langle\mathcal{O}_k\rangle]+\\ & Z_*\left(\frac{1}{2}\int\int_{|x_1-x_2|>a}d^dx_1d^dx_2\widetilde{g}_i\widetilde{g}_j(1+\epsilon)^{\Delta_i+\Delta_j-2d}a^{\Delta_i+\Delta_j-2d}\langle\mathcal{O}_i(x_1)\mathcal{O}_j(x_2)\rangle\right).\end{aligned}$$

显然,为了保持配分函数不变，即为了保证$\widetilde{Z}=Z$, 我们应该将$\widetilde{g}_i$取成

$$\widetilde{g}_k = g_k(1+\epsilon)^{d-\Delta_k}-\epsilon\frac{1}{2}S_dg^ig^jc_{ijk}, \tag{9}$$

这里我们精确到一阶无穷小。也即是说，我们有重整化群流

$$\begin{aligned}\frac{dg_k}{d\epsilon} &= (d-\Delta_k)g_k-\frac{1}{2}S_dg^ig^jc_{ijk}\\ &= -\frac{\partial}{\partial g_k}\left(\frac{1}{2}(\Delta_i-d)g_i^2+\frac{1}{3!}S_dc^{ijk}g_ig_jg_k\right).\end{aligned} \tag{10}$$

从上面的重整化群流方程我们很容易看出，对于$\Delta_k>d$的扰动，重整化群固定点是稳定的，也就是说在这个扰动方向上重整化群流指向流向固定点，这样的扰动我们称之为无关扰动。然而，对于$\Delta_k<d$的那些扰动方向，重整化群流的流向是背离固定点的，这是一些不稳定的扰动方向，这样的扰动称之为相关扰动。

2 积去小尺度自由度

重整化群实际上是一个关于如何处理多尺度多自由度系统的纲领，重整化变换的物理实质就是积去小尺度的短程自由度，这样的操作之所以起作用是基础于两个基本的观察：第一，小尺度短程自由度对于更大尺度的长程物理是有影响的，第二，但是只要合适地选取表达理论的变量，那么这个影响就可以用几个相关参数来概括，几个参数就可以概括小尺度的所有相关信息，至于短程结构的更多细节信息则与大尺度物理无关。因此，通过积去短程自由度你就能忽略小尺度结构的无关细节，得到一个与你所关心的尺度的物理密切相关的有效理论。的确，有效场论的有效二字可以理解成无效的反义词，它暗示说如果你的理论与你所要考察的物理不在同一尺度上，那么你的理论就是一种徒劳。下面我们就一个具体的算例来看看通过积去小尺度短程自由度进而得到有效理论这个操作可以如何进行。

我们要考察的理论是一个定义在d维欧空间的标量场论，在截断尺度a，它的有效作用量可以写成

$$S(a)=\int d^dx\left(\frac{1}{2}\left(\partial_i\phi\partial_i\phi+ta^{-2}\phi^2\right)+\frac{1}{4!}ga^{d-4}\phi^4\right), \tag{11}$$

人们可以作一个坐标和场变量的rescaling来消除方程里面显含的尺度因子a，我们保留这个尺度因子以使得无需作这样的rescaling。另外，式中的t和g是无量纲的藕合常数，我们就是要研究它们如何依赖于重整化尺度a。为此，我们考虑一个更长一点的临近尺度$\widetilde{a}=a(1+\epsilon)$，$\epsilon$是一个无穷小量。根据定义，在截断尺度$\widetilde{a}$上的理论当然应该是

$$S(\widetilde{a})=\int d^dx\left(\frac{1}{2}\left(\partial_i\phi\partial_i\phi+\widetilde{t}\widetilde{a}^{-2}\phi^2\right)+\frac{1}{4!}\widetilde{g}\widetilde{a}^{d-4}\phi^4\right). \tag{12}$$

重整化的物理实质相当于说，$S(\widetilde{a})$可以通过在$S(a)$的基础上积去波长在$\lambda\in[a,a(1+\epsilon)]$区间之内的自由度而得到。我们不妨以$\phi$来表示波长比$a(1+\epsilon)$更长的自由度，而以$\eta(x)$来表示波长在$\lambda\in[a,a(1+\epsilon)]$之内的自由度，因此$S(a)$中的场就应该替换成$\phi+\eta$, 这样一来，重整化群的物理实质就相当于说

$$e^{-S(\widetilde{a})}=\int[d\eta]e^{-S(a)}. \tag{13}$$

根据自由度按波长的这种分解，我们可以将$S(a)$重写成

$$\begin{aligned}S(a)=&\int d^dx\left(\frac{1}{2}\left(\partial_i\phi\partial_i\phi+ta^{-2}\phi^2\right)+\frac{1}{4!}ga^{d-4}\phi^4\right)\\&+\int d^dx\left(\partial_i\eta\partial_i\phi+ta^{-2}\eta\phi+\frac{1}{3!}ga^{d-4}\phi^3\eta\right)\\&+\frac{1}{2}\int d^dx\left(\partial_i\eta\partial_i\eta+ta^{-2}\eta^2+\frac{1}{2}ga^{d-4}\phi^2\eta^2\right).\end{aligned} \tag{14}$$

这个式子中η的线性项取$\int d^dxA(x)\eta$的形式，$A(x)$是一个关于ϕ的函数，ϕ的波长大于$a(1+\epsilon)$，而$\eta(x)$的波长小于$a(1+\epsilon)$，因此$A(x)$相对于$\eta(x)$来说是变化缓慢的，由于$\eta(x)$的相对较快的振荡线性项$\int d^dxA(x)\eta$的积分实际上等于零。因此, 在进行(13)的泛函积分计算时，我们实际上要算的就是$\eta(x)$的二次项的高斯积分，由熟知的高斯积分公式可知这个积分算出来是

$$\det[-\partial^2+ta^{-2}+\frac{1}{2}ga^{d-4}\phi^2]^{-\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

利用$\det(A) = e^{\mathrm{Tr}\ln(A)}$, 我们可以得到

$$
\begin{aligned}
&\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int\frac{d^dxd^dp}{(2\pi)^d}|_{(1-\epsilon)1/a<p<1/a}\ln(p^2+ta^{-2}+\frac{1}{2}ga^{d-4}\phi^2)\Big\}\\
\simeq&\exp\Big\{-\epsilon\frac{1}{2}\frac{S_d}{(2\pi a)^d}\int d^dx\ln(a^{-2}+ta^{-2}+\frac{1}{2}ga^{d-4}\phi^2)\Big\}\\
=&\exp\Big\{\epsilon C-\epsilon\frac{1}{2}\frac{S_d}{(2\pi a)^d}\int d^dx\ln(1+t+\frac{1}{2}ga^{d-2}\phi^2)\Big\}\\
=&\exp\Big\{\epsilon C'-\epsilon\frac{1}{2}\frac{S_d}{(2\pi a)^d}\int d^dx\left(\frac{1}{2}g(1-t)a^{d-2}\phi^2-\frac{1}{8}g^2a^{2d-4}\phi^4\right)\Big\},
\end{aligned}
\tag{16}
$$

式中S_d表示d维欧空间中单位球面的面积，C和C'均是与场无关的常数，可以通过在原来的标量场作用量中加上一个常数来重整化，因此我们将忽略它。

现在，方程(13)告诉我们

$$
\begin{aligned}
e^{-S(\widetilde{a})}=&\exp\Big\{-\int d^dx\left(\frac{1}{2}\left(\partial_i\phi\partial_i\phi+ta^{-2}\phi^2\right)+\frac{1}{4!}ga^{d-4}\phi^4\right)\\
&-\epsilon\frac{1}{2}\frac{S_d}{(2\pi a)^d}\int d^dx\left(\frac{1}{2}g(1-t)a^{d-2}\phi^2-\frac{1}{8}g^2a^{2d-4}\phi^4\right)\Big\}\\
=&\exp\Big\{-\int\left(\frac{1}{2}\left(\partial_i\phi\partial_i\phi+\widetilde{t}(a(1+\epsilon))^{-2}\phi^2\right)+\frac{1}{4!}\widetilde{g}(a(1+\epsilon))^{d-4}\phi^4\right)\Big\},
\end{aligned}
$$

这个式子的最后一行用到了(12)。比较上面这个方程的相应项，我们可以得到

$$
\begin{aligned}
\widetilde{t}=&t+\epsilon\left(2t+\frac{S_d}{2(2\pi)^d}g(1-t)\right)\\
\widetilde{g}=&g+\epsilon\left((4-d)g-\frac{3S_d}{2(2\pi)^d}g^2\right).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

也即是说，我们有重整化群方程

$$
\begin{aligned}
\frac{dt}{d\epsilon}=&\left(2t+\frac{S_d}{2(2\pi)^d}g(1-t)\right)\\
\frac{dg}{d\epsilon}=&\left((4-d)g-\frac{3S_d}{2(2\pi)^d}g^2\right).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

如果$d=4$，即假如我们研究的是一个四维量子场论，那么重整化群方

程(18)就是

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\epsilon} &= \left(2 - \frac{1}{16\pi^2}g\right)t + \frac{1}{16\pi^2}g \\ \frac{dg}{d\epsilon} &= -\frac{3}{16\pi^2}g^2.\end{aligned} \tag{19}$$

这个方程只有平凡的固定点$t = 0, g = 0$，在固定点附近ϕ^2项扰动是相关扰动，ϕ^4扰动则是无关扰动。

如果$d < 4$, 当然重整化群方程(18)依然有平凡的固定点$t = 0, g = 0$，在这个固定点附近ϕ^2扰动和ϕ^4扰动均是相关扰动。但是除了这个平凡的固定点之外，这时候方程(18)还有一个非平凡的固定点，即$g = \frac{2(2\pi)^d}{3S_d}(4-d)$, $t = -\frac{4-d}{2+d}$，在这个固定点附近重整化群可以线性化为

$$\begin{aligned}\frac{d\delta t}{d\epsilon} &= \frac{2+d}{3}\delta t + \frac{3S_d}{(2+d)(2\pi)^d}\delta g \\ \frac{d\delta g}{d\epsilon} &= -(4-d)\delta g,\end{aligned} \tag{20}$$

很显然，这时候ϕ^2扰动依然是相关的，但是ϕ^4扰动已经变成无关扰动了。如果一个物理系统的重整化群流从这个非平凡固定点附近经过，那么由线性化的重整化群方程(20)人们容易知道，这个系统的关联长度ξ的临界指数ν为

$$\nu = \frac{3}{2+d}. \tag{21}$$

3 重整化群方程

前面我们讲过，重整化变换的实质在于积去小尺度短程自由度。有时候我们也将这样的操作说成是从物理上忽视短程自由度，它有点像我们给一副图片打码赛克，使得图片的某些细节被忽视。物理上系统地进行这种操作的办法是将“图片”进行缩放，即rescaling。我们总可以通过将“图片”不断缩小，从而把打码的像素缩小成基本像素单位，进而看到整幅图片越来越宏观的结构。在重整化变换中即是，我们总可以通过不断rescaling(即缩小), 从而把浮动的截断尺度a化约为1个基本单位，从而得到大尺度的有效理论，当然，这么做的代价是会引入放大倍率e^{-t}(即缩小) (本节的t和上一节的t毫无关系)。这一节我们就来研究，系统的关联函数如何随着这个缩放倍率的变化而变化，这就叫做重整化群方程。

假设我们考察的量子场论系统有一组局域的可观测量算符$\mathcal{O}_i(x)$，它们的scaling 量纲分别为Δ_i, 当我们将这个量子场论系统放大e^{-t}倍时(即缩小)，$\mathcal{O}_i(x)$将变为$\mathcal{O}'_i(x)$, 由于缩小系统会使得能量密度更大，所以我们应该有如下算符混合关系，

$$\mathcal{O}_i(x) \simeq e^{-t\Delta_i}\mathcal{O}'_i(e^{-t}x). \tag{22}$$

等价地，我们也可以将这个方程写成

$$\mathcal{O}_i(e^t x) \simeq e^{-t\Delta_i}\mathcal{O}'_i(x). \tag{23}$$

这里我们没有写等于号，而是用的$\simeq$号，这是因为定义加撇算符的理论和定义不加撇算符的理论其实不是一回事，两者之间相差一个重整化，下面我们会进一步澄清这一点。

对于一个量子场论而言，假设基本场变量为ϕ，欧氏作用量为S, 那么量子场论的关键在于计算泛函积分$\int[\mathcal{D}\phi]e^{-S}$, 比方说，在计算关联函数时，我们就是要计算这样的泛函积分。因此，一个关键的问题是，当我们将量子场论系统放大e^{-t}倍时，这个泛函积分会怎么变？换言之，我们得搞清楚理论本身如何重整化。

这里出现一个关键的问题，即实际上，当我们说把量子场论系统放大e^{-t}倍(即缩小)时，我们实际在物理上并不能真正做到这一点，我们实际上做的只是离这个系统远一点，在更远的地方来观测这个系统从而使得自己能够忽略一些小尺度细节而已。换句话来说，我们实际上是在用一把更大的尺子来衡量这个系统。或者说**在重整化过程中，系统中各点的物理距离是不变的，将坐标距离放大e^{-t}倍（即缩小）必然同时要将尺子放大e^t倍。** 物理系统的尺子就反映为度规张量，所以，将量子场论系统的坐标距离放大e^{-t}倍必然同时要将度规张量g放大e^{2t}倍，即同时进行如下变换

$$\mathrm{g} \to e^{2t}\mathrm{g}. \tag{24}$$

式中g为度规张量，其用指标写出来的分量形式为g_{ab}。

根据上面的分析我们就能写出关联函数的基本缩放（重整化）方程

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{O}_1(e^t x_1)\mathcal{O}_2(e^t x_2)....\mathcal{O}_n(e^t x_n)\rangle_{\mathrm{g}} \\ =&e^{-\left(\Delta_1+\Delta_2+...+\Delta_n\right)t}\langle \mathcal{O}'_1(x_1)\mathcal{O}'_2(x_2)....\mathcal{O}'_n(x_n)\rangle_{e^{2t}\mathrm{g}}. \end{aligned} \tag{25}$$

$\langle ...\rangle_{\mathrm{g}}$表示计算相应的泛函积分时，作用量中的时空度规取作g，也即是说，$\langle ...\rangle_{\mathrm{g}}$意味着理论是定义在度规为g的黎曼流形上。注意，与度规e^{2t}g对

应的算子都是加撇的，因为根据以上所说，算子加撇和度规放大为e^{2t}g是同步的，两者一起就是所谓的重整化变换。下面我们就是要从这个方程(25)出发，得到关联函数在缩放下满足的关于t的微分方程。

首先我们注意到，在经典物理的层次上，对于欧氏作用量S，它在度规变动δg_{ab}下满足$\delta S = -\int_M \frac{1}{2}T^{ab}\delta g_{ab}$, T^{ab}就是经典的能动量张量[1], $\int_M$表示在时空流形上积分。我们关心的度规无穷小变动是度规$e^{2t}g_{ab}$在t作无穷小改变时引起的，这时候在经典物理的层次上必有$\delta_t S = \frac{\partial S}{\partial t} = -\int_M T^a_a(t)$, $T^a_a(t)$表示定义在度规$e^{2t}g_{ab}$上的能动量张量的缩并。为此，我们可以假设在量子的层次上，在t做无穷小变动时，作用量和泛函积分测度$[\mathcal{D}\phi]e^{-S}$的变动为

$$\int_M \mathrm{T}'(t), \tag{26}$$

式中$\mathrm{T}'(t)$为前面$T^a_a(t)$的量子版本，是一个算符。

根据上一段的分析我们容易知道，当我们将方程(25)中的t作无穷小变动时，必有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathcal{O}_1(e^t x_1)\mathcal{O}_2(e^t x_2)....\mathcal{O}_n(e^t x_n)\rangle_{\mathrm{g}} \\
=&-\big(\Delta_1+\Delta_2+...+\Delta_n\big)\langle \mathcal{O}_1(e^t x_1)\mathcal{O}_2(e^t x_2)....\mathcal{O}_n(e^t x_n)\rangle_{\mathrm{g}} \\
&+e^{-\big(\Delta_1+\Delta_2+...+\Delta_n\big)t}\langle \mathcal{O}'_1(x_1)\mathcal{O}'_2(x_2)....\mathcal{O}'_n(x_n)\int_M \mathrm{T}'(t)\rangle_{e^{2t}\mathrm{g}}.
\end{aligned} \tag{27}$$

下面假设$\int_M \mathrm{T}'(t)$可以用局域算子$\mathcal{O}'_i$展开成

$$\int_M \mathrm{T}'(t) = \sum_i{}' \int_M \beta^i(\lambda)\mathcal{O}'_i(x), \tag{28}$$

求和号中的$'$号表示我们仅仅对scaling 量纲小于等于时空维数d的算子求和，因为能动量张量的scaling 量纲不能超过d。另一方面，我们也可以将度规e^{2t}g上的有效作用量用局域算子展开为

$$S = \sum_i{}' \lambda^i \int_M \mathcal{O}'_i(x). \tag{29}$$

同样，由于我们关心的是长程物理, 所以我们仅仅只需要关心相关算子，或者说可重整项。上式中的λ^i是一个一般性的记号，它包括相互作用耦合

[1]这个结果的正负号不用死记，取一个标量场论算一下就知道了。

常数以及质量等等参数。由此我们可以知道，方程(27)可以重写成

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\langle\mathcal{O}_1(e^tx_1)\mathcal{O}_2(e^tx_2)....\mathcal{O}_n(e^tx_n)\rangle_{\mathrm{g}}\\=&-\big(\Delta_1+\Delta_2+...+\Delta_n\big)\langle\mathcal{O}_1(e^tx_1)\mathcal{O}_2(e^tx_2)....\mathcal{O}_n(e^tx_n)\rangle_{\mathrm{g}}\\&-e^{-\big(\Delta_1+\Delta_2+...+\Delta_n\big)t}{\sum_i}'\beta^i(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda^i}\langle\mathcal{O}'_1(x_1)\mathcal{O}'_2(x_2)....\mathcal{O}'_n(x_n)\rangle_{e^{2t}\mathrm{g}}.\end{aligned}\tag{30}$$

将加撇算符变回不加撇算符，简单整理一下即有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\langle\mathcal{O}_1(e^tx_1)\mathcal{O}_2(e^tx_2)....\mathcal{O}_n(e^tx_n)\rangle_{\mathrm{g}}\\=&-\big(\Delta_1+\Delta_2+...+\Delta_n\big)\langle\mathcal{O}_1(e^tx_1)\mathcal{O}_2(e^tx_2)....\mathcal{O}_n(e^tx_n)\rangle_{\mathrm{g}}\\&-{\sum_i}'\beta^i(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda^i}\langle\mathcal{O}_1(e^tx_1)\mathcal{O}_2(e^tx_2)....\mathcal{O}_n(e^tx_n)\rangle_{\mathrm{g}}.\end{aligned}\tag{31}$$

这就是我们要推导的**重整化群方程**。

如果不用度规的办法进行重整化，而像前面两节一样认为重整化就是调节耦合常数λ^i，因此它是一个依赖于t的$\lambda^i(t)$，则我们还有

$$\frac{d\lambda^i}{dt}=-\beta^i(\lambda).\tag{32}$$

可见，$\beta^i(\lambda)$就是通常所说的Beta函数。只不过我们这里的t是对长度尺度的放大倍率，而不是对能量尺度的放大倍率，所以Beta函数的方程(32)多了一个负号。

参考文献：Joseph Polchinski, String Theory Volume II, Superstring Theory and Beyond. Chapter 15 Advanced CFT。本节内容是对Polchinski 这一章的相关论述的发展，在文献中很可能找不到和我们这里一样的内容。

4 精确重整化群

本节原来版本中给出的推导过程有错误，是知乎用户*湛蓝色的迷惘*指出的，他也建议了正确的修订方法。在此对*湛蓝色的迷惘*表示感谢！

前面我们讨论了重整化变换的一般性定义，和一般性的重整化群。这一节我们将讨论一个精确的重整化群，进而验证重整化群的物理含义。我们的讨论将限于四维欧空间的标量场论，但由此得来的重整化群的物理内涵则是普遍适用的。

假定我们的标量场论定义在某一个尺度a上，也即是说，假定我们有一个截断函数$K(p^2a^2)$, 它在自变量$p^2a^2<1$时取值为1, 而在$p^2a^2>1$时飞快地趋近于零。在做了这样的截断以后，自由标量场的传播子就可以写成

$$\frac{K(p^2a^2)}{p^2+m^2}. \tag{33}$$

我们将作用量$S(a)$的自由场部分记为$S_0(a)$, 它由下式给出

$$S_0(a)=\frac{1}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\phi(-p)\phi(p)\frac{p^2+m^2}{K(p^2a^2)}. \tag{34}$$

我们记自由场的泛函积分为Z_0, $Z_0=\int[d\phi]e^{-S_0(a)}$。由高斯积分我们有自由场关联函数

$$\langle\phi(q)\phi(-p)\rangle_0=\frac{1}{Z_0}\int[d\phi]\phi(q)\phi(-p)e^{-S_0(a)}=(2\pi)^4\delta^4(q-p)\frac{K(p^2a^2)}{p^2+m^2}. \tag{35}$$

特别的，我们可以得到

$$\frac{1}{Z_0}\int[d\phi]\phi(p)\phi(-p)e^{-S_0(a)}=(2\pi)^4\delta^4(0)\frac{K(p^2a^2)}{p^2+m^2}. \tag{36}$$

包含相互作用以后，我们有泛函积分

$$Z=\int[d\phi]e^{-S_0(a)-S_I(a)}, \tag{37}$$

式中$S_I(a)$为我们的标量场论的相互作用部分。将这个泛函积分模去自由场泛函积分的结果定义为相互作用场的配分函数，记为Z_I,

$$Z_I=\frac{Z}{Z_0}. \tag{38}$$

我们要推导的重整化群方程即是，$S_I(a)$作为尺度a的函数如何随a变化才能保证这个配分函数Z_I与重整化尺度a无关。前面的小节中我们说过了，这正是重整化变换的一般要求。也即是说，我们想要讨论，如何才能让下面的方程成立

$$0=\frac{\partial Z_I}{\partial\ln(a)}=\frac{1}{Z_0}\frac{\partial Z}{\partial\ln(a)}-\frac{Z}{Z_0}\frac{\partial Z_0}{Z_0\partial\ln(a)}. \tag{39}$$

首先根据Z_0的定义，我们容易有

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z_0}{Z_0\partial\ln(a)}=&-\frac{1}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\partial K^{-1}}{\partial\ln(a)}(p^2+m^2)\frac{1}{Z_0}\int[d\phi]\phi(p)\phi(-p)e^{-S_0(a)}\\=&-\frac{1}{2}\delta^4(0)\int d^4p\frac{\partial K^{-1}}{\partial\ln(a)}K=\frac{1}{2}\delta^4(0)\int d^4p\frac{\partial\ln(K)}{\partial\ln(a)}.\end{aligned} \tag{40}$$

在上式的第二行中，我们代入了(36)式。

下面推导的关键是利用泛函积分的Dyson-Schwinger方程，也就是

$$\int [d\phi] \frac{\delta}{\delta\phi(p)} \mathcal{F}(\phi) = 0, \tag{41}$$

式中$\mathcal{F}(\phi)$是ϕ的泛函，并且我们假定场位形空间是一个闭合流形，或者如果场位形空间有边界或渐进边界，我们就假定在边界上$\mathcal{F}(\phi) \to 0$。

应用上面的Dyson-Schwinger方程，我们就有，

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{2}\int d^4p \frac{(2\pi)^4}{p^2+m^2}\frac{\partial K}{\partial \ln(a)} \int [d\phi] \frac{\delta}{\delta\phi(p)} \left(\frac{\delta e^{-S_I}}{\delta\phi(-p)} e^{-S_0} \right) \\ = & \int d^4p \frac{(2\pi)^4}{p^2+m^2}\frac{\partial K}{\partial \ln(a)} \int [d\phi] \left(\frac{1}{2}\frac{\delta^2 e^{-S_I}}{\delta\phi(p)\delta\phi(-p)} e^{-S_0} - \frac{1}{2}\frac{\delta e^{-S_I}}{\delta\phi(-p)}\frac{\delta S_0}{\delta\phi(p)} e^{-S_0} \right), \end{aligned} \tag{42}$$

通过对泛函积分进行分部积分，上式第二行的第二项显然又等于

$$\begin{aligned} & \int d^4p \frac{(2\pi)^4}{p^2+m^2}\frac{\partial K}{\partial \ln(a)} \int [d\phi] \left(\frac{1}{2}\frac{\delta^2 S_0}{\delta\phi(-p)\delta\phi(p)} - \frac{1}{2}\frac{\delta S_0}{\delta\phi(-p)}\frac{\delta S_0}{\delta\phi(p)} \right) e^{-S_0-S_I} \\ = & \int [d\phi] \int d^4p \left(\frac{1}{2}\frac{\partial K}{K\partial \ln(a)} \delta^4(0) + \frac{1}{2}\frac{\partial K^{-1}}{\partial \ln(a)} \phi(p)\phi(-p)\frac{p^2+m^2}{(2\pi)^4} \right) e^{-S_0-S_I}, \\ = & \frac{1}{2}\int d^4p \frac{\partial \ln(K)}{\partial \ln(a)} \delta^4(0) \int [d\phi] e^{-S_0-S_I} - \int [d\phi] \frac{\partial e^{-S_0}}{\partial \ln(a)} e^{-S_I}. \end{aligned} \tag{43}$$

上式的第二行我们利用了

$$\frac{\delta^2 S_0}{\delta\phi(-p)\delta\phi(p)} = \delta^4(0) \frac{p^2+m^2}{(2\pi)^4 K}. \tag{44}$$

请注意不要漏了前面的$\delta^4(0)$，这里很容易搞错，请读者严格按照二阶泛函导数的定义进行推导。

结合(42)式和(43)式，我们就有

$$\begin{aligned} & \int d^4p \frac{(2\pi)^4}{p^2+m^2}\frac{\partial K}{\partial \ln(a)} \int [d\phi] \left(\frac{1}{2}\frac{\delta^2 e^{-S_I}}{\delta\phi(p)\delta\phi(-p)} e^{-S_0} \right) \\ & - \int [d\phi] \frac{\partial e^{-S_0}}{\partial \ln(a)} e^{-S_I} + \frac{1}{2}\int d^4p \frac{\partial \ln(K)}{\partial \ln(a)} \delta^4(0) \int [d\phi] e^{-S_0-S_I} = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

因此, 如果$e^{-S_I(a)}$满足下面的重整化群方程

$$\frac{\partial e^{-S_I}}{\partial \ln a} = -\frac{1}{2}\int d^4p \frac{(2\pi)^4}{p^2+m^2}\frac{\partial K}{\partial \ln a} \frac{\delta^2 e^{-S_I}}{\delta\phi(-p)\delta\phi(p)}. \tag{46}$$

则, 我们就有(要将所有式子除以Z_0)

$$
\begin{aligned}
0 =& \frac{1}{Z_0}\int[d\phi]\frac{\partial e^{-S_I}}{\partial \ln a}e^{-S_0} + \frac{1}{Z_0}\int[d\phi]\frac{\partial e^{-S_0}}{\partial \ln a}e^{-S_I} \\
& -\frac{1}{2}\int d^4p\frac{\partial \ln(K)}{\partial \ln(a)}\delta^4(0)\frac{1}{Z_0}\int[d\phi]e^{-S_0-S_I}.
\end{aligned} \tag{47}
$$

代入(40)式，我们就可以将上面结果重写成

$$
0 = \frac{1}{Z_0}\frac{\partial Z}{\partial \ln(a)} - \frac{Z}{Z_0}\frac{\partial Z_0}{Z_0 \partial \ln(a)}. \tag{48}
$$

这正是我们想要的(39)式。换言之，如果重整化群方程(46)成立，则配分函数Z_I与重整化尺度无关。

很显然，在上面的推导中我们可以将相互作用e^{-S_I}换成ϕ的任意泛函$\mathcal{F}(\phi)$，比方说$\mathcal{F}(\phi)$可以取成乘积算子$\phi(q_1)\phi(q_2)$。完全一样的推导告诉我们，对于任意这样的$\mathcal{F}(\phi)$，如果它满足重整化群方程

$$
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \ln a} = -\frac{1}{2}\int d^4p\frac{(2\pi)^4}{p^2+m^2}\frac{\partial K}{\partial \ln a}\frac{\delta^2 \mathcal{F}}{\delta\phi(-p)\delta\phi(p)}, \tag{49}
$$

那么自由场关联函数$\langle \mathcal{F}(\phi)\rangle_0$在重整化群下保持不变，即

$$
\frac{\partial}{\partial \ln(a)}\left[\frac{1}{Z_0}\int[d\phi]\mathcal{F}(\phi)e^{-S_0}\right] = 0. \tag{50}
$$

比如我们取$\mathcal{F}$为$\phi(q_1)\phi(q_2)$, 那么重整化群方程(49)告诉我们，真正的重整化以后的算子$\mathcal{F}$应该取成

$$
\mathcal{F} = \phi(q_1)\phi(q_2) - \langle\phi(q_1)\phi(q_2)\rangle_0, \tag{51}
$$

式中的自由场关联函数$\langle\phi(q_1)\phi(q_2)\rangle_0 = (2\pi)^4\delta^4(q_1+q_2)K(q_1^2a^2)/(q_1^2+m^2)$，这样的结果当然是众所周知的。

让我们再来看看前面的方程(46), 它可以重写成

$$
\frac{\partial S_I}{\partial \ln a} = -\frac{1}{2}\int d^4p\frac{(2\pi)^4}{p^2+m^2}\frac{\partial K}{\partial \ln a}\left(\frac{\delta^2 S_I}{\delta\phi(-p)\delta\phi(p)} - \frac{\delta S_I}{\delta\phi(-p)}\frac{\delta S_I}{\delta\phi(p)}\right). \tag{52}
$$

这个方程在费曼图计算中有很直观的解释，它的左边是耦合常数的重整化，右边的第一项说明这种重整化可能来源于同一个顶角上的两个算子的收缩，右边的第二项则说它还可能来源于两个不同顶角上算子的收缩，也就是说耦合常数的重整化来源于积掉短程自由度。这也正是重整化变换的物理实质，找到重整化群的这个物理含义当然是K.G.Wilson 的巨大贡献。

5 从重整化群的物理实质到理解生命现象

这一节纯粹是一点私货，据我所知，这一节的观点在其它地方好像都没见到过，希望对读者有所启发。

首先，让我们重复一下前面的这段话：重整化群实际上是一个关于如何处理多尺度多自由度系统的纲领，重整化变换的物理实质就是积去小尺度的短程自由度，这样的操作之所以起作用是基础于两个基本的观察：第一，小尺度短程自由度对于更大尺度的长程物理是有影响的，第二，但是只要合适地选取表达理论的变量，那么这个影响就可以用几个相关参数来概括，几个参数就可以概括小尺度的所有相关信息，至于短程结构的更多细节信息则与大尺度物理无关。因此，通过积去短程自由度你就能忽略小尺度结构的无关细节，得到一个与你所关心的尺度的物理密切相关的有效理论。

重整化群这种处理多尺度多自由度系统的纲领已经被证明反映了凝聚态物理系统和量子场论系统的本质。然而，生命现象也是从无生命的原子分子中呈展出来的，任何有生命的系统都是一个多尺度多自由度系统。但是这种多尺度多自由度系统和传统凝聚态物理或量子场论中研究的系统有所不同，其中一个关键的不同是，凝聚态系统和量子场论系统的大尺度物理都是由小尺度结构决定的，重整化群流只能从小尺度流向大尺度，然而生命系统的典型特征之一是，大尺度可以反过来影响和调节小尺度的结构，也即是说，在生命系统这样的系统中，多尺度之间的相互沟通更为复杂和丰富，因此重整化群的纲领很可能不能完全适用，这里很可能还需要全新的想法！

与此相关的另一个重要不同是，一般来说在重整化群流之下，系统的熵一定是增加的，因为重整化操作本身就意味着不断舍弃小尺度的无关信息。然而，生命系统与此相当不同，当然，在生命系统中从小尺度到大尺度也一定有大量信息是无关而应该被舍弃的，不同的是，在生命系统中许多真正有意思的信息并不是原来就存在于小尺度结构之中，反而正是来源于宏观大尺度的输入，因此，生命系统的从小尺度到大尺度不完全是一个提取相关信息舍弃无关信息的过程（正是这一点和重整化群有本质区别），它同时还需要相关信息（负熵）的输入（也即是，生命系统总体上要保持在向环境排出更多熵而吸收更少熵的状态）。也许，正是这个相关信息（负熵）的输入使得生命系统的大尺度结构可以反过来调节小尺度结构。归纳来说，在生命系统中存在两个不同的相关信息流向，一个是小尺

度的相关信息随着重整化群流流向大尺度的结构，然而，在生命系统中同时还存在一个负熵流，或者说一个反向的相关信息流，它是从大尺度流向小尺度的。生命现象正是这两种相关信息流向共同作用的结果，因此要真正理解生命现象我们也许就必须发展一个处理多尺度多自由度系统的新框架，重整化群和负熵流也许必须同时被包括进这样的框架之中。

在这个系列讲稿的最后这一节，我们花了一点篇幅来讨论重整化群的物理实质和它的可能推广。目的是为了说明，生命系统同样是一个多尺度多自由度物理系统，然而这个系统和我们以前用重整化群来处理的那些系统都有所不同，人们也许需要一个新的框架才能处理生命系统这样不可思议的多尺度多自由度系统。