奇妙的四元数

陈童

1 上

你可能听说过哈密尔顿的四元数，不过不一定了解四元数在现代抽象代数发展历史上的地位。简言之，四元数之于抽象代数，有点类似于非欧几何之于现代几何学，它们一起带来了一场数学观念的革命！

四元数的定义很简单，就是在实数的基础上添加三个新的元素$\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}$, 并让它们满足下面这两组简单的代数关系

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1 \tag{1}$$

$$-\mathrm{ji}=\mathrm{ij}=\mathrm{k},-\mathrm{kj}=\mathrm{jk}=\mathrm{i},-\mathrm{ik}=\mathrm{ki}=\mathrm{j}. \tag{2}$$

现在，请你停止问$\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}$是什么东西，$\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}$是什么东西不重要，它们的代数规则才重要，也不要问自然界中什么东西满足这样的规则，这也不重要。数学是一种游戏，游戏的规则由人而不是由自然制定，对这规则的唯一限制是，由它所推导出来的整个游戏一定不能出现任何逻辑上的相互矛盾。现代数学家称这些由“数学游戏规则”生成的“数学游戏”为数学结构。数学结构不必是自然的反映，只需逻辑一致，另外，当然还要有某种深层次上的美。实际上，从数学是自然的反映的观念转向数学结构的观念是现代数学的一场观念革命。

回到四元数。新添加的这三个元素最妙的地方在于，它们的乘法不满足交换律！它们是反交换的，比如$\mathrm{ij}=-\mathrm{ji}$。

那么，在这个新的游戏规则之下，我们能玩些什么游戏呢？让我们从一个整数的例子开始，关于整数有一条规律是这样的，假定有两个整数a,b,它们都能写成四个整数的平方和，则这两个整数的乘积ab也一定能

写成四个整数的平方和。比如$4=1^2+1^2+1^2+1^2$, $10=1^2+1^2+2^2+2^2$,则乘积$40=4^2+2^2+2^2+4^2$。再比如$30=1^2+2^2+3^2+4^2$, $10=1^2+1^2+2^2+2^2$,则乘积$300=15^2+1^2+5^2+7^2$。这当然是一个有趣的规律，问题是怎么证明它普遍成立呢？

利用四元数我们就能够很容易地证明它。假定我们有一个一般的四元数x,

$$x=x_0+x_1\mathrm{i}+x_2\mathrm{j}+x_3\mathrm{k}, \tag{3}$$

其中，x_0,x_1,x_2,x_3当然是四个实数。现在我们构造一个新的四元数，不妨记作$\overline{x}$, 称为x的共轭，

$$\overline{x}=x_0-x_1\mathrm{i}-x_2\mathrm{j}-x_3\mathrm{k}. \tag{4}$$

利用(1)(2), 你很容易计算出来

$$\overline{x}x=x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2, \tag{5}$$

我们就称这为四元数x的模方$|x|^2$, 是一个实数。可见，一个四元数的模方总是四个数的平方和，反过来，假定有一个整数能写成四个整数的平方和，那么总有一个相应的四元数，其模方等于这个整数。

现在假定我们另有一个四元数y,

$$y=y_0+y_1\mathrm{i}+y_2\mathrm{j}+y_3\mathrm{k}. \tag{6}$$

和上面完全一样的，我们也可以求其模方，这模方当然也是四个整数的平方和。很显然，这两个四元数的乘积xy也是一个四元数，其模方$|xy|^2$当然也是四个数的平方和。下面是一个关键点，在计算xy的模方时，我们要用到xy的共轭$\overline{xy}$, 利用四元数的代数关系(1)(2)，我们可以证明

$$\overline{xy}=\overline{y}\cdot\overline{x}. \tag{7}$$

因此，$|xy|^2=xy\overline{xy}=xy\overline{y}\cdot\overline{x}=|y|^2x\overline{x}=|x|^2|y|^2$. 因此，如果有两个整数，均为四个整数的平方和，那么它们就分别相应于$|x|^2$和$|y|^2$,则它们的乘

积$|x|^2|y|^2$ 就一定可以写成一个新的四元数xy的模方$|xy|^2$, 也就是说，必定也可以写成四个整数的平方和。这样我们就一般性地证明了那个关于整数的有趣规律。

四元数的游戏能够玩出来的有意思东西还有很多。然而最让人觉得不可思议的也许是，看起来很人为的构造(1)(2), 竟然无论你怎么玩永远都不会出现矛盾。不满足乘法交换律的代数在逻辑的一致性上竟然和熟知的整数，实数，甚至复数一样真实。

写到这里，你可能早就意识到了，四元数其实是复数的某种推广。那么四元数能不能被进一步推广呢？有一个数学定理是这样说的：如果不破坏乘法结合律，那么就到此为止，再不能进一步推广了。

2 中

继续我们的四元数游戏。这次我们把注意力集中于模长为1的四元数集合，$\mathrm{u} = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$, 模长为一$\bar{u}u = 1$，就给出$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, 这就是四维欧几里德空间的三维单位球面$S^3$。更有趣的是，任意两个模长为1的四元数的乘积任然是一个模长为1的四元数，并且每一个模长为1的四元数u, 都有一个模长为1的四元数$\mathrm{u}^{-1} = \bar{\mathrm{u}}$作为其逆。也就是说，所有模长为1的四元数在四元数的乘法下成为一个群，通常将这个群记为$Sp(1, \mathrm{H})$, H表示四元数。前面的分析告诉我们，$Sp(1, \mathrm{H})$ 的元素一一对应于S^3上的点。

现在，我们选取一个S^3上的球坐标，则任意群元u必定可以写成$\mathrm{u} = \cos(\omega) + \sin(\omega)(n_1\mathrm{i} + n_2\mathrm{j} + n_3\mathrm{k})$, 其中$n_1, n_2, n_3$为三维单位矢量$\vec{n}$的三个分量。不妨将四元数$n_1\mathrm{i} + n_2\mathrm{j} + n_3\mathrm{k}$记成n, 由四元数代数显然有$\mathrm{n}^2 = -1$。另外，在球坐标中，$\omega$是纬线与北极的夹角，其取值范围是$[0, \pi]$。人们通常将角度$\omega$写成$\omega/2$, 其原因我们稍后会给出，现在$\omega$的取值范围当然就是$[0, 2\pi]$。总之，我们可以将$Sp(1, \mathrm{H})$的任意群元u写成

$$\mathrm{u} = \cos(\frac{\omega}{2}) + \mathrm{n}\sin(\frac{\omega}{2}). \tag{8}$$

注意到$\mathrm{n}^2=-1$, 也就是说，在代数上四元数n和虚数单位i是一样的，因此我们同样有欧拉公式，即任意$Sp(1,\mathrm{H})$的群元都可以写成

$$\mathrm{u}(\omega,\vec{n})=\exp(\frac{\omega}{2}\mathrm{n})=\cos(\frac{\omega}{2})+\mathrm{n}\sin(\frac{\omega}{2}). \tag{9}$$

显然,$\exp(\frac{\omega}{2}\mathrm{n})$的逆元是$\exp(-\frac{\omega}{2}\mathrm{n})$.

群$Sp(1,\mathrm{H})$有一个三维矢量空间旋转的直观解释。为了说清楚这一点，我们将三维空间中的每一个矢量$\vec{x}$，对应到一个四元数x, $\mathrm{x}=x_1\mathrm{i}+x_2\mathrm{j}+x_3\mathrm{k}$, 其中$x_1,x_2,x_3$是矢量$\vec{x}$的三个坐标分量。假定另有一个这样的四元数y, 它相应于三维矢量$\vec{y}$。运用四元素代数我们就有，

$$\mathrm{xy}=-(\vec{x}\cdot\vec{y})+\mathrm{x}\times\mathrm{y}, \tag{10}$$

式中$\mathrm{x}\times\mathrm{y}$代表一个四元数，其相应的三维矢量是$\vec{x}\times\vec{y}$.

现在我们将$Sp(1,\mathrm{H})$的群元共轭地作用在相应于三维矢量$\vec{x}$的四元数x上，

$$\begin{aligned}&\exp\left(\frac{\omega}{2}\mathrm{n}\right)\mathrm{x}\exp(-\frac{\omega}{2}\mathrm{n})\\=&[\cos(\frac{\omega}{2})+\mathrm{n}\sin(\frac{\omega}{2})]\mathrm{x}[\cos(\frac{\omega}{2})-\mathrm{n}\sin(\frac{\omega}{2})]\\=&\cos(\omega)\mathrm{x}+\sin(\omega)\mathrm{n}\times\mathrm{x}+(\vec{n}\cdot\vec{x})\mathrm{n}(1-\cos(\omega))\end{aligned} \tag{11}$$

为了得到上式的最后一行我们运用了公式(10)。最后得到的这个看起来有点复杂的结果其实就是将矢量$\vec{x}$绕$\vec{n}$轴旋转一个角度ω(正因为ω是旋转角度，所以我们前面要做那个$\omega\rightarrow\omega/2$的替换)。这可以证明如下：首先假定$\vec{x}$ 在垂直于$\vec{n}$ 的平面上，这时候很容易验证将$\vec{x}$绕$\vec{n}$旋转ω就是$\cos(\omega)\vec{x}+\sin(\omega)\vec{n}\times\vec{x}$, 正好相应于(11)最后一行给出的四元数。其次，如果$\vec{x}$本身就沿着$\vec{n}$的方向，这时候$\vec{x}$绕$\vec{n}$轴旋转当然是不变的，注意到这时$\vec{x}=\vec{n}(\vec{x}\cdot\vec{n})$, 也正好和(11)最后一行一致。最后，如果$\vec{x}$是一个一般的矢量，则我们总可以将之分解成一个垂直于$\vec{n}$的矢量和一个平行于$\vec{n}$的矢量的叠加，矢量的叠加性告诉我们，最终我们的公式必定能够写成(11)最后一行的形式。

也就是说，三维空间的每一个旋转，都对应于一个$Sp(1,\mathrm{H})$群元$\mathrm{u}(\omega,\vec{n})$。反过来，两个$Sp(1,\mathrm{H})$的群元$\pm\mathrm{u}(\omega,\vec{n})$对应于同一个三维空间旋转。并且这个对应保持群的乘法不变。因此，$Sp(1,\mathrm{H})$与三维旋转群$SO(3)$之间有2对1的同态对应。或者说，$Sp(1,\mathrm{H})$同构于$SU(2)$群。特别有趣的是，由(8)我们有，当$\omega=2\pi$时，$\mathrm{u}(2\pi,\vec{n})=-1$, 也就是说转动$2\pi$角并不是不变，而是多出一个负号，只有转动$4\pi$角才是1，$\mathrm{u}(4\pi,\vec{n})=1$。

你可能已经注意到了，三维空间中的单位矢量一一对应于平方为-1的四元数。现在，我们取定一个相应于三维单位矢量$\vec{m}$的四元数m, 并将$Sp(1,\mathrm{H})$ 的群元u共轭地作用在它上面，

$$\mathrm{u}\to\mathrm{m}(\mathrm{u})=\mathrm{u}^{-1}\mathrm{m}\mathrm{u} \tag{12}$$

很容易验证m(u)的平方和预先选定的四元数m的平方一样，均为-1, 因此，每一个m(u)都对应三维空间的一个单位矢量，或者说对应于两维单位球面S^2上的一个点。由于群元u相应于三维球面上的点，因此$\mathrm{u}\to\mathrm{m}(\mathrm{u})$就定义了一个$S^3\to S^2$的映射。这就是著名的Hopf映射。

为了看清Hopf映射的奇妙之处，我们注意到$\mathrm{m}(e^{\mathrm{m}\theta}\mathrm{u})=\mathrm{m}(\mathrm{u})$，其中$e^{\mathrm{m}\theta}=\cos(\theta)+\mathrm{m}\sin(\theta)$画出了一个圆周$S^1$，所以，对于$S^2$ 上的每一点，其Hopf映射的原像是S^3上的一个圆周。也就是说Hopf映射在底流形S^2上定义了一个非平凡的圆周丛，这个丛的总空间为S^3。

以上是将$Sp(1,\mathrm{H})$群元作用在相应于三维矢量的四元数上，那么如果将它作用在一个任意的四元数$\mathrm{x}=x_0+x_1\mathrm{i}+x_2\mathrm{j}+x_3\mathrm{k}$上呢？(显然这样一个任意的四元数相应于一个四维的矢量(x_0,x_1,x_2,x_3))。实际上我们可以更一般地考虑两个相互独立的$Sp(1,\mathrm{H})$群元(分别记为u_L, u_R)从左右两边同时作用在x上，这实际上是对x 的一个线性变换

$$\mathrm{x}\to\mathrm{x}'=\mathrm{u}_L\mathrm{x}\mathrm{u}_R, \tag{13}$$

由于u的模长为1，很显然，这个线性变换不会改变x的模长，因此它相应于四维矢量(x_0,x_1,x_2,x_3)在四维空间的一个旋转。同样的，我们注意到$(\mathrm{u}_L,\mathrm{u}_R)$ 和$(-\mathrm{u}_L,-\mathrm{u}_R)$对应的是同一个四维旋转，也就是说$Sp(1,\mathrm{H})\times$

$Sp(1,\mathrm{H})$ 与$SO(4)$之间有2对1的同态对应，因此，$Sp(1,\mathrm{H})\times Sp(1,\mathrm{H})$同构于Spin(4)。

3 下

前面我们让你不要问i, j, k是什么东西，也不要问它们之间那个奇怪的乘法又是什么东西，而是把这一切当成一种奇妙的游戏。这一节我们来谈一谈如何用我们更熟悉的数学对象来实现这种四元数的代数游戏。这就是所谓的四元数代数的表示。这里的奇妙现象是，四元数的奇怪乘法可以用矩阵的乘法来实现。

我们首先注意到任意一个四元数都可以写成$\mathrm{u}=(a+b\mathrm{i})+(c+\mathrm{i}d)\mathrm{j}$的形式，这启发我们将四元数里的i等同于复数单位$i$, 因此任何四元数都可以用两个复数$z_1=(a+b\mathrm{i})$, $z_2=(c+\mathrm{i}d)$表示成

$$\mathrm{u}=z_1+z_2\mathrm{j}. \tag{14}$$

值得注意的是由于四元数的j和i反对易，因此j和复数z之间有关系式，$\mathrm{j}z=\overline{z}\mathrm{j}$.

假定我们另有一个四元数$\mathrm{v}=w_1+w_2\mathrm{j}$($w_1,w_2$也是两个复数), 那么由四元数的乘法，我们可以计算得

$$\mathrm{uv}=(z_1w_1-z_2\overline{w}_2)+(z_1w_2+z_2\overline{w}_1)\mathrm{j}. \tag{15}$$

也就是说，我们可以将每一个四元数u看成一个复数对(z_1,z_2)，四元数的乘法就等价于在这个复数对空间定义如下的乘法

$$(z_1,z_2)\cdot(w_1,w_2)=(z_1w_1-z_2\overline{w}_2,z_1w_2+z_2\overline{w}_1). \tag{16}$$

当然这依然是一种奇怪的乘法，下面我们要做的就是继续将这种奇怪的复数对乘法对应到更通常的矩阵乘法。

为此，我们将复数对(z_1,z_2)对应到一个2×2的矩阵，

$$(z_1,z_2)\to\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

当我们将所有的复数对都做了这样的矩阵对应以后，我们很容易发现复数对的奇怪乘法(16) 自然地对应于下面这个通常的矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ -\overline{w}_2 & \overline{w}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 w_1 - z_2 \overline{w}_2 & z_1 w_2 + z_2 \overline{w}_1 \\ -(\overline{z_1 w_2 + z_2 \overline{w}_1}) & \overline{z_1 w_1 - z_2 \overline{w}_2} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

这样我们就找到了奇怪的四元数代数的矩阵代数实现。让我们简单将这里的逻辑整理一下，首先，我们发现四元数代数可以实现为复数对的乘法(16), 其次，我们又发现复数对的这种乘法完全对应于形如(17)类型的2×2矩阵的矩阵乘法。因此，我们就将四元数代数实现成了形如下式的矩阵的矩阵代数，

$$\mathrm{u} = z_1 + z_2 \mathrm{j} \to \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

这个矩阵代数就称为四元数代数的一个矩阵表示，实际上，它是四元数代数的最小矩阵表示。

很容易验证的是，形如(19)的这些表示矩阵其实就是所有满足

$$JU = \overline{U} J \quad (20)$$

的2×2复矩阵U, 这里$\overline{U}$代表U的复共轭矩阵，J是满足$J^2 = -1$的一个2×2矩阵, 它就是四元数里的j在(19)这个矩阵表示中的实现，具体来说就是

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

方程(20)也称为2×2复矩阵空间的赝实条件，所以，四元数代数可以不可约地表示为所有满足赝实条件的2×2复矩阵的矩阵代数。这就解释了为什么初看起来人为地定义的四元数游戏永远都不会出现自相矛盾，因为它等价一类矩阵的乘法代数，而矩阵的乘法我们知道当然是没有自相矛盾的。