

# 目录

<b>第十八章 哈密顿表述与ADM能量</b>	<b>2</b>
18.1 时空中的超曲面 . . . . .	2
18.1.1 超曲面与ADM分解 . . . . .	2
18.1.2 外曲率 . . . . .	6
18.1.3 超曲面上的协变导数 . . . . .	7
18.1.4 Gauss-Codazzi 方程 . . . . .	8
18.2 引力作用量的边界项 . . . . .	12
18.3 哈密顿表述与ADM能量 . . . . .	16
18.3.1 构造类时边界 . . . . .	17
18.3.2 引力作用量的ADM分解 . . . . .	19
18.3.3 引力场的哈密顿量 . . . . .	22
18.3.4 ADM能量 . . . . .	25

# 第十八章 哈密顿表述与ADM能量

陈童

本章主要是想讨论如何将哈密顿力学的框架应用于广义相对论的研究。这不仅在时空动力学演化的数值模拟中很重要，而且还可以给出引力场哈密顿量的表达式，以及引力场能量的一个合理定义，也就是所谓的ADM能量(Arnowitt-Deser-Misner能量)。但是为了系统地处理这些问题，需要在数学和物理两方面做一些准备，数学上的准备就是要系统地研究如何将时空流形分解为不同时刻的一系列空间切片，也就是所谓的 $3+1$ 分解或者ADM分解，而物理上的准备就是要引入引力场作用量的边界项，也就是所谓的Gibbons-Hawking-York边界项。本章将从数学准备开始，讲清楚所有这些问题。

## 18.1 时空中的超曲面

### 18.1.1 超曲面与ADM分解

考虑 $n$ 维时空中的 $n-1$ 维超曲面，记作 $\Sigma$ ，通常也称作余1维超曲面(由于 $n-(n-1)=1$ )。这样的超曲面常常可以由一个光滑函数 $S(x)$ 按照如下方程刻画

$$S(x) = \sigma, \tag{18.1}$$

式中 $\sigma$ 为常数。不同的常数 $\sigma$ 将给出不同的余1维超曲面，它们形成一个超曲面簇，通常称这样的簇为时空流形的页层化。局域地，我们总可以

用 $n - 1$ 维坐标 $y^a, a = 1, 2, \dots, n - 1$ 参数化 $\Sigma$ , 进而可以将时空的局域坐标选取为 $(\sigma, y^a)$ 。

如果 $\Sigma$ 本身是某个时空区域 $\mathcal{D}$ 的边界, 记作 $\Sigma = \partial\mathcal{D}$ , 则 $\Sigma$ 必定是一个闭合超曲面, 也即是说,  $\Sigma$ 自己将没有边界。这当然是因为边界的边界总等于零, 即

$$\partial\partial\mathcal{D} = 0. \quad (18.2)$$

$S(x)$ 的梯度将给出 $\Sigma$ 的余法矢量, 具体来说,  $\Sigma$ 的余法矢量 $n_\mu$ 正比于 $\partial_\mu S(x)$ , 即

$$n_\mu = f(x)\partial_\mu S(x). \quad (18.3)$$

式中 $f(x)$ 为任意标量函数。当然, 将 $n_\mu$ 的指标升上去就是法矢量 $n^\mu$ 。如果 $n^\mu$ 不是类光矢量, 则我们总可以通过适当地选取 $f(x)$ , 使得 $n^\mu$ 成为单位法矢量, 即满足

$$g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = \epsilon, \quad (18.4)$$

式中 $\epsilon = +1, -1$ 分别对应 $n^\mu$ 为类空和类时矢量的情形。如果 $n^\mu$ 处处类时, 则称相应的超曲面 $\Sigma$ 为类空超曲面, 反之, 如果法矢量 $n^\mu$ 处处类空, 则称相应 $\Sigma$ 为类时超曲面。

利用方程(18.3)不难证明, 超曲面的法矢量满足所谓的Frobenius定理

$$n_{[\mu}D_\nu n_{\rho]} = 0. \quad (18.5)$$

证明很简单, 只需注意到联络系数关于两个下指标是对称的, 从而在全反对称操作下贡献为零即可。换言之, 我们有 $n_{[\mu}D_\nu n_{\rho]} = n_{[\mu}\partial_\nu n_{\rho]}$ , 进而利用方程(18.3)很快就能得出结果等于零。反过来, 如果一个矢量场 $n_\mu$ 满足如上Frobenius定理, 那么它必定是某个余1维超曲面的法矢量场, 具体证明请读者们参阅微分流形相关书籍。

当用 $y^a$ 参数化了 $\Sigma$ 以后,  $\frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}\partial_\mu$ 当然就是 $\Sigma$ 的切矢量场, 常常将其指标形式记为 $e_a^\mu$ , 也即是说

$$e_a^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a}. \quad (18.6)$$

作为 $\Sigma$ 的切矢量场,  $e_a^\mu$ 当然和法矢量 $n^\mu$ 正交, 即有

$$n_\mu e_a^\mu = 0. \quad (18.7)$$

定义

$$h^\mu_\nu \equiv \delta^\mu_\nu - \epsilon n^\mu n_\nu, \quad (18.8)$$

不难验证,

$$h^\mu_\nu h^\nu_\rho = h^\mu_\rho, \quad (18.9)$$

从而  $h^\mu_\nu$  是所谓的投影算符(不要和引力波那一章中的符号混淆了, 两者之间没有关系)。同样不难验证, 在这个投影算符的作用下

$$h^\mu_\nu e^\nu_a = e^\mu_a, \quad h^\mu_\nu n^\nu = 0, \quad h^\mu_\nu n_\mu = 0. \quad (18.10)$$

也即是说, 这个投影算符的作用是向着超曲面  $\Sigma$  的切向进行投影。

记  $h^\mu_\nu$  降指标以后的结果为  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \epsilon n_\mu n_\nu$ , 根据投影恒等式以及指标升降关系不难验证,  $h_{\mu\nu}$  正好就是原来的度规张量  $g_{\mu\nu}$  向着超曲面  $\Sigma$  的切向投影的结果,

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \epsilon n_\mu n_\nu = h^\rho_\mu h^\sigma_\nu g_{\rho\sigma}. \quad (18.11)$$

因此, 与  $h_{\mu\nu}$  相关的, 可以引入超曲面上的诱导度规  $h_{ab}$ , 定义如下

$$h_{ab} \equiv e^\mu_a e^\nu_b h_{\mu\nu} = e^\mu_a e^\nu_b g_{\mu\nu}, \quad (18.12)$$

其中第二个等于号是利用了  $n_\mu e^\mu_a = 0$ 。

$h_{ab}$  的逆矩阵记为  $h^{ab}$ , 它们可以对超曲面的指标  $a, b, \dots$  进行升降或者缩并。值得注意的是, 虽然  $h^{ab}$  为  $h_{ab}$  的逆矩阵, 但是,  $h^{\mu\nu}$  并不是  $h_{\mu\nu}$  的逆矩阵, 而是它用逆度规张量  $g^{\mu\nu}$  升指标的结果。事实上,  $h_{\mu\nu}$  是一个秩为  $n - 1$  的  $n \times n$  矩阵, 它没有逆矩阵。

不过, 我们有如下完备性关系式

$$g^{\mu\nu} = \epsilon n^\mu n^\nu + h^{ab} e^\mu_a e^\nu_b. \quad (18.13)$$

为了验证这个式子, 我们只需验证等式右边能给出和左边一样的各种内积关系, 比如, 等式右边显然可以给出  $n_\mu$  与  $n_\nu$  的内积为  $\epsilon$ , 也能给出  $e_{\mu a}$  与  $e_{\nu b}$  的内积为  $h_{ab}$ ,  $n_\mu$  与  $e_{\nu a}$  的内积为零。根据这个结果, 我们有

$$h^{ab} e^\mu_a e^\nu_b = g^{\mu\nu} - \epsilon n^\mu n^\nu = h^{\mu\nu}. \quad (18.14)$$

更一般地，任何与超曲面 $\Sigma$ 相切的张量场 $A^{\mu\nu\dots}$ 均可以作如下分解

$$A^{\mu\nu\dots} = A^{ab\dots} e_a^\mu e_b^\nu \dots, \quad (18.15)$$

很显然，这个式子的确意味着 $n_\mu A^{\mu\nu\dots} = n_\nu A^{\mu\nu\dots} = 0$ ，确证了 $A^{\mu\nu\dots}$ 是与 $\Sigma$ 相切的张量场。反过来也有

$$A_{ab\dots} = A_{\mu\nu\dots} e_a^\mu e_b^\nu \dots \quad (18.16)$$

因此，给定时空流形中任意一个张量场，我们可以用投影算符 $h^\mu_\nu$ 作用于其每一个指标，进而得到一个与 $\Sigma$ 相切的张量场，然后再利用上式，即可以得到一个相应的定义在 $\Sigma$ 上的诱导张量场。值得注意的是，诱导张量场 $A_{ab\dots}$ 仅仅相对于超曲面上的坐标变换 $y^a \rightarrow y'^a$ 来说才是张量，对于时空中的坐标变换 $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ 来说，它是标量。

当在时空流形上取局部坐标 $(\sigma, y^a)$ 以后，则除了超曲面上的切矢量 $e_a^\mu$ 以外，还可以进一步考察时空流形上的切矢量 $s^\mu$ ，其定义为

$$s^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}. \quad (18.17)$$

一般来说， $s^\mu$ 应该是 $n^\mu$ 与 $e_a^\mu$ 的线性组合，写作

$$s^\mu = N n^\mu + N^a e_a^\mu. \quad (18.18)$$

进而即可以将时空流形上的坐标微分写成

$$dx^\mu = s^\mu d\sigma + e_a^\mu dy^a = N n^\mu d\sigma + (N^a d\sigma + dy^a) e_a^\mu. \quad (18.19)$$

因此，原来时空流形上的线元即可以写成

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \epsilon N^2 d\sigma^2 + h_{ab} (dy^a + N^a d\sigma)(dy^b + N^b d\sigma). \quad (18.20)$$

这称之为时空流形度规的ADM分解。

特别的，当 $\Sigma$ 为类空超曲面，从而 $\epsilon = -1$ 时，变量 $\sigma$ 就起到时间坐标的作用，这时候 $N$ 就称为时移函数(lapse function)， $N^a$ 就称为位移矢量(shift vector)。

不难看出，如果用矩阵形式，则上述度规的ADM分解可以写成

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} \epsilon N^2 + N^a N_a & N_a \\ N_a & h_{ab} \end{bmatrix}. \quad (18.21)$$

所以有

$$\sqrt{|g|} = N \sqrt{|h|}, \quad \text{其中 } h \equiv \det(h_{ab}). \quad (18.22)$$

### 18.1.2 外曲率

超曲面 $\Sigma$ 在时空流形中的弯曲情况经常由其外曲率刻画。外曲率张量是一个对称张量，其定义为

$$K_{ab} \equiv \frac{1}{2} e_a^\mu e_b^\nu \mathcal{L}_n g_{\mu\nu}, \quad (18.23)$$

式中 $\mathcal{L}_n$ 表示沿着向量场 $n^\mu$ 的李导数。根据第四章中的相关知识， $\frac{1}{2}\mathcal{L}_n g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(D_\mu n_\nu + D_\nu n_\mu) = D_{(\mu} n_{\nu)}$ ，所以上述定义又可以重写为

$$K_{ab} \equiv \frac{1}{2} e_a^\mu e_b^\nu \mathcal{L}_n g_{\mu\nu} = e_a^\mu e_b^\nu D_{(\mu} n_{\nu)}. \quad (18.24)$$

进一步， $K_{ab}$ 的迹为

$$K \equiv h^{ab} K_{ab}. \quad (18.25)$$

利用(18.13)式，即有

$$K = g^{\mu\nu} D_{(\mu} n_{\nu)} - \epsilon n^\mu n^\nu D_{(\mu} n_{\nu)} \quad (18.26)$$

注意到 $n^\mu n_\mu = \epsilon$ ，从而 $n^\mu D_\nu n_\mu = 0$ ，进而又可以把这个结果写成

$$K = D_\mu n^\mu. \quad (18.27)$$

注意到 $[\frac{\partial}{\partial y^a}, \frac{\partial}{\partial y^b}] = 0$ ，利用 $[X, Y] = 0 \Rightarrow D_X Y - D_Y X = 0$ ，从而 $D_{\partial_y^a} e_b^\mu - D_{\partial_y^b} e_a^\mu = 0$ ，也就是

$$e_a^\nu D_\nu e_b^\mu = e_b^\nu D_\nu e_a^\mu. \quad (18.28)$$

再利用 $n_\mu e_a^\mu = 0$ ，从而 $(D_\nu n_\mu) e_a^\mu = -n_\mu D_\nu e_a^\mu$ ，不难有

$$\begin{aligned} e_a^\mu e_b^\nu D_\mu n_\nu &= -e_a^\mu (D_\mu e_b^\nu) n_\nu \\ &= -e_b^\mu (D_\mu e_a^\nu) n_\nu = e_b^\mu e_a^\nu D_\mu n_\nu. \end{aligned} \quad (18.29)$$

也即是说， $e_a^\mu e_b^\nu D_\mu n_\nu$ 关于 $a, b$ 指标已经是对称的了，因此，

$$K_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu D_{(\mu} n_{\nu)} = e_a^\mu e_b^\nu D_\mu n_\nu. \quad (18.30)$$

外曲率描写的是超曲面在流形中的相对弯曲状况，它不是曲面本身内在的曲率，相同的超曲面(具有相同的诱导度规)放在不同的流形中，其外曲率往往不相同。

### 18.1.3 超曲面上的协变导数

我们想研究任意与超曲面 $\Sigma$ 相切的张量场 $A^{\mu\nu\cdots}$ 是如何求协变导数的，具体来说，我们想把 $A^{\mu\nu\cdots}$ 在时空流形中的协变导数与 $A^{ab\cdots}$ 在超曲面 $\Sigma$ 中的协变导数(联络系数由诱导度规 $h_{ab}$ 决定)联系起来。为了简单起见，我们考察一个与 $\Sigma$ 相切的矢量场 $A^\mu$ ，它满足

$$n_\mu A^\mu = 0, \quad A^\mu = A^a e_a^\mu, \quad A_a = A_\mu e_a^\mu. \quad (18.31)$$

我们定义 $A_a$ 在超曲面上的内禀协变导数 $\bar{D}_a A_b$ 为时空流形上的协变导数 $D_\mu A_\nu$ 向着超曲面切向的投影，也即

$$\bar{D}_a A_b \equiv e_a^\mu e_b^\nu (D_\mu A_\nu). \quad (18.32)$$

我们将证明， $\bar{D}_a$ 的联络系数正是与诱导度规 $h_{ab}$ 相容的克里斯托夫联络。

为此，我们把(18.32)式右边改写成

$$\begin{aligned} e_a^\mu e_b^\nu (D_\mu A_\nu) &= e_a^\mu D_\mu (e_b^\nu A_\nu) - (e_a^\mu D_\mu e_b^\nu) A_\nu \\ &= e_a^\mu D_\mu A_b - (e_a^\mu D_\mu e_{\nu b}) A^\nu \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \frac{\partial A_b}{\partial x^\mu} - (e_a^\mu D_\mu e_{\nu b}) e^{\nu c} A_c \\ &= \frac{\partial}{\partial y^a} A_b - \bar{\Gamma}_{ab}^c A_c \equiv \partial_a A_b - \bar{\Gamma}_{ab}^c A_c. \end{aligned} \quad (18.33)$$

式中我们定义了

$$\bar{\Gamma}_{ab}^c \equiv (e_a^\mu D_\mu e_{\nu b}) e^{\nu c} = (e_a^\mu D_\mu e_b^\nu) e_\nu^c. \quad (18.34)$$

利用(18.28)式，不难看出 $\bar{\Gamma}_{ab}^c$ 关于两个下指标 $a, b$ 对称。

另一方面，根据定义

$$\begin{aligned} \bar{D}_a h_{bc} &\equiv e_a^\mu e_b^\nu e_c^\rho (D_\mu h_{\nu\rho}) = e_a^\mu e_b^\nu e_c^\rho [D_\mu g_{\nu\rho} - \epsilon D_\mu (n_\nu n_\rho)] \\ &= -\epsilon e_a^\mu e_b^\nu e_c^\rho [(D_\mu n_\nu) n_\rho + n_\nu (D_\mu n_\rho)] = 0. \end{aligned} \quad (18.35)$$

式中最后一个等号是利用了 $n_\mu e_a^\mu = 0$ 。所以，协变导数 $\bar{D}_a$ 与诱导度规 $h_{bc}$ 相容，而刚才又证明了它的联络系数 $\bar{\Gamma}_{ab}^c$ 是对称的。进而根据第四章中的相关讨论可知，必定有

$$\bar{\Gamma}_{ab}^c = \frac{1}{2} h^{ce} (\partial_a h_{be} + \partial_b h_{ae} - \partial_e h_{ab}), \quad (18.36)$$

即 $\bar{\Gamma}_{ab}^c$ 为与诱导度规 $h_{ab}$ 相容的克里斯托夫联络。

### Gauss-Weingarten 方程

任给与超曲面 $\Sigma$ 相切的向量场 $A^\mu$ , 我们已经定义了 $\bar{D}_a A_b \equiv e_a^\mu e_b^\nu (\bar{D}_\mu A_\nu)$ 为向量场 $e_a^\mu D_\mu A_\nu$ 的切向投影。现在, 我们想问的是,  $e_a^\mu D_\mu A_\nu$ 的法向分量是多少?

为此, 我们将 $e_a^\mu D_\mu A^\nu$ 写作 $e_a^\mu D_\mu A^\rho g_\rho^\nu$ (当然,  $g_\rho^\nu$ 实际上就是 $\delta_\rho^\nu$ ), 代入(18.13)式, 即有

$$\begin{aligned} e_a^\mu D_\mu A^\nu &= (e_a^\mu D_\mu A^\rho) g_\rho^\nu = (e_a^\mu D_\mu A^\rho)(\epsilon n^\nu n_\rho + h^{bc} e_b^\nu e_{\rho c}) \\ &= \epsilon (e_a^\mu D_\mu A^\rho n_\rho) n^\nu + h^{bc} e_b^\nu (e_a^\mu e_c^\rho D_\mu A_\rho). \end{aligned} \quad (18.37)$$

注意到 $n_\mu A^\mu = 0$ , 从而 $D_\mu A^\rho n_\rho = -A^\rho D_\mu n_\rho$ , 代入上式即有

$$\begin{aligned} e_a^\mu D_\mu A^\nu &= -\epsilon (e_a^\mu A^\rho D_\mu n_\rho) n^\nu + h^{bc} e_b^\nu \bar{D}_a A_c \\ &= e_b^\nu \bar{D}_a A^b - \epsilon (e_a^\mu e_b^\rho D_\mu n_\rho) A^b n^\nu \\ &= e_b^\nu \bar{D}_a A^b - \epsilon K_{ab} A^b n^\nu. \end{aligned} \quad (18.38)$$

最后一行是代入了关于 $K_{ab}$ 的(18.30)式, 这一行的第一项就是切向分量, 第二项则是法向分量。很显然, 法向分量正比于外曲率, 当且仅当外曲率等于零时法向分量才等于零。

特别的, 取 $A^\nu = e_b^\nu$ , 从而 $A^a = \delta_b^a$ , 代入(18.38)式, 即有

$$e_a^\mu D_\mu e_b^\nu = e_c^\nu \bar{\Gamma}_{ab}^c - \epsilon K_{ab} n^\nu. \quad (18.39)$$

这就是所谓的Gauss-Weingarten 方程。

### 18.1.4 Gauss-Codazzi 方程

根据诱导度规 $h_{ab}$ , 当然可以算出超曲面 $\Sigma$ 的内禀曲率张量 $\bar{R}_{dab}^c$ , 和所有黎曼曲率张量一样, 它由下式定义

$$[\bar{D}_a, \bar{D}_b] A^c = \bar{R}_{dab}^c A^d, \quad (18.40)$$

根据协变导数 $\bar{D}_a$ 的定义, 即可以得出

$$\bar{R}_{dab}^c = \partial_a \bar{\Gamma}_{bd}^c - \partial_b \bar{\Gamma}_{ad}^c + \bar{\Gamma}_{ae}^c \bar{\Gamma}_{bd}^e - \bar{\Gamma}_{be}^c \bar{\Gamma}_{ad}^e. \quad (18.41)$$

另一方面，时空流形本身也有一个黎曼曲率张量  $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$ ，它是由时空上的度规张量  $g_{\mu\nu}$  决定的。我们想问，这两种黎曼曲率张量之间的关系是什么？

为此，我们从Gauss-Weingarten 方程开始，由它可得

$$e_a^\mu D_\mu(e_b^\nu D_\nu e_c^\rho) = e_a^\mu D_\mu(e_d^\rho \bar{\Gamma}_{bc}^d - \epsilon K_{bc} n^\rho). \quad (18.42)$$

对于这个方程的左手边(LHS)，我们有

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= e_a^\mu D_\mu(e_b^\nu D_\nu e_c^\rho) = e_a^\mu e_b^\nu (D_\mu D_\nu e_c^\rho) + (e_a^\mu D_\mu e_b^\nu) (D_\nu e_c^\rho) \\ &= e_a^\mu e_b^\nu (D_\mu D_\nu e_c^\rho) + (e_d^\rho \bar{\Gamma}_{ab}^d - \epsilon K_{ab} n^\rho) (D_\nu e_c^\rho) \\ &= e_a^\mu e_b^\nu (D_\mu D_\nu e_c^\rho) + \bar{\Gamma}_{ab}^d e_d^\nu D_\nu e_c^\rho - \epsilon K_{ab} (n^\nu D_\nu e_c^\rho) \\ &= e_a^\mu e_b^\nu (D_\mu D_\nu e_c^\rho) + \bar{\Gamma}_{ab}^d (e_e^\rho \bar{\Gamma}_{dc}^e - \epsilon K_{dc} n^\rho) - \epsilon K_{ab} (n^\nu D_\nu e_c^\rho). \end{aligned}$$

将这个结果减去  $ab$  置换以后的结果，即得

$$e_a^\mu e_b^\nu R_{\sigma\mu\nu}^\rho e_c^\sigma. \quad (18.43)$$

而对于方程(18.42)的右手边(RHS)，我们有

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= e_a^\mu D_\mu(e_d^\rho \bar{\Gamma}_{bc}^d - \epsilon K_{bc} n^\rho) \\ &= (e_a^\mu D_\mu e_d^\rho) \bar{\Gamma}_{bc}^d + e_d^\rho (\partial_a \bar{\Gamma}_{bc}^d) - \epsilon (\partial_a K_{bc}) n^\rho - \epsilon K_{bc} (e_a^\mu D_\mu n^\rho) \\ &= (e_e^\rho \bar{\Gamma}_{ad}^e - \epsilon K_{ad} n^\rho) \bar{\Gamma}_{bc}^d + e_e^\rho (\partial_a \bar{\Gamma}_{bc}^d) - \epsilon (\partial_a K_{bc}) n^\rho - \epsilon K_{bc} (e_a^\mu D_\mu n^\rho). \end{aligned}$$

同样，将这个结果减去  $ab$  置换以后的类似结果，即得

$$e_e^\rho \bar{R}_{cab}^e - \epsilon (\bar{D}_a K_{bc} - \bar{D}_b K_{ac}) n^\rho + \epsilon K_{ac} (e_b^\mu D_\mu n^\rho) - \epsilon K_{bc} (e_a^\mu D_\mu n^\rho). \quad (18.44)$$

令等式左边的(18.43)与等式右边的(18.44)相等，即得

$$\begin{aligned} &e_a^\mu e_b^\nu R_{\sigma\mu\nu}^\rho e_c^\sigma \\ &= e_e^\rho \bar{R}_{cab}^e - \epsilon (\bar{D}_a K_{bc} - \bar{D}_b K_{ac}) n^\rho + \epsilon K_{ac} (e_b^\mu D_\mu n^\rho) - \epsilon K_{bc} (e_a^\mu D_\mu n^\rho) \end{aligned}$$

将这个结果向切向投影，即得(用到关于  $K_{ab}$  的(18.30)式)

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} e_a^\mu e_b^\nu e_c^\rho e_d^\sigma = \bar{R}_{abcd} + \epsilon (K_{ad} K_{bc} - K_{ac} K_{bd}). \quad (18.45)$$

而如果沿着法向  $n_\nu$  投影，则得(用了一些黎曼曲率张量的代数性质)

$$e_a^\mu e_b^\nu e_c^\sigma R_{\mu\nu\sigma\rho} n^\rho = \bar{D}_a K_{bc} - \bar{D}_b K_{ac}. \quad (18.46)$$

推导过程中我们消去了等式两边整体的负号。

方程(18.30)和方程(18.46)就是所谓的Gauss-Codazzi 方程。它们揭示了时空流形中的黎曼曲率张量的一些分量可以用超曲面的内禀曲率与外曲率共同来表达。剩下的分量是 $R_{\mu\rho\nu\sigma}e_a^\mu n^\rho e_b^\nu n^\sigma$ , 它们不能用仅仅与 $h_{ab}$ 、 $K_{ab}$ 相关的量来表达。

### 缩并形式

为了将Gauss-Codazzi 方程揭示的曲率分解应用于爱因斯坦场方程, 我们需要将黎曼曲率张量进行缩并。

首先, 里奇张量 $R_{\rho\sigma} = g^{\mu\nu}R_{\mu\rho\nu\sigma}$ , 代入(18.13)式, 即有

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma} &= (\epsilon n^\mu n^\nu + h^{ab}e_a^\mu e_b^\nu)R_{\mu\rho\nu\sigma} \\ &= \epsilon R_{\mu\rho\nu\sigma}n^\mu n^\nu + h^{ab}R_{\mu\rho\nu\sigma}e_a^\mu e_b^\nu. \end{aligned} \quad (18.47)$$

注意到 $R_{\mu\rho\nu\sigma}n^\mu n^\rho n^\nu n^\sigma = 0$ (因为 $R_{\mu\rho\nu\sigma}$ 关于指标 $\mu, \nu, \rho, \sigma$ 反对称), 所以立即有

$$R_{\rho\sigma}n^\rho n^\sigma = h^{ab}R_{\mu\rho\nu\sigma}e_a^\mu n^\rho e_b^\nu n^\sigma. \quad (18.48)$$

同样注意到 $R_{\mu\rho\nu\sigma}n^\mu n^\nu n^\sigma = 0$ , 所以有

$$R_{\rho\sigma}e_c^\rho n^\sigma = h^{ab}R_{\mu\rho\nu\sigma}e_a^\mu e_c^\rho e_b^\nu n^\sigma. \quad (18.49)$$

进一步, 里奇张量 $R = g^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}$ , 利用上面的(18.47), 即有

$$\begin{aligned} R &= (\epsilon n^\rho n^\sigma + h^{cd}e_c^\rho e_d^\sigma)(\epsilon R_{\mu\rho\nu\sigma}n^\mu n^\nu + h^{ab}R_{\mu\rho\nu\sigma}e_a^\mu e_b^\nu) \\ &= 2\epsilon h^{ab}R_{\mu\rho\nu\sigma}e_a^\mu n^\rho e_b^\nu n^\sigma + h^{ab}h^{cd}R_{\mu\rho\nu\sigma}e_a^\mu e_c^\rho e_b^\nu e_d^\sigma \\ &= 2\epsilon R_{\rho\sigma}n^\rho n^\sigma + h^{ab}h^{cd}R_{\mu\rho\nu\sigma}e_a^\mu e_c^\rho e_b^\nu e_d^\sigma. \end{aligned} \quad (18.50)$$

上式最后一行我们代入了(18.48)式。

注意到爱因斯坦张量 $G_{\rho\sigma} = R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}g_{\rho\sigma}R$ , 进而即可以得到

$$\begin{aligned} G_{\rho\sigma}n^\rho n^\sigma &= R_{\rho\sigma}n^\rho n^\sigma - \frac{1}{2}\epsilon R \\ &= -\frac{1}{2}\epsilon[\bar{R} + \epsilon(K_{ab}K^{ab} - K^2)]. \end{aligned} \quad (18.51)$$

式中我们利用了上面的(18.48)式和(18.50)式, 并代入了Gauss-Codazzi 方程。式中的 $\bar{R}$ 就是由诱导度规 $h_{ab}$ 算出来的曲率标量。类似的, 利用(18.49)式, 并代入Gauss-Codazzi 方程, 还可以得到

$$G_{\rho\sigma}e_a^\rho n^\sigma = R_{\rho\sigma}e_a^\rho n^\sigma = \bar{D}_b K_a^b - \bar{D}_a K_b^b. \quad (18.52)$$

方程(18.51)和方程(18.52)的重要性在于，它们可以用来把爱因斯坦场方程的部分分量用超曲面 $\Sigma$ 上的相关变量来重新表达。不过，值得注意的是，剩下的分量 $G_{\rho\sigma}e_a^\rho e_b^\sigma$ 不能用仅仅与 $h_{ab}$ 、 $K_{ab}$ 相关的量来表达。

如果 $\Sigma$ 为类空超曲面，从而 $n^\mu$ 类时，则通常会定义

$$\rho \equiv T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu, \quad j_a \equiv T_{\rho\sigma}e_a^\rho n^\sigma. \quad (18.53)$$

则根据爱因斯坦场方程中的 $G_{\rho\sigma}n^\rho n^\sigma = \kappa T_{\rho\sigma}n^\rho n^\sigma$  ( $\kappa = 8\pi G$ )，以及 $G_{\rho\sigma}e_a^\rho n^\sigma = \kappa T_{\rho\sigma}e_a^\rho n^\sigma$ ，立即有

$$\begin{aligned} \bar{R} + K^2 - K_{ab}K^{ab} &= (2\kappa)\rho \\ \bar{D}_b K_a^b - \bar{D}_a K_b^b &= \kappa j_a. \end{aligned} \quad (18.54)$$

式中我们利用了(18.51)式和(18.52)式。

### 里奇标量

下面对里奇标量的分解形式进行进一步推导，我们的出发点是上面的(18.50)式，重写如下

$$R = 2\epsilon R_{\rho\sigma}n^\rho n^\sigma + h^{ab}h^{cd}R_{\mu\rho\nu\sigma}e_a^\mu e_c^\rho e_b^\nu e_d^\sigma. \quad (18.55)$$

其中，利用Gauss-Codazzi 方程，立即有

$$h^{ab}h^{cd}R_{\mu\rho\nu\sigma}e_a^\mu e_c^\rho e_b^\nu e_d^\sigma = \bar{R} + \epsilon(K_{ab}K^{ab} - K^2). \quad (18.56)$$

利用黎曼曲率张量的定义 $[D_\nu, D_\sigma]n_\rho = -n^\mu R_{\mu\rho\nu\sigma}$ ，立即有

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu &= -n^\nu [D_\nu, D_\rho]n^\rho = -n^\nu(D_\nu D_\rho n^\rho) + n^\nu(D_\rho D_\nu n^\rho) \\ &= -D_\nu(n^\nu D_\rho n^\rho) + (D_\nu n^\nu)(D_\rho n^\rho) + D_\rho(n^\nu D_\nu n^\rho) - (D_\rho n^\nu)(D_\nu n^\rho). \end{aligned}$$

注意到 $K = D_\mu n^\mu$ ，所以第二行的第二项就是 $K^2$ ，下面我们关注第二行的最后一项。

$$\begin{aligned} (D_\rho n^\nu)(D_\nu n^\rho) &= g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}(D_\rho n_\mu)(D_\nu n_\sigma) \\ &= (\epsilon n^\mu n^\nu + h^{\mu\nu})(\epsilon n^\rho n^\sigma + h^{\rho\sigma})(D_\rho n_\mu)(D_\nu n_\sigma) \\ &= (\epsilon n^\mu n^\nu + h^{\mu\nu})h^{\rho\sigma}(D_\rho n_\mu)(D_\nu n_\sigma) = h^{\mu\nu}h^{\rho\sigma}(D_\rho n_\mu)(D_\nu n_\sigma) \\ &= h^{bc}e_b^\mu e_c^\nu h^{ad}e_a^\rho e_d^\sigma(D_\rho n_\mu)(D_\nu n_\sigma) \\ &= h^{ad}h^{bc}(e_a^\rho e_b^\mu D_\rho n_\mu)(e_c^\nu e_d^\sigma D_\nu n_\sigma) \\ &= h^{ad}h^{bc}K_{ab}K_{cd} = K^{ab}K_{ab}. \end{aligned}$$

式中第三行是利用了类似  $n^\sigma D_\nu n_\sigma = 0$  (因为  $D_\nu(n^\sigma n_\sigma) = 0$ ) 这样的结果。因此，最终我们有

$$R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = -D_\nu(n^\nu D_\rho n^\rho) + D_\rho(n^\nu D_\nu n^\rho) + K^2 - K^{ab}K_{ab}. \quad (18.57)$$

综合上面两段的结果，即有

$$\begin{aligned} R &= \bar{R} + \epsilon(K^2 - K^{ab}K_{ab}) + 2\epsilon[-D_\nu(n^\nu D_\rho n^\rho) + D_\rho(n^\nu D_\nu n^\rho)] \\ &= \bar{R} + \epsilon(K^2 - K^{ab}K_{ab}) + 2\epsilon D_\rho(n^\nu D_\nu n^\rho - n^\rho D_\nu n^\nu). \end{aligned} \quad (18.58)$$

这个结果在后文讨论广义相对论的哈密顿表述时会很有用。

## 18.2 引力作用量的边界项

在本书第五章中，我们通过对爱因斯坦-希尔伯特作用量进行变分，得出爱因斯坦场方程。但是，在那里我们也提到过，关于变分的边界项实际上还遗留有一个微妙的问题有待处理。现在我们来处理这个问题。

首先让我们简单回顾一下对爱因斯坦-希尔伯特作用量的变分计算。注意到  $S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$  ( $\kappa = 8\pi G$ )，从而即有

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [\sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} (\delta R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} + \delta(\sqrt{-g}) R]. \quad (18.59)$$

利用  $\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$  以及  $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}\delta g_{\rho\sigma}g^{\sigma\nu}$ ，即可以得到

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [-(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)\delta g_{\mu\nu} + (\delta R_{\mu\nu})g^{\mu\nu}]. \quad (18.60)$$

所以最后要算的就是  $\delta R_{\mu\nu}$ ，这已经在第五章中算过了，这里不再重复，结果是

$$\delta R_{\mu\nu} = D_\rho(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho) - D_\nu(\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho). \quad (18.61)$$

利用以上结果，容易看出(18.60)式中的  $\delta R_{\mu\nu}$  项可以化成

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (\delta R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [D_\rho(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho) - D_\nu(\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho)] g^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [D_\rho(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho) - D_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho)] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} D_\mu(g^{\rho\sigma}\delta\Gamma_{\rho\sigma}^\mu - g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\rho\nu}^\rho). \end{aligned} \quad (18.62)$$

习惯上，会令

$$v^\mu \equiv g^{\rho\sigma} \delta\Gamma_{\rho\sigma}^\mu - g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\rho\nu}^\rho. \quad (18.63)$$

从而可以将(18.60)式写成

$$(2\kappa)\delta S_{\text{EH}} = \int_{\mathcal{D}} d^4x \sqrt{-g} [-G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}] + \int_{\mathcal{D}} d^4x \sqrt{-g} (D_\mu v^\mu), \quad (18.64)$$

式中我们已经假定原来的爱因斯坦-希尔伯特作用量是定义在某个时空区域 $\mathcal{D}$ 上的。

记时空区域 $\mathcal{D}$ 的边界为 $\partial\mathcal{D}$ ，它当然是一个闭合的时空超曲面(为了简单起见，假定 $\partial\mathcal{D}$ 不存在类光的部分)，记 $\partial\mathcal{D}$ 上的坐标为 $y^a$ ，其上的诱导度规为 $h_{ab}$ ，外曲率为 $K_{ab}$ ，法向量为 $n^\mu$ ，满足 $n^\mu n_\mu = \epsilon$ ，其中 $\epsilon$ 在 $\partial\mathcal{D}$ 的类空部分取-1，而在类时部分取+1。

进而利用弯曲时空中的高斯定理(见第四章中的讲述)，即可以把(18.64)式进一步写成

$$(2\kappa)\delta S_{\text{EH}} = \int_{\mathcal{D}} d^4x \sqrt{-g} [-G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}] + \int_{\partial\mathcal{D}} d^3y \sqrt{|h|} \epsilon (n_\mu v^\mu), \quad (18.65)$$

很容易看到第二项其实是一个表面积分项，其中 $\epsilon = -1$ 的情形是把第四章中关于高斯定理的讲述推广到 $n^\mu$ 类时的情形。由于在利用最小作用量原理时我们总是假定场位形在区域边界的变分等于零，即假定

$$\delta g_{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{D}} = 0. \quad (18.66)$$

(注意，这意味着边界上诱导度规 $h_{ab}$ 的变分也等于零。) 所以你可能认为这个表面积分项会自动等于零。然而情况并没有这么简单，因为正如我们马上就可以看清楚的， $v^\mu$ 并不完全由 $\delta g_{\mu\nu}$ 决定，它还含有 $\delta g_{\mu\nu}$ 的偏导项，虽然 $\delta g_{\mu\nu}$ 在 $\partial\mathcal{D}$ 上为零，但是， $\delta g_{\mu\nu}$ 的偏导在 $\partial\mathcal{D}$ 上并不一定等于零。所以，(18.65)式中的表面积分项其实并不等于零！这就是第五章中我们提到过的那个非常微妙的细节问题。

为了看清楚这个细节问题，让我们回到 $v^\mu$ 的定义(18.63)式。为此我们需要计算 $\delta\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ ，注意到我们关心的是边界 $\partial\mathcal{D}$ 上的情况，这时候有 $\delta g_{\rho\sigma} = 0 = \delta g^{\rho\sigma}$ ，所以

$$\delta\Gamma_{\rho\sigma}^\mu|_{\partial\mathcal{D}} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\rho \delta g_{\sigma\nu} + \partial_\sigma \delta g_{\rho\nu} - \partial_\nu \delta g_{\rho\sigma}). \quad (18.67)$$

代入 $v^\mu$ 的定义式(18.63), 可以得到

$$v_\mu = g^{\rho\sigma}(\partial_\sigma \delta g_{\mu\rho} - \partial_\mu \delta g_{\sigma\rho}). \quad (18.68)$$

进而即有

$$\begin{aligned} (n^\mu v_\mu)|_{\partial\mathcal{D}} &= n^\mu(\epsilon n^\rho n^\sigma + h^{\rho\sigma})(\partial_\sigma \delta g_{\mu\rho} - \partial_\mu \delta g_{\sigma\rho}) \\ &= n^\mu h^{\rho\sigma}(\partial_\sigma \delta g_{\mu\rho} - \partial_\mu \delta g_{\sigma\rho}), \end{aligned} \quad (18.69)$$

式中我们注意到了 $(\partial_\sigma \delta g_{\mu\rho} - \partial_\mu \delta g_{\sigma\rho})$ 关于 $\sigma, \mu$ 反对称。又由于 $h^{\rho\sigma}$ 是与超曲面 $\partial\mathcal{D}$ 相切的张量, 而 $\delta g_{\rho\sigma}$ 在超曲面 $\partial\mathcal{D}$ 上恒等于零, 因此,  $\delta g_{\rho\sigma}$ 沿着切向的导数也等于零, 从而 $h^{\rho\sigma} \partial_\sigma \delta g_{\mu\rho} = 0$ , 因此最终我们有

$$(n^\mu v_\mu)|_{\partial\mathcal{D}} = -h^{\rho\sigma} n^\mu \partial_\mu \delta g_{\rho\sigma}, \quad (18.70)$$

注意这里涉及的是 $\delta g_{\rho\sigma}$ 沿着法向的偏导, 而不是切向的, 因此不等于零。

综合以上所有结果, 即有

$$(2\kappa)\delta S_{\text{EH}} = \int_{\mathcal{D}} d^4x \sqrt{-g} [-G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}] - \int_{\partial\mathcal{D}} d^3y \sqrt{|h|} \epsilon h^{\rho\sigma} n^\mu \partial_\mu \delta g_{\rho\sigma}. \quad (18.71)$$

这里涉及一个非零的边界积分项, 而在应用最小作用量原理时, 这样的项是我们希望能消除的。之所以出现这样的非零边界项, 是因为里奇标量中(从而 $S_{\text{EH}}$ 中)包含了度规场的二阶偏导, 而不仅仅是一阶偏导, 这是与通常场论不同的地方。

为了消除这样的变分边界项, 我们在引力场的作用量中额外添加一个边界作用量 $S_B$ (称作Gibbons-Hawking-York边界项), 其定义是

$$S_B = \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{D}} d^3y \sqrt{|h|} \epsilon K. \quad (18.72)$$

下面我们来证明, 这个边界作用量的变分正好能抵消掉(18.71)中多出来的边界项。

注意到

$$\begin{aligned} K &= D_\mu n^\mu = g^{\mu\nu} D_\mu n_\nu = (\epsilon n^\mu n^\nu + h^{\mu\nu}) D_\mu n_\nu \\ &= h^{\mu\nu} D_\mu n_\nu = h^{\mu\nu} (\partial_\mu n_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho n_\rho). \end{aligned} \quad (18.73)$$

由于  $h^{\mu\nu}$  是边界上的度规，其变分等于零，从而

$$\begin{aligned}\delta K &= -h^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho n_\rho \\ &= -\frac{1}{2}h^{\mu\nu}n^\rho(\partial_\mu\delta g_{\nu\rho} + \partial_\nu\delta g_{\mu\rho} - \partial_\rho\delta g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}h^{\mu\nu}n^\rho\partial_\rho\delta g_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (18.74)$$

最后一行同样是利用了度规场变分沿着切向的偏导等于零。根据这个结果，即有

$$(2\kappa)\delta S_B = 2\int_{\partial\mathcal{D}}d^3y\sqrt{|h|}\epsilon\delta K = \int_{\partial\mathcal{D}}d^3y\sqrt{|h|}\epsilon h^{\rho\sigma}n^\mu\partial_\mu\delta g_{\rho\sigma}. \quad (18.75)$$

很显然，这正好抵消了(18.71)中多出来的边界项。

因此，只要我们取引力场的作用量为  $S_G = S_{\text{EH}} + S_B$ ，式中

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa}\int_{\mathcal{D}}d^4x\sqrt{-g}R, \quad S_B = \frac{1}{\kappa}\int_{\partial\mathcal{D}}d^3y\sqrt{|h|}\epsilon K. \quad (18.76)$$

则  $S_G$  的变分将正好给出

$$\delta S_G = \frac{1}{2\kappa}\int_{\mathcal{D}}d^4x\sqrt{-g}\left[-G^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\right]. \quad (18.77)$$

进而就补上了第五章中推导爱因斯坦场方程时的细节性漏洞。

但是，这里还有一个细节问题，那就是即使对于平坦的闵可夫斯基时空(因此里奇标量  $R = 0$ )，随着时空区域  $\mathcal{D}$  趋于无穷大，也即  $\partial\mathcal{D}$  趋于无穷远，计算发现上面定义的  $S_B$  也会发散，从而使得整个时空的  $S_G$  发散！为了克服这个问题，通常会将  $S_B$  修正为

$$S_B \equiv \frac{1}{\kappa}\int_{\partial\mathcal{D}}d^3y\sqrt{|h|}\epsilon(K - K_0), \quad (18.78)$$

式中  $K_0$  为同一个超曲面  $\partial\mathcal{D}$  (有相同的诱导度规) 嵌入参考的平坦时空流形时的外曲率( $K$  当然为  $\partial\mathcal{D}$  在待考察的这个时空中的外曲率)。很显然，这样修正以后，对于平坦时空即有  $S_B = 0$ ，从而也有  $S_G = 0$ 。更一般地，对于任何渐进平坦时空，修正以后引力作用量  $S_G$  都将保持有限，这就解决了发散问题。注意，由于  $K_0$  不依赖于待考察时空的度规，因此它的变分等于零，从而这种修正不会改变前面关于变分边界项的所有讨论。

### 18.3 哈密顿表述与ADM能量

现在开始讨论本章的正题，广义相对论的哈密顿表述，也即是说，在哈密顿力学的框架下讨论广义相对论。这需要将四维时空流形进行ADM分解，也称作 $3+1$ 分解，即将时空流形切片成三维类空超曲面簇，只不过对应前面(18.1.1)小节中的 $\sigma$ 现在取作时间参数 $t$ 。利用哈密顿表述，我们可以给引力场整体的能量下一个合适的定义，称作ADM能量。需要说明的是，ADM能量仅适用于渐近平坦的时空，因此需要宇宙学常数 $\Lambda = 0$ 。

为了建立哈密顿表述，我们需要把时空切片成余1维的类空超曲面簇，其中每一个超曲面对应一个时间参数 $t$ ，给定 $t$ 的类空超曲面记作 $\Sigma_t$ ，它由方程 $t(x) = t$ 定义，等式左边的 $t(x)$ 相应于前面(18.1.1) 小节中的 $S(x)$ 。 $\Sigma_t$ 的法矢量记作 $n^\mu$  ( $n_\mu \propto \partial_\mu t(x)$ )，当然 $n^\mu$ 是类时的，满足

$$n^\mu n_\mu = -1. \quad (18.79)$$

同样也可以用坐标 $y^a$ 参数化 $\Sigma_t$ 本身，如此一来， $(t, y^a)$ 就构成了时空的一组局域坐标。

根据(18.1.1) 小节中讨论的ADM分解，可以将时空流形的度规分解成

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ab}(dy^a + N^a dt)(dy^b + N^b dt), \quad (18.80)$$

其中 $h_{ab}$ 为 $\Sigma_t$ 上的诱导度规，其余符号的含义也都和前文相同，比如 $\Sigma_t$ 的外曲率还是记作 $K_{ab}$ 。

以 $t$ 为参数的等 $y^a$ 曲线与 $\Sigma_t$ 相交，但通常不是正交。具体来说，这些曲线的切矢量 $t^\mu \equiv (\frac{\partial x^\mu}{\partial t})_{y^a}$ (相应于(18.1.1) 小节中的 $s^\mu$ )可以展开为

$$t^\mu = N n^\mu + N^a e_a^\mu. \quad (18.81)$$

这个方程解释了时移函数 $N$ 以及位移矢量 $N^a$ 的含义。从这个方程我们可以得到

$$n_\mu t^\mu = -N. \quad (18.82)$$

另一方面，又有

$$(\partial_\mu t)t^\mu = \frac{\partial t}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial t} = 1. \quad (18.83)$$

而且，我们也知道 $n_\mu \propto \partial_\mu t$ ，进而比较上面两个式子，即知

$$n_\mu = -N \partial_\mu t. \quad (18.84)$$

如果我们取局部坐标  $x^\mu = (t, y^a)$ , 则很显然  $t^\mu = (1, 0, 0, 0)$ ,  $e_a^\mu = \delta_a^\mu$ , 由此立即有

$$\mathcal{L}_t e_a^\mu = 0. \quad (18.85)$$

式中李导数  $\mathcal{L}_t$  的下标  $t$  表示向量场  $t^\mu$ , 由于这是一个张量方程, 所以它当然在任意局部坐标中均成立!

### 18.3.1 构造类时边界

在  $\Sigma_t$  上面取一个余1维闭合超曲面  $S_t$ , 注意, 这里余1维是指在  $\Sigma_t$  中余1维, 同样, 闭合也是指在  $\Sigma_t$  中闭合。记  $S_t$  在  $\Sigma_t$  中的法矢量为  $r^a$ , 在时空中, 这个法矢量当然就是  $r^\mu = r^a e_a^\mu$ , 显然  $r^\mu n_\mu = 0$ 。随着沿法向  $n^\mu$  的推移, 不同时刻  $\Sigma_t$  上的  $S_t$  会扫出一个在时空中余1维的类时超曲面  $\mathcal{B}$ , 如图(18.1)所示。很显然,  $r^\mu$  也是  $\mathcal{B}$  在时空中的法矢量, 因此当然是一个类空矢量, 满足  $r^\mu r_\mu = 1$ 。

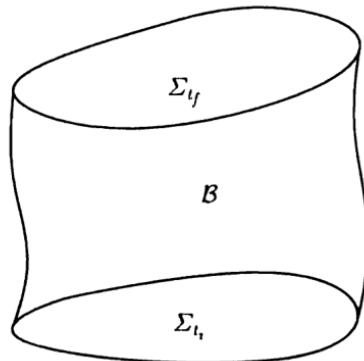


图 18.1: 以  $\Sigma_{t_f} \cup (-\Sigma_{t_i}) \cup \mathcal{B}$  为边界的时空区域  $\mathcal{D}$ .

超曲面  $S_t$  可以看成是  $\Sigma_t$  与  $\mathcal{B}$  的交, 在时空中, 它当然是余2维的。以坐标  $\theta^A$  参数化  $S_t$ , 引入  $S_t$  上的切矢量场

$$e_A^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta^A}. \quad (18.86)$$

这些切矢量场当然同时也是  $\Sigma_t$  上的切矢量(因此有  $n_\mu e_A^\mu = 0$ ), 因此可以用  $e_a^\mu$  展开, 设  $e_A^\mu = e_a^\mu e^a_A$ , 不难看出  $e_A^\mu = \frac{\partial y^a}{\partial \theta^A}$ 。

$S_t$ 上的诱导度规 $\sigma_{AB}$ 显然满足

$$\sigma_{AB} = g_{\mu\nu} e_A^\mu e_B^\nu = h_{ab} e_A^a e_B^b. \quad (18.87)$$

注意到 $r^a$ 是 $S_t$ 在 $\Sigma_t$ 中的法向量，所以 $S_t$ 在 $\Sigma_t$ 中的完备性关系为 $h^{ab} = r^a r^b + \sigma^{AB} e_A^a e_B^b$ ，又由于 $\Sigma_t$ 在时空中的完备性关系为 $g^{\mu\nu} = -n^\mu n^\nu + h^{ab} e_a^\mu e_b^\nu$ ，进而可得 $S_t$ 最终在时空中的完备性关系为

$$g^{\mu\nu} = -n^\mu n^\nu + r^\mu r^\nu + \sigma^{AB} e_A^\mu e_B^\nu, \quad (18.88)$$

这当然是因为 $S_t$ 在时空中是余2维超曲面。 $S_t$ 在 $\Sigma_t$ 中的外曲率(相对于 $\Sigma_t$ 的弯曲程度)及其迹分别为

$$k_{AB} = e_A^\mu e_B^\nu D_\mu r_\nu = e_A^a e_B^b \bar{D}_a r_b, \quad k = \sigma^{AB} k_{AB}. \quad (18.89)$$

式中我们代入了 $e_A^\mu = e_a^\mu e_A^a$ 。

从上述讨论来看，参数化不同时刻 $S_t$ 的坐标 $\theta^A$ 似乎可以是相互独立的。但是，前面定义 $\mathcal{B}$ 时说了，是沿着 $\Sigma_t$ 的法向随时间推移 $S_t$ 。因此，可以设想以 $t$ 为参数的曲线是正交地穿过不同时刻的 $S_t$ 的(也即是说在 $S_t$ 上，位移矢量 $N^a = 0$ )，自然的定义是，取同一条 $t$ 曲线上所有点的 $\theta^A$ 坐标相同。也即是说，我们有(即在方程(18.81)中取 $N^a = 0$ )

$$\left( \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \right)_{\theta^A} = N n^\mu. \quad (18.90)$$

假设用任意坐标 $z^i$ 参数化 $\mathcal{B}$ ，并在 $\mathcal{B}$ 上引入切向量场 $e_i^\mu$ ，定义为

$$e_i^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial z^i}. \quad (18.91)$$

满足 $r_\mu e_i^\mu = 0$ 。因此 $\mathcal{B}$ 上的诱导度规 $\gamma_{ij}$ 满足

$$\gamma_{ij} = g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu. \quad (18.92)$$

类似于前面的(18.13)，当然也有如下完备性关系

$$g^{\mu\nu} = r^\mu r^\nu + \gamma^{ij} e_i^\mu e_j^\nu. \quad (18.93)$$

类似的， $\mathcal{B}$ 的外曲率为

$$\mathcal{K}_{ij} = e_i^\mu e_j^\nu D_\mu r_\nu. \quad (18.94)$$

其迹为  $\mathcal{K} = \gamma^{ij} \mathcal{K}_{ij}$ 。

虽然原则上  $z^i$  可以任意选取，但是上面关于如何定义不同时刻  $S_t$  上坐标的讨论告诉我们，选取  $z^i = (t, \theta^A)$  是特别方便的。在这种选取中， $\mathcal{B}$  上的一个小位移  $dx^\mu$  将由下式给出

$$dx^\mu = \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \right)_{\theta^A} dt + \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial \theta^A} \right)_t d\theta^A = N n^\mu dt + e^\mu_A d\theta^A. \quad (18.95)$$

这里我们用了(18.86)式和(18.90)式。因此  $\mathcal{B}$  上的线元将为

$$\begin{aligned} ds_{\mathcal{B}}^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|_{\mathcal{B}} \\ &= g_{\mu\nu} (N n^\mu dt + e^\mu_A d\theta^A) (N n^\nu dt + e^\nu_B d\theta^B) \\ &= (g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu) N^2 dt^2 + (g_{\mu\nu} e^\mu_A e^\nu_B) d\theta^A d\theta^B, \end{aligned} \quad (18.96)$$

式中用到  $n_\mu e^\mu_A = 0$ 。由这个结果立即有

$$\gamma_{ij} dz^i dz^j = -N^2 dt^2 + \sigma_{AB} d\theta^A d\theta^B. \quad (18.97)$$

这意味着  $\sqrt{-\gamma} = N \sqrt{\sigma}$ ，其中  $\gamma = \det(\gamma_{ij})$ ,  $\sigma = \det(\sigma_{AB})$ 。

### 18.3.2 引力作用量的ADM分解

为了寻找广义相对论的哈密顿表述，我们需要把引力场的作用量进行ADM分解。为此我们先将引力场作用量重写在下面

$$S_G = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{D}} d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{D}} d^3y \sqrt{|h|} \epsilon K. \quad (18.98)$$

式中我们暂时忽略了减除项  $K_0$ 。

我们让  $\mathcal{D}$  为类空超曲面  $\Sigma_{t_i}$  和  $\Sigma_{t_f}$  以及类时超曲面  $\mathcal{B}$  围起来的时空区域，如上面的图(18.1)所示，换言之

$$\partial\mathcal{D} = \Sigma_{t_f} \cup (-\Sigma_{t_i}) \cup \mathcal{B}, \quad (18.99)$$

式中  $-\Sigma_{t_i}$  前面的负号是用来提醒我们作为  $\mathcal{D}$  的边界  $-\Sigma_{t_i}$  的法向是向着过去方向的，与  $\Sigma_{t_i}$  的法向相反，这当然是因为  $\partial\mathcal{D}$  的法向按照定义就是从区域内部指向外部的。进而利用上一小节的符号，我们可以把区域  $\mathcal{D}$  上引力场的作用量更清楚地写成

$$\begin{aligned} S_G &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{D}} d^4x \sqrt{-g} R - \frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma_{t_f}} d^3y \sqrt{h} K \\ &\quad + \frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma_{t_i}} d^3y \sqrt{h} K + \frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{B}} d^3z \sqrt{-\gamma} \mathcal{K}, \end{aligned} \quad (18.100)$$

式中我们已经考虑 $-\Sigma_{t_i}$ 前面那个额外的负号了，即用了 $\int_{-\Sigma_{t_i}} d^3y \cdots = -\int_{\Sigma_{t_i}} d^3y \cdots$ 。

当然，时空区域 $\mathcal{D}$ 被切片成了类空超曲面 $\Sigma_t$ 簇，根据前面的公式(18.58)，在 $\Sigma_t$ 上

$$R = \bar{R} + K^{ab}K_{ab} - K^2 - 2D_\rho(n^\nu D_\nu n^\rho - n^\rho D_\nu n^\nu). \quad (18.101)$$

进而即有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{D}} d^4x \sqrt{-g} R &= \frac{1}{2\kappa} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{\Sigma_t} d^3y N \sqrt{h} (\bar{R} + K^{ab}K_{ab} - K^2) \\ &\quad - \frac{1}{\kappa} \int_{\partial\mathcal{D}} d^3y \sqrt{|h|} \epsilon m_\rho (n^\nu D_\nu n^\rho - n^\rho D_\nu n^\nu). \end{aligned} \quad (18.102)$$

式中我们应用了高斯定理， $m_\rho$ 为 $\partial\mathcal{D}$ 的法向量，注意它不一定为 $n_\rho$ 。同时我们还用到 $d^4x \sqrt{|g|} = d^3y N \sqrt{h}$ 。

同样，上式中的边界积分项要分解成分别在 $-\Sigma_{t_i}$ ， $\Sigma_{t_f}$ ，以及 $\mathcal{B}$ 上的积分。其中在 $-\Sigma_{t_i}$ 上的积分可以转换成（考虑到了这时候 $m_\rho = -n_\rho$ ，以及 $\epsilon = -1$ ）

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma_{t_i}} d^3y \sqrt{h} (-) n_\rho (n^\nu D_\nu n^\rho - n^\rho D_\nu n^\nu) \\ &= -\frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma_{t_i}} d^3y \sqrt{h} D_\nu n^\nu = -\frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma_{t_i}} d^3y \sqrt{h} K. \end{aligned} \quad (18.103)$$

式中我们用到了 $n_\rho n^\rho = -1$ ，以及 $n_\rho D_\nu n^\rho = 0$ 。很显然，结果正好与(18.100)中边界作用量的相应项抵消。类似的， $\Sigma_{t_f}$ 上的所有边界积分项也会刚好抵消。因此只剩下 $\mathcal{B}$ 上的贡献( $\mathcal{B}$ 的 $\epsilon = 1$ ，法向量为 $r^\mu$ )

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{B}} d^3z \sqrt{-\gamma} r_\rho (n^\nu D_\nu n^\rho - n^\rho D_\nu n^\nu) \\ &= -\frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{B}} d^3z \sqrt{-\gamma} r_\rho n^\nu D_\nu n^\rho = \frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{B}} d^3z \sqrt{-\gamma} n^\nu n^\rho (D_\nu r_\rho). \end{aligned} \quad (18.104)$$

式中我们利用了 $r_\rho n^\rho = 0$ 并进行了分部积分。

把所有这些结果放在一起，即有

$$\begin{aligned} S_G &= \frac{1}{2\kappa} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{\Sigma_t} d^3y N \sqrt{h} (\bar{R} + K^{ab}K_{ab} - K^2) \\ &\quad + \frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{B}} d^3z \sqrt{-\gamma} (\mathcal{K} + n^\mu n^\nu D_\mu r_\nu). \end{aligned} \quad (18.105)$$

下面我们改写一下 $\mathcal{K}$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \gamma^{ij}\mathcal{K}_{ij} = \gamma^{ij}(e^\mu_i e^\nu_j D_\mu r_\nu) \\ &= (\gamma^{ij} e^\mu_i e^\nu_j) D_\mu r_\nu = (g^{\mu\nu} - r^\mu r^\nu) D_\mu r_\nu,\end{aligned}\quad (18.106)$$

其中我们利用了完备性关系(18.93)。进而即有

$$\begin{aligned}\mathcal{K} + n^\mu n^\nu D_\mu r_\nu &= (g^{\mu\nu} - r^\mu r^\nu + n^\mu n^\nu) D_\mu r_\nu \\ &= (\sigma^{AB} e^\mu_A e^\nu_B) D_\mu r_\nu = \sigma^{AB} (e^\mu_A e^\nu_B D_\mu r_\nu) \\ &= \sigma^{AB} k_{AB} = k.\end{aligned}\quad (18.107)$$

其中我们利用了完备性关系(18.88)。

有了上面的结果，再利用 $d^3z\sqrt{-\gamma} = dt d^2\theta N\sqrt{\sigma}$ ，进而即有

$$\begin{aligned}S_G &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma_t} d^3y N\sqrt{h} (\bar{R} + K^{ab} K_{ab} - K^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\kappa} \int_{S_t} d^2\theta N\sqrt{\sigma} (k - k_0) \right].\end{aligned}\quad (18.108)$$

式中通过包含进一个额外的 $-k_0$ ，我们已经恢复了被忽略的减除项。 $k_0$ 是 $S_t$ 嵌入在平坦空间中的外曲率。有了减除项 $k_0$ 以后，就可以使得平坦时空的作用量为零，进一步，对于渐进平坦时空，它可以保证作用量在 $S_t \rightarrow \infty$ 时保持有限。

注意，在上面的结果中，边界积分项对拉格朗日量是有贡献的，但是对于拉格朗日体密度当然没有贡献。事实上，我们可以从(18.108)中读出引力场的拉格朗日体密度 $\mathcal{L}_G$ (不要和李导数混淆了)，为

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2\kappa} N\sqrt{h} (\bar{R} + K^{ab} K_{ab} - K^2). \quad (18.109)$$

而拉格朗日量 $L_G$ 为

$$L_G = \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{L}_G + \frac{1}{\kappa} \int_{S_t} d^2\theta N\sqrt{\sigma} (k - k_0). \quad (18.110)$$

当然，一般来说时空中还会有物质场，物质场的作用量也要进行3+1分解，但是由于给定物质场作用量以后，这种分解没有原则上的困难，所以我们不再进行专门的讨论。同样，后文也都会仅仅将注意力集中在引力场上，忽略物质场。

### 18.3.3 引力场的哈密顿量

为了得到引力场的哈密顿表述，我们定义诱导度规 $h_{ab}$ 的时间导数为

$$\dot{h}_{ab} \equiv \mathcal{L}_t h_{ab}, \quad (18.111)$$

根据诱导度规的定义，有

$$\dot{h}_{ab} = \mathcal{L}_t(g_{\mu\nu}e_a^\mu e_b^\nu) = (\mathcal{L}_t g_{\mu\nu})e_a^\mu e_b^\nu, \quad (18.112)$$

式中我们利用了(18.85)式。直接计算度规场的李导数

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t g_{\mu\nu} &= D_\mu t_\nu + D_\nu t_\mu = D_\mu(Nn_\nu + N_\nu) + D_\nu(Nn_\mu + N_\mu) \\ &= (\partial_\mu N)n_\nu + (\partial_\nu N)n_\mu + N(D_\mu n_\nu + D_\nu n_\mu) + D_\mu N_\nu + D_\nu N_\mu. \end{aligned}$$

其中 $N^\mu \equiv N^a e_a^\mu$ 。进而即有

$$\dot{h}_{ab} = 2N K_{ab} + \overline{D}_a N_b + \overline{D}_b N_a \Rightarrow K_{ab} = \frac{1}{2N}(\dot{h}_{ab} - \overline{D}_a N_b - \overline{D}_b N_a) \quad (18.113)$$

上述分析表明，引力场作用量(18.108)中的时间导数全部都包含在外曲率中，进而利用拉格朗日体密度 $\mathcal{L}_G$ 的定义(18.109)，即可以得到场变量 $h_{ab}$ 的共轭动量 $\pi^{ab}$ 为

$$\pi^{ab} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{h}(K^{ab} - Kh^{ab}). \quad (18.114)$$

所以根据勒让德变换，哈密顿体密度 $\mathcal{H}_G$ 为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G &\equiv \pi^{ab} \dot{h}_{ab} - \mathcal{L}_G \\ &= \frac{1}{2\kappa}\sqrt{h}(K^{ab} - Kh^{ab})(2N K_{ab} + \overline{D}_a N_b + \overline{D}_b N_a) \\ &\quad - \frac{1}{2\kappa}N\sqrt{h}(\overline{R} + K^{ab}K_{ab} - K^2) \\ &= \frac{1}{2\kappa}N\sqrt{h}(K^{ab}K_{ab} - K^2 - \overline{R}) + \frac{1}{\kappa}\sqrt{h}(K^{ab} - Kh^{ab})(\overline{D}_a N_b) \\ &= \frac{1}{2\kappa}N\sqrt{h}(K^{ab}K_{ab} - K^2 - \overline{R}) + \frac{1}{\kappa}\sqrt{h}\overline{D}_a[(K^{ab} - Kh^{ab})N_b] \\ &\quad - \frac{1}{\kappa}\sqrt{h}N_b\overline{D}_a(K^{ab} - Kh^{ab}). \end{aligned} \quad (18.115)$$

但是，哈密顿量 $H_G$ 其实是拉格朗日量的勒让德变换，定义为 $H_G \equiv \int d^3y \pi^{ab} \dot{h}_{ab} - L_G$ ，因此根据(18.110)式，其实还要加上边界积分项的贡献，最终即有

$$\begin{aligned} H_G &= \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{H}_G - \frac{1}{\kappa} \int_{S_t} d^2\theta N \sqrt{\sigma} (k - k_0) \\ &= \int_{\Sigma_t} d^3y (N\mathcal{H} + N_b \mathcal{H}^b) - \frac{1}{\kappa} \int_{S_t} d^2\theta N \sqrt{\sigma} (k - k_0) \\ &\quad + \frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma_t} d^3y \sqrt{h} \bar{D}_a [(K^{ab} - Kh^{ab}) N_b], \end{aligned} \quad (18.116)$$

式中

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2\kappa} \sqrt{h} (K^{ab} K_{ab} - K^2 - \bar{R}) \quad (18.117)$$

$$\mathcal{H}^b \equiv -\frac{1}{\kappa} \sqrt{h} \bar{D}_a (K^{ab} - Kh^{ab}) \Rightarrow$$

$$\mathcal{H}_a = -\frac{1}{\kappa} \sqrt{h} (\bar{D}_b K_a^b - \bar{D}_a K_b^b). \quad (18.118)$$

另一方面，利用高斯定理，有

$$\frac{1}{\kappa} \int_{\Sigma} d^3y \sqrt{h} \bar{D}_a [(K^{ab} - Kh^{ab}) N_b] = \frac{1}{\kappa} \int_{S_t} d^2\theta \sqrt{\sigma} r_a [(K^{ab} - Kh^{ab}) N_b].$$

代入上面的(18.116)式，即有

$$\begin{aligned} H_G &= \int_{\Sigma_t} d^3y (N\mathcal{H} + N_b \mathcal{H}^b) + \\ &\quad - \frac{1}{\kappa} \int_{S_t} d^2\theta \sqrt{\sigma} [N(k - k_0) - r_a N_b (K^{ab} - Kh^{ab})]. \end{aligned} \quad (18.119)$$

常常也用共轭动量密度 $\pi^{ab}$ 来把 $\mathcal{H}$ 重新表达成

$$\mathcal{H} = \frac{2\kappa}{\sqrt{h}} (\pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} \pi^2) - \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \bar{R}. \quad (18.120)$$

式中 $\pi = h_{ab} \pi^{ab}$ 。引入如下所谓的de Witt度规

$$G_{abcd} \equiv \frac{1}{2} (h_{ac} h_{bd} + h_{ad} h_{bc} - h_{ab} h_{cd}). \quad (18.121)$$

进而即可以进一步将 $\mathcal{H}$ 重写成

$$\mathcal{H} = \frac{2\kappa}{\sqrt{h}} G_{abcd} \pi^{ab} \pi^{cd} - \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \bar{R}. \quad (18.122)$$

另外，利用共轭动量密度 $\pi^{ab}$ 也可以把 $\mathcal{H}^b$ 重新表达成

$$\mathcal{H}^b = -2\sqrt{h}\bar{D}_a\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\pi^{ab}\right). \quad (18.123)$$

注意，在拉格朗日体密度 $\mathcal{L}_G$ 中，并未出现 $N$ 和 $N^a$ 的时间导数，这意味着 $N$ 和 $N_a$ 是拉格朗日乘子，它们的共轭动量密度为零，因此根据哈密顿正则方程，即有如下约束方程

$$0 = \frac{\delta H_G}{\delta N} = \mathcal{H}, \quad 0 = \frac{\delta H_G}{\delta N^a} = \mathcal{H}_a. \quad (18.124)$$

利用上面关于 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}_a$ 的定义式(18.117)、(18.118)，即有

$$\bar{R} + K^2 - K^{ab}K_{ab} = 0, \quad \bar{D}_b K_a^b - \bar{D}_a K_b^b = 0. \quad (18.125)$$

这与前面的结果(18.54)在忽略物质场时一致。如果进一步考虑物质场，那么就要在 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}_a$ 中添加上物质场的贡献，最终得到的约束方程依然是(18.54)式。其中 $\mathcal{H} = 0$ 称作哈密顿约束，而 $\mathcal{H}_a = 0$ 称作动量约束，两种约束加起来一共四个分量约束方程，正好对应四个独立的微分同胚变换，实际上，微分同胚不变性就是这四个分量约束方程的起源。

进一步当然还可以根据 $h_{ab}$ 和 $\pi^{ab}$ 的哈密顿正则方程(如下)推导它们所满足的运动方程

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta H_G}{\delta \pi^{ab}}, \quad \dot{\pi}^{ab} = -\frac{\delta H_G}{\delta h_{ab}}, \quad (18.126)$$

只不过具体推导 $H_G$ 对 $h_{ab}$ 和 $\pi^{ab}$ 的变分有点繁琐，这里从略。特别的，给定 $h_{ab}$ 和 $\pi^{ab}$ 在某个初始类空超曲面 $\Sigma_{t_0}$ 的初始值，我们就可以通过求解它们的哈密顿正则方程，得到它们在此后任意时刻的 $\Sigma_t$ 上的值，而且这种求解还可以通过数值方法进行，这在时空动力学演化的数值模拟中很有用。

很显然，对于满足哈密顿约束和动量约束的物理场位形，相应的哈密顿量 $H_G$ 的体密度贡献其实等于零，只有边界积分有贡献，有时候也把这个边界贡献记作 $H_{\text{ADM}}$

$$H_{\text{ADM}} = -\frac{1}{\kappa} \int_{S_t} d^2\theta \sqrt{\sigma} \left[ N(k - k_0) - r_a N_b (K^{ab} - K h^{ab}) \right]. \quad (18.127)$$

对于物理场位形， $H_G = H_{\text{ADM}}$ .

### 18.3.4 ADM能量

本小节讨论如何定义渐近平坦时空的总能量，尤其是我们要把它和 $H_{\text{ADM}}$ 联系起来。

前面说过，对于物理的引力场位形，其哈密顿量由 $H_{\text{ADM}}$ 给出。但是， $H_{\text{ADM}}$ 的定义依赖于类空超曲面 $\Sigma_t$ 在很远的渐近区域的行为，同时也依赖于时移函数 $N$ 以及位移矢量 $N^a$ 的渐近行为。虽然 $N$ 和 $N^a$ 总可以任意选，但时空渐近平坦的事实会给出 $\Sigma_t$ 渐近行为的合适要求。具体来说，我们要求 $\Sigma_t$ 渐近地与闵可夫斯基时空的某个等时面重合：假如 $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 是无穷远处的一个洛伦兹参考系，则 $\Sigma_t$ 必须渐近地与 $\tilde{t} = \text{constant}$ 的超曲面重合。因此， $\Sigma_t$ 上任意选取的坐标 $y^a$ 会渐近地与闵可夫斯基空间坐标联系起来，即有渐近关系 $y^a \rightarrow y^a(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 。类似的，也有渐近关系 $x^\mu \rightarrow x^\mu(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 。

注意到 $\tilde{t}$ 为渐近区域的静止观察者的固有时，此观察者的协变速度为 $u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{t}}$ ，由于 $u^\mu$ 是归一的，且与 $\tilde{t} = \text{constant}$ 的超曲面正交，因此它必定就是渐近区域的 $n^\mu$ ，换言之，我们有渐近关系 $n^\mu \rightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{t}}$ 。又注意到 $t^\mu = N n^\mu + N^a e_a^\mu$ ，所以必然也有如下渐近关系

$$t^\mu \rightarrow N \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{t}} \right)_{y^a} + N^a \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \right)_{\tilde{t}}. \quad (18.128)$$

也即是说，按照我们对 $\Sigma_t$ 渐近行为的要求，选取渐近区域的 $N$ 、 $N^a$ 与选取相应区域的 $t^\mu$ 是一回事。特别的， $H_{\text{ADM}}$ 可以看成是依赖于渐近区域的 $t^\mu$ 。

为了定义渐近平坦时空的总能量，我们取 $S_t$ 为空间无穷远处的2维球面，记作 $S_t^\infty$ ，同时，我们在无穷远处选取 $N = 1$ 以及 $N^a = 0$ 。我们把总能量 $E_{\text{ADM}}$ 定义成如此计算出来的 $H_{\text{ADM}}$ ，即

$$E_{\text{ADM}} \equiv -\frac{1}{\kappa} \int_{S_t^\infty} d^2\theta \sqrt{\sigma} (k - k_0). \quad (18.129)$$

之所以说 $E_{\text{ADM}}$ 是总能量，原因如下：首先 $N = 1, N^a = 0$ 相应于 $t^\mu \rightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{t}}$ ，也即是说， $t^\mu$ 渐近于无穷远处的一个时间平移生成元。 $E_{\text{ADM}}$ 正是这个时间平移生成元对应的引力哈密顿量，从而就是时空的总能量。

类似的， $H_{\text{ADM}}$ 也可以提供时空总角动量与渐近旋转之间的联系。只要我们选取 $t^\mu \rightarrow \phi^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \phi}$ ，这里 $\phi$ 是渐近区域相对于笛卡尔坐标 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 的一个旋转角度。当然，这种选取相应于 $N = 0, N^a \equiv \phi^a = \frac{\partial y^a}{\partial \phi}$ 。也即是说，时空的总角动量 $J_{\text{ADM}}$ 可以定义成

$$J_{\text{ADM}} \equiv -\frac{1}{\kappa} \int_{S_t^\infty} d^2\theta \sqrt{\sigma} \left[ r^a \phi^b (K_{ab} - K h_{ab}) \right], \quad (18.130)$$

相对于原来 $H_{\text{ADM}}$ 的公式，我们在式中多加了一个额外的负号，这是为了使得计算出来的角动量的正负与通常约定吻合。值得注意的是，总角动量的定义是相对于某个转轴而言的， $\phi$ 就是相对于这个转轴的转角。

从上面的定义可以看出，渐近平坦时空的总能量和总角动量只依赖于引力场在空间无穷远处的渐近行为，这是一个相当奇妙的性质，因为一般来说，能量总量这样的东西应该是某个能量体密度的体积积分，应该是依赖于整个空间体的。不过，在电动力学中我们也见过类似的现象，即空间的电荷总量只依赖于空间无穷远处的电通量。

在渐近平坦时空中，ADM能量(也包括ADM角动量)是时间无关的守恒量。这是因为：首先，时空的渐近对称性(如时间平移不变性)导致能量守恒。其次，为了保证时空渐近平坦，引力辐射在无穷远处的能量流需满足特定衰减条件，从而对ADM能量无贡献。

值得说明的是，这里给出的ADM能量的公式和通常所见的ADM公式并不相同，推导方式当然也不同。但是，可以证明，两个不同的公式结果其实是一致的，证明可以参见S. W. Hawking, Gary T. Horowitz, The Gravitational Hamiltonian, Action, Entropy and Surface Terms, arXiv: gr-qc/9501014.

### 正质量定理(Schoen-Yau-Witten定理)

既然ADM能量 $E_{\text{ADM}}$ 为渐近平坦时空的总能量，一个重要的问题是， $E_{\text{ADM}}$ 是否有下界？甚至是否有 $E_{\text{ADM}} \geq 0$ ？这个问题之所以重要，是因为如果总能量没有下界，那么任何时空都将不稳定，会无限地往能量更低的时空衰变。

好在Schoen和Yau给出了这个问题的肯定回答(Yau就是丘成桐)。Schoen-Yau证明，对于物理上合理的物质场(满足主能量条件)，总有

$$E_{\text{ADM}} \geq 0, \quad (18.131)$$

且 $E_{\text{ADM}} = 0$ 当且仅当时空全局为平坦的闵可夫斯基时空。这表明，引力系统的总能量非负，且“无引力”的真空即为能量零点，所以通常称这个定理为正质量定理(质量即是能量)。后来Witten又给出了这个定理的更优雅而且大大简化的证明，所以也称之为Schoen-Yau-Witten定理。

### 轴对称稳态时空的能量和角动量

下面我们考察一个具体的渐近时空，并计算其ADM能量和角动量。我们考察的时空就是轴对称稳态时空。

正如第十三章(讲述克尔黑洞的章节)中提到过的，轴对称的稳态时空在空间无穷远( $r \rightarrow +\infty$ )处度规的渐近形式为

$$\begin{aligned} ds^2 \rightarrow & - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ & - \frac{4GJ}{r} \sin^2\theta dt d\phi. \end{aligned} \quad (18.132)$$

通过重新定义 $r$ ，具体来说就是将 $r$ 替换成 $r + GM$ ，我们也可以将上面的渐近度规改写成(注意 $r \rightarrow +\infty$ )

$$\begin{aligned} ds^2 \rightarrow & - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \\ & - \frac{4GJ}{r} \sin^2\theta dt d\phi. \end{aligned} \quad (18.133)$$

式中 $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ 。在第十三章中我们提到过，上面的 $M$ 是整个时空的总能量， $J$ 是总角动量，现在我们就通过具体计算来确定这一点。

首先，选取 $\Sigma_t$ 为 $t$ 取常数值的超曲面，不难看出上面的这个渐近度规(18.133)符合我们对 $\Sigma_t$ 的要求。显然 $n_\mu = -(1 - \frac{GM}{r})\partial_\mu t$ (注意到 $r$ 很大，并且我们的计算仅仅保留到 $GM/r$ 的一阶，下同)。很显然， $\Sigma_t$ 上的诱导度规为

$$h_{ab} dy^a dy^b = \left(1 + \frac{2GM}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (18.134)$$

取空间边界 $S_t$ 为 $r = R$ 处的两维球面，最终我们要取 $R \rightarrow \infty$ 的极限。不难看出， $S_t$ 的法向量 $r_a$ 为 $r_a = (1 + \frac{GM}{r})\partial_a r$ ，并且 $S_t$ 上的诱导度规为

$$\sigma_{AB} d\theta^A d\theta^B = \left(1 + \frac{2GM}{R}\right) R^2 d\Omega^2. \quad (18.135)$$

为了计算ADM能量 $M$ ，我们需要计算 $k = \bar{D}_a r^a$ ，计算的结果是 $k = 2(1 - 2GM/R)/R$ 。另外还需要从 $k$ 中减除掉 $k_0$ ， $k_0$ 是同一个 $S_t$ 嵌入平坦空间的外曲率。记 $S_t$ 在平坦空间的诱导度规为

$$\sigma_{AB}^0 d\theta^A d\theta^B = R'^2 d\Omega^2, \quad (18.136)$$

很显然，为了保证 $\sigma_{AB}^0 = \sigma_{AB}$ ，需要取 $R' = R(1 + GM/R)$ 。进而可算得 $k_0 = 2/R' = 2(1 - GM/R)/R$ 。所以 $k - k_0 = -2GM/R^2$ 。另一方面 $\sqrt{\sigma} d^2\theta =$

$R^2(1 + 2GM/R) \sin \theta d\theta d\phi$ 。将这些结果代入公式(18.140), 即得

$$E_{\text{ADM}} = M. \quad (18.137)$$

正如我们所期望的。

为了计算ADM角动量 $J_{\text{ADM}}$ , 我们注意到 $K_{ab}r^a\phi^b = K_b^a r_a \phi^b = K_b^a (1 + GM/r) \frac{\partial r}{\partial y^a} \frac{\partial y^b}{\partial \phi} = (1 + GM/r) K_r^a = (1 + GM/r) g^{rr} K_{r\phi} = (1 - GM/r) K_{r\phi}$ , 利用定义 $K_{ab} = e^\mu_a e^\nu_b D_\mu n_\nu$ 可以算得 $K_{r\phi} = (1 - GM/r) \Gamma_{r\phi}^t$ . 利用

$$g^{tt} = -(1 + 2GM/r), \quad g^{t\phi} = -2GJ/r^3. \quad (18.138)$$

进而可以算得 $\Gamma_{r\phi}^t = -3GJ \sin^2 \theta / r^2$ , 进而即有 $K_{r\phi} = -3GJ \sin^2 \theta / R^2$ 。另一方面, 公式(18.130)中的第二项( $K h_{ab} r^a \phi^b$ 项)其实等于零, 因为 $r^a$ 和 $\phi^a$ 是正交的。将这些结果代入公式(18.130), 即得 $J_{\text{ADM}} = (3J/4) \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = J$ , 即

$$J_{\text{ADM}} = J, \quad (18.139)$$

正是我们期待的结果。

### 引力能量的非定域性

ADM能量定义的是整个时空的总能量, 而且它只取决于度规的渐近行为, 也就是说, 这样定义出来的能量是非定域的, 即不是由一个能量密度进行体积积分给出的。除了ADM能量之外, 关于引力场全局能量的定义还有Bondi能量等。

那么, 可不可能定义引力场的能量密度呢? 前面引力波的章节中好像我们给出过引力场的能量密度(能动张量), 但是, 那里是把时空背景取作平坦时空, 把引力场看作时空背景上的微扰场, 而不是采用更一般的引力场对应于时空弯曲的观点, 尤其是, 那里我们并没有用到等效原理。那么, 一般来说, 对于非微扰的引力场, 可不可以定义它的局域能量密度呢? 或者更广泛地说, 可不可以定义引力场本身的能动张量呢?

类比于电磁场的话, 我们知道, 电磁场的能动张量取决于场强的平方, 因此人们可能同样猜想, 引力场的能动张量也取决于场强的平方, 但问题是, 引力场的场强由克里斯托夫联络来刻画, 而根据等效原理, 我们总可以取局域惯性系, 在局域惯性系中, 克里斯托夫联络为零, 也就是引力场强为零, 如此一来就会导致引力场的能动张量恒等于零! 但是, 引力场当然是有能量的, 所以这样想的话就会自相矛盾。

问题可能还是出在引力能量的非定域性，也即是说，引力场有能量，但是这能量并不由局域的能量密度来刻画。换言之，可能不存在引力场能动张量的一个合理定义！当然，人们也作过一些尝试，想用某种赝能动张量来定义引力场的能量密度，比如朗道和栗弗席兹的《场论》中就提出过一个这样的赝张量。但总体来说，这些尝试都不太成功。

另一方面，人们也尝试过定义引力场的准局域能量，即通过一个包围有限空间区域 $\Sigma$ 的二维表面 $\partial\Sigma$ 来定义能量，这避免了ADM能量定义中需要取无限远处边界条件的问题。这种准局域能量的典型例子是所谓的布朗-约克能量，其定义和ADM能量很像，为

$$E_{\text{BY}}(\Sigma) = -\frac{1}{\kappa} \int_{\partial\Sigma} d^2\theta \sqrt{\sigma}(k - k_0). \quad (18.140)$$

另外，在AdS/CFT对应的框架中，引力场的能量可以全息地编码在边界共形场论的能动张量中，但这一方法仅仅限制于渐近AdS时空，而且它定义的也是一种全局能量，因为整个时空的能量还是由远处的渐近边界给出，只是这时候由于是渐近AdS而不是渐近平坦，所以有一个类时的共形边界而已。