

# 目录

<b>第十七章 引力波</b>	<b>2</b>
17.1 线性化的场方程 . . . . .	3
17.2 真空中的引力波 . . . . .	8
17.2.1 求解波动方程 . . . . .	9
17.2.2 随波起伏 . . . . .	11
17.2.3 精确解 . . . . .	14
17.3 引力波的产生 . . . . .	15
17.3.1 求解线性化爱因斯坦场方程 . . . . .	15
17.3.2 示例：双星系统 . . . . .	20
17.4 诺特技巧推导引力波能动张量 . . . . .	21
17.5 辐射功率 . . . . .	26
17.5.1 引力波能动张量的具体形式 . . . . .	26
17.5.2 再谈TT规范 . . . . .	29
17.5.3 辐射功率 . . . . .	31
17.5.4 估算辐射功率的量级 . . . . .	33
17.6 参考文献 . . . . .	34

# 第十七章 引力波

陈童

17世纪末，牛顿坐在花园里，目睹了一颗苹果的坠落。这一瞬间的灵感，让他意识到地球与苹果之间存在着一种无形的力——引力。牛顿的万有引力定律成功解释了行星的运动、潮汐的涨落，甚至预言了海王星的存在。然而，牛顿的引力是一种“超距作用”，它瞬间传递，无需时间。这种瞬时性的假设，与19世纪电磁学的发展产生了深刻的矛盾。

19世纪中叶，麦克斯韦建立了电磁场理论，预言了电磁波的存在，并证明光就是一种电磁波。电磁波以有限的速度传播，这一发现动摇了牛顿引力的根基。如果电磁相互作用需要时间传递，那么引力相互作用是否也是如此？这个问题困扰了物理学家数十年，直到爱因斯坦的出现。

1905年，爱因斯坦提出了狭义相对论，彻底否定了“超距作用”的可能性。任何相互作用的传递速度都不能超过光速，引力也不例外。1915年，爱因斯坦进一步提出了广义相对论，将引力解释为时空的弯曲。物质告诉时空如何弯曲，时空告诉物质如何运动。在这一全新的理论框架下，引力不再是力，而是时空几何的表现。

广义相对论的方程中隐藏着一个惊人的预言：当物质加速运动时，它会扰动周围的时空，产生一种以光速传播的波动——这就是引力波。引力波是时空的涟漪，是宇宙的琴弦，它携带着源头的信息，穿越浩瀚的宇宙，抵达地球。然而，引力波的信号极其微弱，爱因斯坦本人也曾怀疑人类是否能够探测到它。起初科学家们只能依靠间接证据来推测引力波的存在，比如双星系统中轨道能量损失的现象，这符合引力波辐射带走能量的预期。

一个世纪之后的2015年9月14日，激光干涉引力波天文台（LIGO）首次直接探测到了引力波信号。这一信号来自13亿光年外的两个黑洞的并合，标志着人类正式进入引力波天文学的时代。引力波的探测不仅验证了爱因斯坦的预言，更为我们打开了一扇观测宇宙的新窗口。不同于传统的电磁波观测手段，引力波不受尘埃、气体或其他物质的影响，能够穿透几乎所有的障碍直达地球。这意味着我们可以窥探那些传统望远镜无法触及的极端天体事件，如黑洞碰撞、超新星爆发甚至可能是宇宙大爆炸本身的余晖。通过引力波，我们可以“聆听”黑洞的碰撞、中子星的并合，甚至追溯宇宙的起源。

## 17.1 线性化的场方程

引力波的理论研究当然需要求解爱因斯坦场方程，但是如果引力场很强，那除了少数特殊情况之外，就没有一般性的解析求解方法。出路之一是，寻求数值解，或者说发展数值模拟，在实际应用中，这甚至是最为重要的出路。但是，作为一本讲述理论原理而不是侧重于应用的书，转去讲数值模拟肯定是不合适的。好在，还有另一条出路，就是去求解弱引力场近似下的爱因斯坦场方程。这条出路有两个优点：第一，它可以一般性地进行求解。第二，它足以揭示引力波的存在，揭示其产生和传播的机理。

所谓的弱引力场近似，指的就是，时空几乎是平坦的，只是在这个平坦的背景上存在一些微扰，所谓时空的涟漪。具体来说，在弱场近似下，度规场 $g_{\mu\nu}$ 可以分解成如下形式

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (17.1)$$

式中 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ 为闵可夫斯基度规，而 $h_{\mu\nu}$ 为这个平坦时空背景上的微扰小量，满足 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ 。

这时候，我们把 $h_{\mu\nu}$ 看成是由度规 $\eta_{\mu\nu}$ 所描述的平坦时空背景上的场(称作线性化度规场)，也就是说， $h_{\mu\nu}$ 是满足洛伦兹变换的平坦时空张量，而不是弯曲时空张量，因此我们用闵可夫斯基度规来对它进行指标的升降，比方说

$$h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}. \quad (17.2)$$

同样，我们也用闵可夫斯基度规来进行指标的收缩，比方说 $h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ 。类似的处理也将同样应用于弱引力场近似下的其它量！

根据第四章的相关知识，在如下无穷小微分同胚变换之下

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x), \quad (17.3)$$

度规场将变换为

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - [\epsilon^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho} \partial_\nu \epsilon^\rho + g_{\rho\nu} \partial_\mu \epsilon^\rho]. \quad (17.4)$$

应用弱场近似 $g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}$ ，并保留到一阶小量(注意 $\epsilon^\mu$ 和 $h_{\mu\nu}$ 都是小量)，即可以得到

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu). \quad (17.5)$$

换言之，在无穷小微分同胚之下，线性化度规场在变换前后的改变量为 $\delta h_{\mu\nu} = -(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu)$ 。这完全类似于电动力学中电磁矢量势 $A_\mu$ 在无穷小规范变换之下的改变量 $\delta A_\mu = -\partial_\mu \epsilon$ ，所以，在线性化度规场近似下，无穷小微分同胚变换完全可以看成是一种类似于电动力学中的规范变换，而线性化度规场 $h_{\mu\nu}$ 就是这一规范变换之下的规范场<sup>1</sup>。

### 线性化场方程

在上面的弱引力场近似下，爱因斯坦场方程可以化简(保留到 $h_{\mu\nu}$ 的一阶)，这个化简以后的场方程称作线性化爱因斯坦场方程，因为其中我们只保留到小量 $h_{\mu\nu}$ 的一阶，也就是线性阶。

首先， $g^{\mu\nu}$ 的一阶近似为

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (17.6)$$

相应的克里斯托夫联络系数的线性化近似为

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} \eta^{\sigma\rho} (\partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\mu} - \partial_\rho h_{\mu\nu}). \quad (17.7)$$

注意， $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ 本身为一阶小量。

黎曼曲率张量为

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (17.8)$$

---

<sup>1</sup>值得注意的是，如果把规范对称性定义成理论中的某种冗余，那么广义相对论中一般的微分同胚对称性也可以看成是一种广义的规范对称性，因为在量子引力中，真正的物理可观测量要求是微分同胚不变的，也即是说，广义相对论的微分同胚对称性也是理论描述的某种冗余。

在线性化引力场的近似下，联络系数为一阶小量，从而式中的 $\Gamma\Gamma$ 项为二阶小量，因此可以忽略。从而，黎曼曲率张量的线性化近似为

$$\begin{aligned} R^\rho_{\sigma\mu\nu} &= \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} (\partial_\mu \partial_\sigma h_{\nu\lambda} - \partial_\mu \partial_\lambda h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h_{\mu\lambda} + \partial_\nu \partial_\lambda h_{\mu\sigma}). \end{aligned} \quad (17.9)$$

注意，这同样是一阶小量。进而里奇张量为

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial^\rho \partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial^\rho \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial^2 h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h), \quad (17.10)$$

式中 $\partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu$ ,  $h \equiv h^\mu_\mu$ 。进一步可以得到里奇标量的线性化近似为

$$R = \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \partial^2 h. \quad (17.11)$$

由里奇张量和里奇标量的线性化近似，即可以得到爱因斯坦张量的线性化近似，为

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\partial^\rho \partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial^\rho \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial^2 h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - (\partial^\rho \partial^\sigma h_{\rho\sigma} - \partial^2 h) \eta_{\mu\nu}] \quad (17.12)$$

爱因斯坦张量满足比安奇恒等式 $D^\mu G_{\mu\nu} = 0$ ，在线性化近似下，这个恒等式将变成

$$\partial^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (17.13)$$

不难验证，上面给出的线性化爱因斯坦张量自动满足这个恒等式。

有了爱因斯坦张量的线性化近似，我们就可以写出爱因斯坦场方程的线性化近似了，为

$$\partial^\rho \partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial^\rho \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial^2 h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - (\partial^\rho \partial^\sigma h_{\rho\sigma} - \partial^2 h) \eta_{\mu\nu} = 16\pi G T_{\mu\nu}.$$

当然，为了自洽，方程右边的 $T_{\mu\nu}$ 也得近似为小量。

### Fierz-Pauli作用量

我们知道，爱因斯坦场方程可以从爱因斯坦-希尔伯特作用量中得到，那么，在弱引力场近似下，这个作用量近似为什么呢？这个问题其实有点复杂，复杂之处在于，为了得到场方程的一阶近似，我们需要将作用量近似到二阶小量，特别的，我们需要将里奇标量近似到二阶小量，如果

直接算的话, 这会有点复杂。不过, 我们可以根据上面给出的爱因斯坦张量的线性近似, 以及作用量原理  $\delta S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [-G^{\mu\nu} \delta h_{\mu\nu}]$  凑出答案(其中  $\kappa = 8\pi G$ )。经过合适的分部积分并丢掉边界项以后, 可以得到结果为

$$S_{\text{FP}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} \partial_\rho h_{\mu\nu} \partial^\rho h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\rho h_{\mu\nu} \partial^\nu h^{\rho\mu} + \frac{1}{4} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} \partial_\nu h^{\mu\nu} \partial_\mu h \right].$$

这个结果最早是Fierz 和Pauli给出来的, 所以也称作Fierz-Pauli作用量。

另一种快速得到Fierz-Pauli作用量的办法是, 首先, 要求它是  $h_{\mu\nu}$  的二阶小量, 同时每一项都包含两个偏导运算。在这两个要求下, 作用量的一般形式为

$$S_{\text{FP}} = \int d^4x \left[ c_1 \partial_\rho h_{\mu\nu} \partial^\rho h^{\mu\nu} + c_2 \partial_\rho h_{\mu\nu} \partial^\nu h^{\rho\mu} + c_3 \partial_\mu h \partial^\mu h + c_4 \partial_\nu h^{\mu\nu} \partial_\mu h \right],$$

式中  $c_1, c_2, c_3, c_4$  为待定的常数系数。然后, 最重要的是, 我们要求这个作用量在规范变换(17.5)之下保持不变(经过合适的分部积分并丢弃边界项)。计算出规范变换(17.5)之下上述作用量的改变量, 经过合适的分部积分之后, 结果是

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{FP}} = - \int d^4x & \left[ (4c_1 + 2c_2) \partial^2 \partial_\mu h^{\mu\nu} \epsilon_\nu \right. \\ & \left. + (2c_2 + 2c_4) \partial_\mu \partial_\nu \partial^\rho h^{\mu\nu} \epsilon_\rho + (4c_3 + 2c_4) \partial^2 \partial^\mu h \epsilon_\mu \right]. \end{aligned} \quad (17.14)$$

要求这个改变量等于零, 由此就能确定

$$4c_1 + 2c_2 = 0, \quad 2c_2 + 2c_4 = 0, \quad 4c_3 + 2c_4 = 0.$$

这组方程的通解为

$$c_1 = -\frac{1}{4}a, \quad c_2 = \frac{1}{2}a, \quad c_3 = \frac{1}{4}a, \quad c_4 = -\frac{1}{2}a, \quad (17.15)$$

式中  $a$  为一个未定的常数因子。也就是说, 上面这些要求可以把Fierz-Pauli作用量确定到只差一个整体的常数因子  $a$ 。

以上推导也给出另一种对引力场方程进行线性近似的办法, 就是通过规范不变性的要求先确定出Fierz-Pauli作用量(差一个整体的常数因子  $a$ ), 之后再将这个作用量进行牛顿引力近似, 与牛顿引力的作用量进行比较, 得到  $a = \frac{1}{16\pi G}$ 。然后再对最终的Fierz-Pauli作用量进行变分, 得到线性化近似以后的爱因斯坦场方程。这种推导办法的好处是, 不需要先知道完整的

爱因斯坦场方程，甚至都不需要联络和曲率张量等几何概念，更不要说对这些几何量进行线性近似了。事实上，它只需要假设在弱场近似下，引力场由 $h_{\mu\nu}$ 描述，然后假设理论在规范变换(17.5)之下保持不变。这是一种完全场论化的处理办法，它不需要那些黎曼几何的概念。

### 规范固定

实际上，前面得出的线性化场方程还可以简化。为此我们定义

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}. \quad (17.16)$$

从而有 $\bar{h} \equiv \bar{h}^\mu_\mu = -h$ , 进而也有

$$h_{\mu\nu} \equiv \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\mu\nu}. \quad (17.17)$$

所以我们只要先解出 $\bar{h}_{\mu\nu}$ , 那由这个式子就能得到原来的 $h_{\mu\nu}$ . 将(17.17)式代入前面得到的线性化场方程，不难有

$$\partial^\rho \partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho} + \partial^\rho \partial_\nu \bar{h}_{\mu\rho} - \partial^2 \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} = 16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (17.18)$$

另外一方面，理论有 $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu)$ 的规范对称性，用变量 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 来说，这个规范对称性即是

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \epsilon_\rho). \quad (17.19)$$

假设原来有 $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = f_\nu$ , 其中 $f_\nu$ 是某个任意的矢量场，那么在上述规范变换之下，它将变成 $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} - \partial^2 \epsilon_\nu = f_\nu$ . 因此只要适当地选取 $\epsilon_\nu$ 为方程 $-\partial^2 \epsilon_\nu = f_\nu$ 的解，我们就可以让最终的 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 额外满足如下方程

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (17.20)$$

注意，额外要求 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 满足这个方程以后，我们就不再能进行前面的规范变换了！所以，这个方程是一种规范固定条件，常常称作de Donder 规范条件，或者简称为de Donder 规范。当然，规范固定条件不是唯一的，de Donder 规范只是比较好用也比较常用而已，就如同电动力学中的洛伦兹规范一样。

很显然，在de Donder 规范(17.20)下，线性化爱因斯坦场方程(17.18)可以进一步简化为

$$-\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (17.21)$$

当然，这时候为了和方程(17.20)自洽，得有

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (17.22)$$

实际上，这就是协变能动量守恒方程 $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$ 的弱引力场近似结果。

其实，de Donder 规范在任意非线性引力场(而不仅仅是线性弱引力场)情况下是有一个对应物的，就是如下规范条件

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0. \quad (17.23)$$

注意，这不是一个张量方程，因为 $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ 不是一个张量。事实上，这个方程只在特定的局部坐标下才成立<sup>2</sup>，它就是用来挑出这些方便的局部坐标的。读者不难自己验证，这个非线性引力场的规范条件在线性化近似下给出的就是de Donder 规范条件。

上述非线性规范条件(17.23)之所以有用，是因为它有一些良好的性质。比方说如果我们考虑弯曲时空中的 $D^\mu D_\mu$ 算符，则由于 $D^\mu D_\mu = g^{\mu\nu}(\partial_\mu \partial_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\rho \partial_\rho)$ ，很显然，如果有规范条件(17.23)，那么即有 $D^\mu D_\mu = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ 。类似的简化也发生在计算协变散度 $D^\mu \omega_\mu$ 时，如果有规范条件(17.23)，则 $D^\mu \omega_\mu = g^{\mu\nu}(\partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \omega_\rho) = \partial^\nu \omega_\nu$ 。

## 17.2 真空中的引力波

2015年9月14日，人类首次直接捕捉到了来自宇宙深处的时空涟漪——引力波。这一天，位于美国路易斯安那州和华盛顿州的两台LIGO（激光干涉引力波天文台）探测器，记录下了一段持续约0.2秒的独特信号。这个编号为GW150914的事件，不仅验证了爱因斯坦百年前的预言，更开启了人类探索宇宙的全新窗口。

GW150914源自13亿光年外的一场宇宙“婚礼”：两颗质量分别为35倍和30倍太阳质量的黑洞，在相互缠绕数十亿年后以近乎光速碰撞合并，最终形成一个62倍太阳质量的旋转黑洞。这一过程中，相当于3倍太阳质量的能量(一个巨大的能量)以引力波形式辐射而出，跨越浩瀚星海抵达地球。LIGO通过测量两条4公里长激光干涉臂的微小长度差（约 $10^{-18}$ 米），捕捉到了这场宇宙事件留下的唯一证据。

2016年2月11日，LIGO团队公布这一发现时，科学界为之沸腾。引力波的探测不仅填补了广义相对论实验验证的最后一块拼图，更标志着“多

<sup>2</sup>与之相反，张量方程只要在一个坐标系下成立，则就在任意坐标系下都成立。



信使天文学”时代的来临。人类从此不仅能“看”电磁波，还能“听”引力波，以前所未有的方式感知黑洞、中子星等暗弱天体的奥秘。截至2023年，LIGO与欧洲Virgo探测器已累计探测到百余次引力波事件，包括双中子星合并引发的“光与引力波交响曲”。

这项发现被《科学》杂志誉为“世纪突破”，其核心团队荣获2017年诺贝尔物理学奖。正如LIGO创始人之一基普·索恩所言：“我们第一次听见了宇宙的呼吸。”从爱因斯坦的纸笔推演到实验室中的激光闪烁，人类用百年坚守证明：那些藏匿于时空褶皱中的宇宙私语，终将被倾听。

本节我们来研究在弱场近似下，引力波如何在真空中传播。

### 17.2.1 求解波动方程

所谓在真空中，指的就是没有物质源。因此这时线性化场方程(17.21)将变成，

$$\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (17.24)$$

当然，式中第二个方程就是de Donder 规范条件。

由于以上方程为标准的波动方程，它当然有如下标准的平面波解，

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \text{Re}(H_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho}), \quad (17.25)$$

式中 $H_{\mu\nu}$ 是一个复的对称极化张量， $k^\mu$ 是一个实的四维波矢量。记住，求解的最后一步是取实部，不过，我们也常常省去对这一步的显式书写，而默认人们最后必然会这么做。

将上述平面波解的假设代入方程(17.24)，立即有

$$k_\rho k^\rho = 0, \quad k^\mu H_{\mu\nu} = 0. \quad (17.26)$$

前一个方程告诉我们，真空中引力波的波矢量是一个类光矢量，因此**引力波以光速传播**。后一个方程告诉我们，引力波的极化张量与其传播方向正交。

不过，de Donder 规范条件其实并没有固定所有的规范自由度。为了看出这一点，假设我们在规范变换(17.19)中取

$$\partial^2 \epsilon_\mu = 0. \quad (17.27)$$

则不难看出, 只要变换之前的 $h_{\mu\nu}$ 满足de Donder 规范条件, 则变换之后依然满足de Donder 规范条件。

很显然, (17.27)式存在如下平面波解

$$\epsilon_\mu = \text{Re}(\lambda_\mu e^{ik_\rho x^\rho}), \quad k_\rho k^\rho = 0. \quad (17.28)$$

代入规范变换(17.19), 即有, 满足de Donder 规范条件的平面引力波还可以进行如下变换

$$H_{\mu\nu} \rightarrow H_{\mu\nu} - i(k_\mu \lambda_\nu + k_\nu \lambda_\mu - \eta_{\mu\nu} k^\rho \lambda_\rho). \quad (17.29)$$

因此, 我们可以进一步选择合适的 $\lambda_\mu$ 使得

$$H_{0\mu} = 0, \quad H^\mu{}_\mu = 0. \quad (17.30)$$

这个条件, 联合前面(17.26)的第二式, 就称之为**横向无迹规范**, 即Transverse Traceless gauge或者TT规范。所谓无迹, 指的就是矩阵 $H$ 是无迹的, 或者说, 这时候 $\bar{h} = 0 = -h$ 。因此, 在横向无迹规范中, 我们有 $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}$ 。

下面我们来数一下引力波的物理自由度。首先, 极化张量 $H_{\mu\nu}$ 有 $\frac{4(4+1)}{2} = 10$ 个独立分量, de Donder 规范条件((17.26)的第二式)对它加上了4个约束条件, 而且, 在满足这些约束条件的同时, 还可以进行4个剩余的规范变换(由前面的 $\lambda_\mu$ 刻画), 所以, 真正物理的独立极化分量只有 $10 - 4 - 4 = 2$ 个。

取类光矢量 $k^\mu = (\omega, k^i)$ (类光条件为 $\omega^2 - k^i k_i = 0$ ), 则根据(17.30)式以及(17.26)的第二式可知, 在横向无迹规范中, 必有

$$H_{00} = 0, \quad H_{0i} = 0, \quad k^i H_{ij} = 0, \quad H^i{}_i = 0. \quad (17.31)$$

由于3-矢量 $k^i$ 的方向就是波的传播方向, 所以这就告诉我们, 平面引力波是横波, 因为其极化张量与波的传播方向相垂直。

特别的, 如果取 $k^i$ 沿着 $z$ 轴的方向, 则满足上述条件的 $H$ 必定有如下形式

$$H_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_+ & H_\times & 0 \\ 0 & H_\times & -H_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (17.32)$$

式中,  $H_+, H_\times$ 就是极化张量 $H_{\mu\nu}$ 的两个独立物理分量。稍微我们会进一步解释这两种极化模式的物理含义。

### 17.2.2 随波起伏

假设你是一个粒子，只受引力作用，因此你走的是弯曲时空中的测地线，那么，根据等效原理，当引力波从你身上经过时，你将什么都感受不到，你觉得你是完全自由的。不过，你并不是一个粒子，更好的模型是把你看成簇粒子，每一个都在引力场中作测地线运动，当引力波经过你时，虽然你身上每一个点的引力都没有绝对意义，但是，潮汐力有绝对意义，作为一簇粒子，你可以感受到潮汐力，它可以由第七章所讲述的测地线偏离方程来刻画。

根据第七章，测地线偏离方程为

$$\frac{D^2 \eta^\mu}{D\tau^2} = R^\mu_{\rho\sigma\nu} u^\rho u^\sigma \eta^\nu, \quad (17.33)$$

式中 $\eta^\mu$ 为偏离矢量。 $u^\mu$ 为这些粒子的协变速度，即 $\partial_\tau = u^\mu \partial_\mu$  ( $\tau$ 为粒子的固有时)， $\eta^\mu$ 与 $u^\mu$ 正交。类似于第七章中的一些做法，我们取沿着其中一个粒子测地线自由下落的局部惯性系(从而 $t = \tau$ )，则在这个局部惯性系中，潮汐加速度可以简化为

$$\frac{D^2 \eta^\mu}{D\tau^2} = \frac{d^2 \eta^\mu}{dt^2}. \quad (17.34)$$

在此局部惯性系中， $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ ，因此与之正交的偏离矢量 $\eta^\mu$ 必然满足 $\eta^0 = 0$ ，根据第七章的相关推导，这时候可以将测地线偏离方程简化为

$$\frac{d^2 \eta^i}{dt^2} = R_{i00j} \eta^j. \quad (17.35)$$

前面推导过，线性化的黎曼曲率张量为

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} (\partial_\mu \partial_\sigma h_{\nu\lambda} - \partial_\mu \partial_\lambda h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h_{\mu\lambda} + \partial_\nu \partial_\lambda h_{\mu\sigma}). \quad (17.36)$$

注意到在TT规范中 $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}$ ，且 $h_{0\mu} = 0$ ，从而即有

$$R_{i00j} = \frac{1}{2} \partial_t^2 h_{ij}. \quad (17.37)$$

代入 $h_{ij} = \bar{h}_{ij} = \text{Re}(H_{ij} e^{-i\omega t + ik_j x^j})$ ，并将注意力集中在基准测地线附近(在上述局部惯性系中即取 $x^j = 0$ )，即有

$$R_{i00j} = -\omega^2 \frac{1}{2} \text{Re}(H_{ij} e^{-i\omega t}). \quad (17.38)$$

为了进一步简化讨论，我们假设引力波沿着局部惯性系的 $z$ 轴传播，则在将(17.38)式代入测地线偏离方程(17.35)以后，即有：

1.  $H_+$ 极化: 对于 $H_\times = 0$ 的 $H_+$ 极化模式, 有

$$\frac{d^2\eta^1}{dt^2} = -\frac{\omega^2}{2}\text{Re}(H_+e^{-i\omega t})\eta^1, \quad \frac{d^2\eta^2}{dt^2} = \frac{\omega^2}{2}\text{Re}(H_+e^{-i\omega t})\eta^2. \quad (17.39)$$

设 $H_+ = |H_+|e^{i\phi_+}$ , 并注意到 $|H_+|$ 为一个微扰小量, 从而可以用微扰法求解出上述方程的近似解, 为

$$\begin{aligned} \eta^1(t) &= \eta^1(0)\left(1 + \frac{1}{2}|H_+|\cos(\omega t - \phi_+) + \dots\right) \\ \eta^2(t) &= \eta^2(0)\left(1 - \frac{1}{2}|H_+|\cos(\omega t - \phi_+) + \dots\right). \end{aligned} \quad (17.40)$$

在所考察的这一簇测地线中取定一条基准测地线, 假设它位于 $x^i = 0$ 的坐标原点, 取偏离矢量 $\eta^i$ 为它到临近测地线的距离。由于引力波沿着 $z$ 轴传播, 所以我们只需要考察 $x - y$ 平面里的情况。假设在原点周围取一圈测地线, 并让它在初始时围绕原点形成一个圆周。则上述解(17.40)告诉我们, 在引力波的影响下, 如果这圆周上的测地线沿着 $x$ 轴( $\eta^1$ 方向)向外移动, 则它们必定同时沿着 $y$ 轴( $\eta^2$ )向内移动, 反过来也一样。所以, 随着时间的推移, 这一圈粒子必定从圆周演化成椭圆, 然后再演化回来, 如图(17.1)所示。

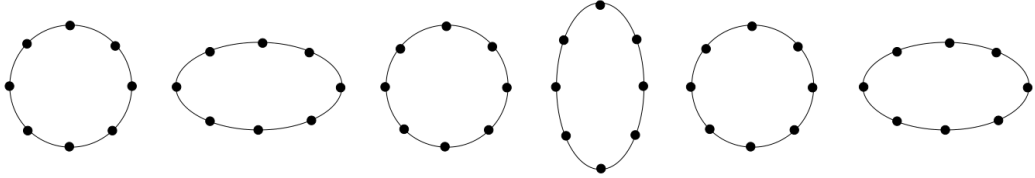


图 17.1:  $H_+$ 极化的引力波影响下 $x - y$ 平面上的测地偏离演化情况。

2.  $H_\times$ 极化: 类似的, 对于 $H_+ = 0$ 的 $H_\times$ 极化模式, 有

$$\frac{d^2\eta^1}{dt^2} = -\frac{\omega^2}{2}\text{Re}(H_\times e^{-i\omega t})\eta^2, \quad \frac{d^2\eta^2}{dt^2} = -\frac{\omega^2}{2}\text{Re}(H_\times e^{-i\omega t})\eta^1. \quad (17.41)$$

设 $H_\times = |H_\times|e^{i\phi_\times}$ , 并注意到 $|H_\times|$ 为一个微扰小量, 从而可以用微扰法求解

出上述方程的近似解，为

$$\begin{aligned}\eta^1(t) &= \eta^1(0) + \eta^2(0) \frac{1}{2} |H_{\times}| \cos(\omega t - \phi_{\times}) + \dots \\ \eta^2(t) &= \eta^2(0) + \eta^1(0) \frac{1}{2} |H_{\times}| \cos(\omega t - \phi_{\times}) + \dots\end{aligned}\quad (17.42)$$

换言之， $\eta^1 \pm \eta^2$  的演化情况才与  $H_+$  极化的情形完全类似。这就相当于在  $x - y$  平面内转过了45度。从而， $H_{\times}$  极化的引力波影响下  $x - y$  平面上的测地偏离演化情况如图(17.2)所示。

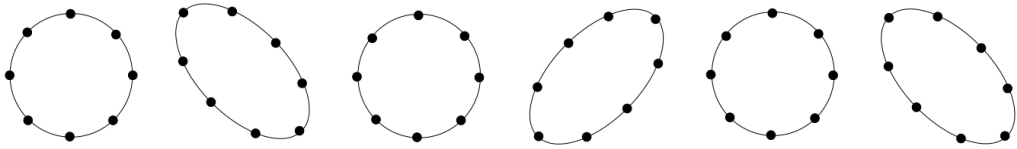


图 17.2:  $H_{\times}$  极化的引力波影响下  $x - y$  平面上的测地偏离演化情况。

当然，我们也可以考察以上两种极化模式的线性叠加。值得注意的是，引力波影响下的偏离矢量在角度  $\pi$  的旋转之下是不变的！这与电磁波极化矢量不同，后者只在  $2\pi$  的旋转下才不变。这一事实反映的是，引力子的自旋是2，而光子的自旋是1。

### 引力波探测器

引力波探测器是干涉仪。它们通过让光线在两条互相垂直的臂之间来回反射进行探测，臂两端的镜子充当测试质量块。当引力波垂直于探测器平面传播时，会导致其中一条臂缩短而另一条臂伸长。若将探测器两臂分别沿  $x$  轴和  $y$  轴对齐，则可通过公式(17.40)读出臂长的最大变化量，

$$L' = L(1 \pm \frac{1}{2} H_+) \Rightarrow \frac{\delta L}{L} = H_+. \quad (17.43)$$

为了估算这一变化的量级，我们需要了解典型天体物理源可能产生的振幅  $H_+$  的大小。我们将在后面的小节中详细讨论这一点。结果显示其数值极其微小：典型源的  $H_+$  约为  $10^{-21}$ 。LIGO探测器的每条臂长约  $L \approx 3$  公里，这意味着需要检测的臂长变化量仅为  $\delta L \approx 10^{-18}$  米。这个数字看似小得离谱——它比质子的半径还小，并且比干涉仪所用光的波长小约  $10^{12}$  倍。尽管

如此，探测器的灵敏度足以胜任这一任务。2015年，LIGO天文台首次成功探测到引力波，该合作组织的三位成员因此获得2017年诺贝尔奖。此后，LIGO和VIRGO探测器已观测到大量涉及黑洞与中子星合并的事件。

### 17.2.3 精确解

我们已经找到了线性爱因斯坦方程的波动解。对于一个沿着 $z$ 轴正方向传播的平面引力波，这种解的度规可以写成

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + (\delta_{ab} + h_{ab}(t-z))dx^a dx^b, \quad (17.44)$$

式中 $a, b = 1, 2$ 指示 $x-y$ 平面内的坐标分量。由于所考察的是线性爱因斯坦方程，所以任意 $h_{ab}(t-z)$ 都是解，前文考察的只是这种解的傅里叶分解。

如果我们引入如下光锥坐标

$$u = t - z, \quad v = t + z. \quad (17.45)$$

则也可以把上述线性爱因斯坦方程的解写成

$$ds^2 = -dudv + dx^a dx^a + h_{ab}(u)dx^a dx^b. \quad (17.46)$$

问题是，对于完整的非线性爱因斯坦场方程，我们能否找到类似的波动解呢？

回答是，可以！具体来说，下述Brinkmann度规就是一个这样的精确解，描述沿着 $z$ 轴正方向传播的平面引力波，

$$ds^2 = -dudv + dx^a dx^a + H_{ab}(u)x^a x^b du^2. \quad (17.47)$$

人们可以通过直接计算证明，只要 $H_{ab}(u)$ 无迹，则相应的Brinkmann度规就是里奇平坦的，从而是真空爱因斯坦场方程的精确解，

$$R_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow H^a_a(u) = 0. \quad (17.48)$$

换言之，这类精确解也有两个独立的极化模式，为

$$H_{ab}(u) = \begin{bmatrix} H_{11}(u) & H_{12}(u) \\ H_{12}(u) & -H_{11}(u) \end{bmatrix}. \quad (17.49)$$

一般来说，人们很难找到一个非线性偏微分方程的一簇依赖于任意函数(比如这里的 $H_{11}(u)$ 和 $H_{12}(u)$ )的精确解，但是，Brinkmann度规例外。

### 17.3 引力波的产生

前面的小节中讨论了引力波在真空中的传播，然而引力波是如何产生的呢？我们知道加速运动的电荷会辐射出电磁波，类似的，加速运动的质点会辐射出引力波。

想象一个静止的球放在橡皮膜上，橡皮膜会凹陷，但不会产生波动。如果球在橡皮膜上匀速运动，凹陷的形状会移动，但仍然不会产生波动。但，如果球在橡皮膜上加速运动，凹陷的形状就会不断变化，这种变化会以波动的形式向外传播。类似的，物质的存在会引起时空的弯曲(凹陷)，当物质加速运动时，时空的弯曲会发生变化，这种变化以引力波的形式向外传播。

更具体地说，由于线性化爱因斯坦方程(17.21)和电磁矢量势满足的方程类似，都是波动方程，方程的右边就是源，电流矢量是电磁波的源，而能动张量就是引力波的源，所以，引力波和电磁波有很大的类似之处。但是，由于电磁矢量势是一个矢量，相应的源也是矢量，而引力波的 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 是二阶张量，相应的源也是二阶张量，所以引力波的产生和电磁波的产生也有不同之处，这反映在，偶极辐射就能产生电磁波，但是引力波并不来源于偶极辐射，要产生引力波，至少需要四极辐射，稍后我们会清楚地看到这一点。

#### 17.3.1 求解线性化爱因斯坦场方程

我们的出发点是线性化爱因斯坦方程(17.21)，为方便起见重写如下

$$-\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (17.50)$$

我们的基本目标就是求解这个方程。

以上方程可以用标准的格林函数法来求解，具体求解过程与我的《经典场论新讲》第七章对电磁辐射的求解完全类似，这里只概述一下结果。首先，我们定义格林函数 $G(x)$ (其中 $x = (t, \mathbf{x})$ 代表时空坐标 $x^\mu$ )，它满足如下格林方程

$$-\partial^2 G(x) = \delta^4(x). \quad (17.51)$$

利用这个格林函数，即可以把(17.50)式的解写成

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = 16\pi G \int d^4 x' G(x - x') T_{\mu\nu}(x'). \quad (17.52)$$

不难验证, 这个解的确满足de Donder 规范条件, 验证如下

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu}(x) &= 16\pi G \int d^4x' \partial^\mu G(x-x') T_{\mu\nu}(x') \\
 &= -16\pi G \int d^4x' (\partial'^\mu G(x-x')) T_{\mu\nu}(x') \\
 &= 16\pi G \int d^4x' G(x-x') \partial'^\mu T_{\mu\nu}(x') = 0,
 \end{aligned} \tag{17.53}$$

其中第三行我们进行了分部积分, 最后的等号是利用能动量守恒方程。值得注意的是, 虽然这个解满足de Donder 规范条件, 但并不意味着它也满足横向无迹规范, 通常来说, 它不满足。

由于因果性的考虑, 我们应该取 $G(x)$ 为所谓的延迟格林函数, 记作 $G_{\text{ret}}(x)$ , 根据《经典场论新讲》第七章的推导,

$$G_{\text{ret}}(x) = \frac{1}{2\pi} \delta(x^2) \theta(t), \tag{17.54}$$

式中 $x^2 = x_\mu x^\mu$ ,  $\theta(t)$ 为阶跃函数。这个结果在正洛伦兹变换 $SO^+(1,3)$ 下明显保持不变。

取时空坐标 $x = (t, \mathbf{x})$ , 其中三维矢量 $\mathbf{x}$ 为空间坐标, 并取 $r = |\mathbf{x}|$ , 从而 $\delta(x^2) = \delta(t^2 - r^2) = \frac{1}{2r} [\delta(t-r) - \delta(t+r)]$ . 又注意到, 当 $t > 0$ 时,  $\delta(t+r)$ 自动等于零(因为 $r$ 总大于零), 而当 $t < 0$ 时 $\delta(t-r)$ 自动等于零, 从而即可以将上面的(17.54)式写成

$$G_{\text{ret}}(x) = \frac{1}{2\pi} \delta(x^2) \theta(t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t-r). \tag{17.55}$$

将以上结果代入(17.52)式, 即有

$$\begin{aligned}
 \bar{h}_{\mu\nu}(x) &= 16\pi G \int d^4x' G_{\text{ret}}(x-x') T_{\mu\nu}(x') \\
 &= 4G \int d^4x' \frac{\delta(t-t' - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T_{\mu\nu}(x') \\
 &= 4G \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t_{\text{ret}}).
 \end{aligned} \tag{17.56}$$

式中 $t_{\text{ret}} \equiv t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ , 也称作延迟时刻。这个结果的含义是, 空间 $\mathbf{x}$ 点 $t$ 时刻的引力场由 $\mathbf{x}'$ 点的源在更早的延迟时刻 $t_{\text{ret}}$ 决定, 这是因为引力波的传播是需要时间的, 它以有限大小的光速(取为1)传播。当然, 这个结果与我们在电动力学里熟悉的推迟势公式基本是一样的。



如果物质源只分布在一个有限的空间区域内, 设这个区域的尺寸为 $d$ , 并且假设我们感兴趣的是源在距离很远的地方产生的引力场, 即假设 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \gg d$ , 则就可以作如下近似(注意 $r = |\mathbf{x}|$ )

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r} + \dots \Rightarrow \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^3} + \dots \quad (17.57)$$

注意延迟时刻 $t_{\text{ret}}$ 中包含了一个 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ , 从而

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t_{\text{ret}}) = T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - r + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'/r + \dots). \quad (17.58)$$

为了进一步近似展开上述结果, 我们需要假设在引力波从源点 $\mathbf{x}'$ 传播到场点 $\mathbf{x}$ 的时间之内, 作为源的能动张量改变很小, 也即是说, 我们要假设物质源的运动是非相对论的。有了这个假设以后, 就可以进一步将上述能动张量近似展开成

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t_{\text{ret}}) = T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - r) + \dot{T}_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - r) \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r} + \dots \quad (17.59)$$

物质源作非相对论运动的假设意味着 $\dot{T}_{\mu\nu}\mathbf{x}'$ 与相应 $T_{\mu\nu}$ 的比是一个小量, 简称 $\dot{T}_{\mu\nu}$ 是一个小量。

有了(17.57)式和(17.59)式这两个近似以后, 即可以对结果(17.56)进行近似展开了。在小量展开的领头阶(小量包含 $d/r$ 以及 $\dot{T}_{\mu\nu}$ ), 我们有

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \frac{4G}{r} \int d^3\mathbf{x}' T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - r) + \dots \quad (17.60)$$

特别的,

$$\bar{h}_{00}(\mathbf{x}, t) = \frac{4G}{r} E + \dots, \quad \text{其中} \quad E = \int d^3\mathbf{x}' T_{00}(\mathbf{x}', t - r) \quad (17.61)$$

根据能动量守恒,  $E$ 为源的守恒能量, 所以这意味着 $\bar{h}_{00}(\mathbf{x}, t)$ 在小量展开的领头阶是不依赖于时间的, 实际上这个结果就等价于牛顿势 $\Phi = -GE/r$ 。类似的, 也有

$$\bar{h}_{0i}(\mathbf{x}, t) = -\frac{4G}{r} P_i + \dots, \quad \text{其中} \quad P_i = - \int d^3\mathbf{x}' T_{0i}(\mathbf{x}', t - r) \quad (17.62)$$

当然,  $P_i$ 就是物质源的守恒动量, 因此 $\bar{h}_{0i}(\mathbf{x}, t)$ 在领头阶也不随时间变化。通常会选取一个合适的惯性系, 以使得 $P_i = 0$ , 从而让 $\bar{h}_{0i}(\mathbf{x}, t) = 0$ 。

正如我们已经看到的, 在小量展开的领头阶,  $\bar{h}_{00}(\mathbf{x}, t), \bar{h}_{0i}(\mathbf{x}, t)$  均是静态的, 不随时间演化, 因此对于引力波的考察并没有多少意思。有意思的是  $\bar{h}_{ij}(\mathbf{x}, t)$ , 根据(17.60)式, 它应该为

$$\bar{h}_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{4G}{r} \int d^3\mathbf{x}' T_{ij}(\mathbf{x}', t-r) + \dots \quad (17.63)$$

注意现在等式右边的积分并不是一个守恒量, 因此一般来说是依赖于时间的。

**定理:**

$$\int d^3\mathbf{x} T_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \ddot{I}_{ij}(t), \quad (17.64)$$

式中  $I_{ij}(t)$  是能量的四极矩

$$I_{ij}(t) = \int d^3\mathbf{x} T^{00}(\mathbf{x}, t) x_i x_j. \quad (17.65)$$

**证明:** 注意到

$$T^{ij} = \partial_k (T^{ik} x^j) - (\partial_k T^{ik}) x^j = \partial_k (T^{ik} x^j) + (\partial_0 T^{0i}) x^j, \quad (17.66)$$

式中第二个等号是利用了能动量守恒方程  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ 。对于这个结果中的  $T^{0i}$  项, 我们再次利用同样的技巧。具体来说对于对称化的指标  $(ij)$ , 我们有

$$\begin{aligned} T^{0(i} x^{j)} &= \frac{1}{2} \partial_k (T^{0k} x^i x^j) - \frac{1}{2} (\partial_k T^{0k}) x^i x^j \\ &= \frac{1}{2} \partial_k (T^{0k} x^i x^j) + \frac{1}{2} (\partial_0 T^{00}) x^i x^j. \end{aligned} \quad (17.67)$$

将(17.66)式对三维空间积分, 忽略全微分的边界项, 然后再代入(17.67)式, 即有

$$\int d^3\mathbf{x} T^{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \partial_0^2 \int d^3\mathbf{x} T^{00}(\mathbf{x}, t) x^i x^j, \quad (17.68)$$

从而定理得证。

利用上述定理的结论, 就可以把结果(17.63)重写成,

$$\bar{h}_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{2G}{r} \ddot{I}_{ij}(t-r) + \dots \quad (17.69)$$

这个结果告诉我们，只需要晃动能量四极矩不为零的物质源，就可以在远处产生引力波。特别的，这意味着，在领头阶，引力辐射是一种四极辐射，这与电磁辐射不同，后者在领头阶是偶极辐射。

也即是说，不存在偶极的引力辐射。这可以从下面的说明中看得更清楚一些。为此我们定义能量的偶极矩

$$E\mathbf{X} = \int d^3\mathbf{x} T^{00}(\mathbf{x}, t)\mathbf{x}. \quad (17.70)$$

注意到，由于能量守恒  $\dot{E} = 0$ ，所以

$$E\dot{X}^i = \int d^3\mathbf{x} (\partial_0 T^{00})x^i = - \int d^3\mathbf{x} (\partial_j T^{j0})x^i = \int d^3\mathbf{x} T^{i0} = P^i, \quad (17.71)$$

其中倒数第二个等于号是进行了分部积分。但是，动量守恒意味着  $\dot{\mathbf{P}} = 0$ ，从而

$$E\ddot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{P}} = 0. \quad (17.72)$$

这就告诉我们偶极辐射为零。

现在，我们可以利用结果(17.69)进一步推导出  $\bar{h}_{00}$  和  $\bar{h}_{0i}$  的次领头阶贡献。为此我们注意到根据 de Donder 规范条件  $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ ，有

$$\partial_0 \bar{h}_{0i} = \partial_j \bar{h}_{ji}, \quad \partial_0 \bar{h}_{00} = \partial_i \bar{h}_{i0}. \quad (17.73)$$

这两个方程中的第一个给出

$$\partial_0 \bar{h}_{0i} = \partial_j \left( \frac{2G}{r} \ddot{I}_{ij}(t-r) \right) = -\frac{2G\hat{x}_j}{r^2} \ddot{I}_{ij}(t-r) - \frac{2G\hat{x}_j}{r} \ddot{\dot{I}}_{ij}(t-r), \quad (17.74)$$

式中我们利用了  $\partial_j r = x_j/r \equiv \hat{x}_j$ 。

(17.74)式的两项中，哪一项的贡献更大呢？由于我们考虑的是远场，看起来似乎是  $1/r$  项的贡献远比  $1/r^2$  项的贡献为大。但是，这里有一个细节需要小心，即  $1/r$  项比  $1/r^2$  项多一阶时间导数，对于晃动频率为  $\omega$  的源，多一阶时间导数相当于多一个  $\omega \sim 1/\lambda$  因子，这里  $\lambda$  为引力辐射的波长。因此这也即是说，仅在  $(1/\lambda)(1/r) \gg 1/r^2$  时， $1/r$  项的贡献才远超过  $1/r^2$  项的贡献。换言之，仅在如下条件满足时

$$r \gg \lambda, \quad (17.75)$$

$1/r$  项的贡献才远超过  $1/r^2$  项的贡献。这个条件就是所谓的远场区条件，或者说辐射区条件。

因此, 由(17.74)式可知, 在辐射区, 我们有

$$\bar{h}_{0i} = -\frac{2G\hat{x}_j}{r}\ddot{I}_{ij}(t-r) + \dots, \quad (17.76)$$

这里我们已经取了 $P^i = 0$ 的惯性参考系。

重复上述技巧, 即可以进一步决定 $\bar{h}_{00}$ , 结果是, 在辐射区, 它可以近似由下式给出

$$\bar{h}_{00} = \frac{4GE}{r} + \frac{2G\hat{x}_i\hat{x}_j}{r}\ddot{I}_{ij}(t-r) + \dots \quad (17.77)$$

当然, 这些结果也可以通过直接将(17.56)展开到次领头阶来得到, 只不过用de Donder 规范条件来推导这些结果更加快速。

### 17.3.2 示例：双星系统

作为示例, 我们考察一个双星系统。假设两颗星的质量均为 $M$ , 两者间距为 $R$ , 在 $x-y$ 平面内旋转。用牛顿引力很容易算出旋转频率为

$$\omega^2 = \frac{2GM}{R^3}. \quad (17.78)$$

假设把两颗星均当成质点处理, 每一颗星的质量密度当然都是 $\delta$ 函数的乘积, 因此, 在非相对论近似下, 双星系统的能量密度为

$$T^{00} = M\delta(z) \left[ \delta\left(x - \frac{R}{2}\cos\omega t\right)\delta\left(y - \frac{R}{2}\sin\omega t\right) + \delta\left(x + \frac{R}{2}\cos\omega t\right)\delta\left(y + \frac{R}{2}\sin\omega t\right) \right].$$

因此不难算出, 能量四极矩 $I_{ij}(t)$ 为

$$\begin{aligned} I_{ij}(t) &= \frac{MR^2}{2} \begin{bmatrix} \cos^2\omega t & \cos\omega t \sin\omega t & 0 \\ \cos\omega t \sin\omega t & \sin^2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{MR^2}{4} \begin{bmatrix} 1 + \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ \sin 2\omega t & 1 - \cos 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17.79)$$

代入(17.69)式, 即可以算出相应的引力波扰动

$$\bar{h}_{ij} = -\frac{2GMR^2\omega^2}{r} \begin{bmatrix} \cos 2\omega t_r & \sin 2\omega t_r & 0 \\ \sin 2\omega t_r & -\cos 2\omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (17.80)$$

式中  $t_r \equiv t - r$ .

可以看出, 双星系统辐射出来的引力波基本上沿着径向往外传播。但是, 如果我们将注意力集中在  $z$  轴方向, 则上面的结果告诉我们, 和自由空间的平面引力波一样, 这时候相应的引力波为横波, 其极化模式为  $H_+$  模式和  $H_\times$  模式的某种叠加, 实际上, 这是一种圆极化模式。

为了估算辐射出来的引力波到底有多强, 我们代入(17.78)式给出的  $\omega^2$ , 即有

$$|h_{ij}| \sim \frac{G^2 M^2}{Rr}. \quad (17.81)$$

很显然, 双星的质量越大, 离得越近, 则辐射出来的引力波就越强。由于双星不可能是真正的质点, 它们的尺寸最小都是黑洞大小, 因此两者最近的距离当然就是相距一个施瓦西半径  $R \sim R_g = 2GM$ , 这时候

$$|h_{ij}| \sim \frac{GM}{r}. \quad (17.82)$$

一个质量约为几个太阳那么大的黑洞半径约为  $R_g \sim 10\text{km}$ , 假如两个这样的黑洞形成双星系统, 假如这系统距离我们数百万光年, 即  $r \sim 10^{18}\text{km}$ , 则我们会有  $|h_{ij}| \sim 10^{-17}$ 。而假如这系统距离我们为数十亿光年, 则有  $|h_{ij}| \sim 10^{-20}$ 。当然它们都非常非常小, 但是, 正如前面的相应小节中提到过的, 当前的引力波探测器已经有足够的灵敏度, 足以探测到这么微小的引力波扰动。

## 17.4 诺特技巧推导引力波能动张量

考察一个正在发出引力辐射的物质源, 我们想问, 它的辐射功率为多少? 为此, 我们需要取一个很大的两维闭合曲面包围这个物质源(这个两维曲面在源区的外面, 且远离源区), 然后计算单位时间经过这个闭合曲面流出去的引力能为多少。但是, 为了进行这种计算, 我们需要知道线性化引力场的能流密度公式, 或者更一般地, 需要知道线性化引力场的能动张量  $t_{\mu\nu}$ 。本节将表明, 如何可以用诺特技巧导出它。

根据前文, 我们把  $h_{\mu\nu}$  看作平坦时空中的一个二阶张量场(因此, 现在  $h_{\mu\nu}$  不必是小量), 它具有如下 Fierz-Pauli 作用量

$$S_{\text{FP}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} \partial_\rho h_{\mu\nu} \partial^\rho h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\rho h_{\mu\nu} \partial^\nu h^{\rho\mu} + \frac{1}{4} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} \partial_\nu h^{\mu\nu} \partial_\mu h \right].$$

很明显, 这个作用量具有时空平移不变性, 因此原则上当然可以从它出发通过标准的诺特定理得到一个正则能动张量。问题是, 这样得到的正则能动张量往往是不对称的。

好在本书第二章(2.103)式和(2.104)式的下面我们描述了一种通过诺特技巧得到对称能动张量的办法。为此和第二章中的处理一样, 我们取如下无穷小局域洛伦兹变换

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x), \quad \epsilon^\mu(x) = \epsilon^\mu_\nu(x)x^\nu. \quad (17.83)$$

式中 $\epsilon_{\mu\nu}(x)$ 是无穷小的反对称张量。

作为二阶张量场,  $h_{\mu\nu}(x)$ 必定满足如下洛伦兹变换规则

$$h'_{\mu\nu}(x')\Lambda^\mu_\rho(x)\Lambda^\nu_\sigma(x) = h_{\rho\sigma}(x) \Rightarrow h'_{\mu\nu}(x')(\delta^\mu_\rho + \epsilon^\mu_\rho(x))(\delta^\nu_\sigma + \epsilon^\nu_\sigma(x)) = h_{\rho\sigma}(x).$$

注意到 $\epsilon^\mu_\nu(x)$ 为无穷小量, 不难得到

$$h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - (h_{\rho\nu}\epsilon^\rho_\mu + h_{\mu\rho}\epsilon^\rho_\nu). \quad (17.84)$$

换言之, 在无穷小局域洛伦兹变换(17.83)之下,  $h_{\mu\nu}$ 在变换前后的改变量为(注意,  $h_{\mu\nu}$ 不必是小量)

$$\bar{\delta}h_{\mu\nu} \equiv h'_{\mu\nu}(x') - h_{\mu\nu}(x) = -(h_{\rho\nu}\epsilon^\rho_\mu + h_{\mu\rho}\epsilon^\rho_\nu). \quad (17.85)$$

式中我们用加横杠的 $\bar{\delta}$ 以区别于前文出现过的规范变换 $\delta h_{\mu\nu} = -(\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu)$ 。

我们把Fierz-Pauli作用量看作基本场变量 $h_{\mu\nu}$ 的泛函, 而诸如 $h^{\mu\nu}$ 这样的场变量则看成是用 $\eta^{\mu\nu}$ 上升指标的结果, 其余上指标也作类似理解。这样一来, Fierz-Pauli作用量就具有如下形式

$$S_{\text{FP}}[h_{\mu\nu}(x)] = \int_{\mathcal{D}} d^4x \mathcal{L}(h_{\mu\nu}(x), \partial_\rho h_{\mu\nu}(x)), \quad (17.86)$$

式中为了明晰起见, 假定只考察一个特定的时空区域 $\mathcal{D}$ , 也即是说, 作用量的时空积分是在 $\mathcal{D}$ 上积的。

记无穷小局域时空变换(17.83)把时空局域 $\mathcal{D}$ 变到了 $\mathcal{D}'$ , 即

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}', \quad (17.87)$$

当然,  $\mathcal{D}'$ 与 $\mathcal{D}$ 的差别是无穷小的。则, 无穷小局域时空变换(17.83)之后的Fierz-Pauli作用量为

$$\begin{aligned} S_{\text{FP}}[h'_{\mu\nu}(x)] &= \int_{\mathcal{D}'} d^4x \mathcal{L}(h'_{\mu\nu}(x), \partial_\rho h'_{\mu\nu}(x)) \\ &= \int_{\mathcal{D}'} d^4x' \mathcal{L}(h'_{\mu\nu}(x'), \partial'_\rho h'_{\mu\nu}(x')), \end{aligned} \quad (17.88)$$

注意, 现在这个作用量积分是在变换之后的区域 $\mathcal{D}'$ 上积的。

可以对上面的(17.88)式继续进行如下推导

$$\begin{aligned} S_{\text{FP}}[h'_{\mu\nu}(x)] &= \int_{\mathcal{D}'} d^4x' \mathcal{L}(h'_{\mu\nu}(x'), \partial'_\rho h'_{\mu\nu}(x')), \\ &= \int_{\mathcal{D}} d^4x \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) \mathcal{L}(h + \bar{\delta}h, \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho} \partial_\sigma (h + \bar{\delta}h)), \end{aligned} \quad (17.89)$$

式中 $h$ 是 $h_{\mu\nu}$ 的简记符号(下文约定相同, 不要和 $h^\mu_\mu$ 搞混了)。注意到 $\det(\frac{\partial x'}{\partial x}) = 1 + \partial_\mu \epsilon^\mu$ , 以及 $\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\rho} = \delta^\sigma_\rho - \partial_\rho \epsilon^\sigma$ , 代入(17.89)式, 即有

$$\begin{aligned} S_{\text{FP}}[h'_{\mu\nu}(x)] &= \int_{\mathcal{D}} d^4x (1 + \partial_\alpha \epsilon^\alpha) \mathcal{L}(h + \bar{\delta}h, \partial_\rho (h + \bar{\delta}h) - \partial_\rho \epsilon^\sigma \partial_\sigma (h + \bar{\delta}h)) \\ &= \int_{\mathcal{D}} d^4x (1 + \partial_\alpha \epsilon^\alpha) \mathcal{L}(h + \bar{\delta}h, \partial_\rho (h + \bar{\delta}h) - \partial_\rho \epsilon^\sigma \partial_\sigma h) \end{aligned} \quad (17.90)$$

式中我们注意到 $\partial_\rho \epsilon^\sigma \partial_\sigma (\bar{\delta}h)$ 为二阶无穷小量, 从而可以略去。

进一步将(17.90)式展开到一阶小量, 即有

$$\begin{aligned} S_{\text{FP}}[h'_{\mu\nu}(x)] &= \int_{\mathcal{D}} d^4x \mathcal{L}(h, \partial_\rho h) + \int_{\mathcal{D}} d^4x \partial_\mu \epsilon^\mu \mathcal{L}(h, \partial_\rho h) \\ &\quad - \int_{\mathcal{D}} d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho h)} \partial_\sigma h \partial_\rho \epsilon^\sigma + \int_{\mathcal{D}} d^4x \bar{\delta} \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (17.91)$$

式中

$$\bar{\delta} \mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(h + \bar{\delta}h, \partial_\rho (h + \bar{\delta}h)) - \mathcal{L}(h, \partial_\rho h). \quad (17.92)$$

注意到 $\int_{\mathcal{D}} d^4x \mathcal{L}(h, \partial_\rho h) = S_{\text{FP}}[h_{\mu\nu}(x)]$ , 从而立即有变换前后作用量的改变量为

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{FP}} &\equiv S_{\text{FP}}[h'_{\mu\nu}(x)] - S_{\text{FP}}[h_{\mu\nu}(x)] \\ &= \int_{\mathcal{D}} d^4x \partial_\mu \epsilon^\mu \mathcal{L}(h, \partial_\rho h) - \int_{\mathcal{D}} d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho h)} \partial_\sigma h \partial_\rho \epsilon^\sigma + \int_{\mathcal{D}} d^4x \bar{\delta} \mathcal{L}, \\ &= - \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho h_{\mu\nu})} \partial_\sigma h_{\mu\nu} - \delta^\rho_\sigma \mathcal{L} \right] \partial_\rho \epsilon^\sigma + \int_{\mathcal{D}} d^4x \bar{\delta} \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (17.93)$$

很显然, 最后的这两项中, 前一项就是标准的正则能动张量的贡献, 不妨记

$$\theta_{\rho\sigma} \equiv -\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\rho h_{\mu\nu})}\partial_\sigma h_{\mu\nu} - \eta_{\rho\sigma}\mathcal{L}\right]. \quad (17.94)$$

则可以将上述结果简写成

$$\delta S_{\text{FP}} = \int_{\mathcal{D}} d^4x \theta_{\mu\nu} \partial^\mu \epsilon^\nu + \int_{\mathcal{D}} d^4x \bar{\delta}\mathcal{L}. \quad (17.95)$$

后面的 $\bar{\delta}\mathcal{L}$ 项是对正则能动张量 $\theta_{\mu\nu}$ 的修正, 正如本书第二章中根据局域洛伦兹变换证明过的, 这一修正将正好使得最终的能动张量为对称张量。

读者可能觉得, 根据最小作用量原理,  $\bar{\delta}\mathcal{L}$ 的修正项不应该正好等于零吗? 然而情况并非如此。的确, 和最小作用量原理的推导一样, 经过分部积分, 我们有

$$\int_{\mathcal{D}} d^4x \bar{\delta}\mathcal{L} = \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial h} - \partial_\rho \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho h)} \right] \bar{\delta}h + \int_{\mathcal{D}} d^4x \partial_\rho \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho h)} \bar{\delta}h \right] \quad (17.96)$$

等式右边的第一项根据 $h$ 场的运动方程(欧拉-拉格朗日方程)自动等于零, 第二项是一个全微分项, 它在区域边界 $\partial\mathcal{D}$ 上有贡献, 而且和最小作用量原理的情形不同, 现在这个边界贡献非零。这是由于 $\bar{\delta}h$ 中包含的是 $\epsilon^\mu_\nu$ 项, 而我们现在并没有要求它在区域边界 $\partial\mathcal{D}$ 上取零, 相反, 我们将要求 $\epsilon^\mu_\nu$ 的偏导在边界 $\partial\mathcal{D}$ 上取零(即在区域边界上, 所考察的无穷小局域洛伦兹变换趋于一个整体的无穷小洛伦兹变换)。所以, 与最小作用量原理的情形不同, 这里这个全微分项的贡献不是零!

代入前面的(17.85)式, 即可以得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} d^4x \bar{\delta}\mathcal{L} &= \int_{\mathcal{D}} d^4x \partial_\rho \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho h_{\mu\beta})} \bar{\delta}h_{\mu\beta} \right] = -2 \int_{\mathcal{D}} d^4x \partial_\rho \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho h_{\mu\beta})} h_{\nu\beta} \epsilon^\nu_\mu \right] \\ &= -2 \int_{\mathcal{D}} d^4x \partial_\rho \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho h_{\mu\beta})} h_{\nu\beta} \right] \epsilon^\nu_\mu - 2 \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho h_{\mu\beta})} h_{\nu\beta} \right] \partial_\rho \epsilon^\nu_\mu \\ &= 2 \int_{\mathcal{D}} d^4x \partial_\rho \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho h_{\mu\beta})} h^\nu_\beta \right] \epsilon_{\mu\nu} + 2 \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho h_{\mu\beta})} h^\nu_\beta \right] \partial_\rho \epsilon_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (17.97)$$

式中我们适当地升降了指标, 并且利用了 $\epsilon_{\mu\nu}$ 的反对称性来去掉一些负号。不妨记,

$$X^{\rho\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho h_{\mu\beta})} h^\nu_\beta. \quad (17.98)$$



将上面这个结果(17.97)和(17.95)式的结果结合, 即有

$$\delta S_{\text{FP}} = \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ \theta^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu + 2\partial_\rho X^{\rho\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} + 2X^{\rho\mu\nu} \partial_\rho \epsilon_{\mu\nu} \right]. \quad (17.99)$$

将 $X^{\rho\mu\nu}$ 的 $\mu\nu$ 指标反对称化, 并记

$$Y^{\rho\mu\nu} \equiv X^{\rho\mu\nu} - X^{\rho\nu\mu}. \quad (17.100)$$

则不难看出(17.99)又可以写成

$$\delta S_{\text{FP}} = \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ \theta^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\rho Y^{\rho\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} + Y^{\rho\mu\nu} \partial_\rho \epsilon_{\mu\nu} \right]. \quad (17.101)$$

根据第二章的知识, 为了读出对称的能动张量 $t_{\mu\nu}$ , 关键是要把上式凑成如下形式

$$\delta S_{\text{FP}} = \int_{\mathcal{D}} d^4x t^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu. \quad (17.102)$$

结果是, 的确能凑出来, 我先写出答案, 然后我们再验证它的确能倒过来给出原来的(17.101)式(这比直接凑答案容易些)。答案是,

$$\delta S_{\text{FP}} = \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ \theta^{\mu\nu} - \partial_\rho (Y^{\rho\mu\nu} - Y^{\mu\rho\nu} - Y^{\nu\rho\mu}) \right] \partial_\mu \epsilon_\nu. \quad (17.103)$$

为了验证, 我们需要用到 $\epsilon_\nu = \epsilon_{\nu\sigma} x^\sigma$ , 进而 $\partial_\mu \epsilon_\nu = (\partial_\mu \epsilon_{\nu\sigma}) x^\sigma - \epsilon_{\mu\nu}$ , 并注意到 $Y^{\rho\mu\nu}$ 这样的表达式关于后两个指标是反对称的。

为了验证(17.103)式, 显然暂时可以不管 $\theta^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ -\partial_\rho (Y^{\rho\mu\nu} - Y^{\mu\rho\nu} - Y^{\nu\rho\mu}) \right] \partial_\mu \epsilon_\nu \\ &= \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ -\partial_\rho (Y^{\rho\mu\nu} - Y^{\mu\rho\nu} - Y^{\nu\rho\mu}) \right] ((\partial_\mu \epsilon_{\nu\sigma}) x^\sigma - \epsilon_{\mu\nu}) \\ &= \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ \partial_\rho Y^{\rho\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} - \partial_\rho (Y^{\rho\mu\nu} - Y^{\mu\rho\nu} - Y^{\nu\rho\mu}) (\partial_\mu \epsilon_{\nu\sigma}) x^\sigma \right]. \end{aligned} \quad (17.104)$$

这一步我们用到 $Y^{\mu\rho\nu} + Y^{\nu\rho\mu}$ 关于 $\mu\nu$ 是对称的, 而 $\epsilon_{\mu\nu}$ 是反对称的。很显然, (17.101)式中的 $\epsilon_{\mu\nu}$ 项已经得到验证了, 下面我们把注意力放在 $\partial_\rho \epsilon_{\mu\nu}$ 项上。由上面的推导

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ -\partial_\rho (Y^{\rho\mu\nu} - Y^{\mu\rho\nu} - Y^{\nu\rho\mu}) (\partial_\mu \epsilon_{\nu\sigma}) x^\sigma \right] \\ &= \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ (Y^{\rho\mu\nu} - Y^{\mu\rho\nu} - Y^{\nu\rho\mu}) [(\partial_\rho \partial_\mu \epsilon_{\nu\sigma}) x^\sigma + \partial_\mu \epsilon_{\nu\rho}] \right]. \end{aligned} \quad (17.105)$$

这里是进行了分部积分(分部积分的边界项之所以可以忽略,是因为我们假设了 $\epsilon_{\nu\sigma}$ 的偏导在 $\partial\mathcal{D}$ 上取零)。注意到 $(Y^{\rho\mu\nu} - Y^{\mu\rho\nu} - Y^{\nu\rho\mu})$ 关于 $\mu\rho$ 反对称,而 $(\partial_\rho\partial_\mu\epsilon_{\nu\sigma})x^\sigma$ 关于 $\mu\rho$ 对称,立即有

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ (Y^{\rho\mu\nu} - Y^{\mu\rho\nu} - Y^{\nu\rho\mu}) [(\partial_\rho\partial_\mu\epsilon_{\nu\sigma})x^\sigma + \partial_\mu\epsilon_{\nu\rho}] \right] \\ &= \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ (Y^{\rho\mu\nu} - Y^{\mu\rho\nu} - Y^{\nu\rho\mu}) \partial_\mu\epsilon_{\nu\rho} \right] \\ &= \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ (Y^{\rho\mu\nu} - Y^{\mu\rho\nu} + Y^{\nu\rho\mu}) \partial_\mu\epsilon_{\nu\rho} \right] \\ &= \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ (-Y^{\mu\rho\nu}) \partial_\mu\epsilon_{\nu\rho} \right] = \int_{\mathcal{D}} d^4x \left[ Y^{\rho\mu\nu} \partial_\rho\epsilon_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (17.106)$$

正是(17.101)式中的 $\partial_\rho\epsilon_{\mu\nu}$ 项,验证完成!上述过程中我们利用了 $Y^{\rho\mu\nu} + Y^{\nu\mu\rho}$ 关于指标 $\nu\rho$ 对称,而 $\partial_\mu\epsilon_{\nu\rho}$ 关于 $\nu\rho$ 反对称。

从最终的(17.103)式中,可以读出

$$t^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} - \partial_\rho (Y^{\rho\mu\nu} - Y^{\mu\rho\nu} - Y^{\nu\rho\mu}). \quad (17.107)$$

这个结果与Weinberg 量子场论第一卷7.4 节中给出的一般公式是一致的(虽然温伯格并没有讨论张量场),当然推导方法并不相同,我们这里的推导主要是强调诺特技巧。有些时候人们也称这种对称的能动量张量为Belinfante(贝林凡特)张量。不过,和正则能动张量一样,一般来说,这个能动张量并不具有 $\delta h_{\mu\nu} = -(\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu)$ 规范变换之下的规范不变性。

## 17.5 辐射功率

本节我们着重考察引力源的辐射功率,正如前面所说,这需要知道线性化引力场能动张量 $t_{\mu\nu}$ 的具体形式,而且,我们想设法让 $t_{\mu\nu}$ 规范不变,因为这样它才是一个物理量。

### 17.5.1 引力波能动张量的具体形式

但是真正将Fierz-Pauli作用量的表达式代入上面的(17.107)式进行推导计算还是太复杂了!为了简化问题,我们可以进一步取横向无迹规范(TT规范),即取

$$h_{00} = h_{0i} = 0, \quad \partial_i h_{ij} = 0, \quad h_{ii} = 0, \quad (17.108)$$

当然, 这只是前面(17.31)式的另一种写法。因此, 在这个规范中  $h = h^\mu_\mu = 0$ ,  $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$ , 又注意到Fierz-Pauli作用量为

$$S_{\text{FP}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} \partial_\rho h_{\mu\nu} \partial^\rho h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\rho h_{\mu\nu} \partial^\nu h^{\rho\mu} + \frac{1}{4} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} \partial_\nu h^{\mu\nu} \partial_\mu h \right],$$

进而通过合适的分部积分即可知, TT规范下的Fierz-Pauli作用量可以写成

$$S_{\text{FP}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} \partial_\rho h_{\mu\nu} \partial^\rho h^{\mu\nu} \right]. \quad (17.109)$$

当然, 这时候  $h_{\mu\nu}$  场的运动方程就简化为

$$\partial^2 h_{\mu\nu} = 0. \quad (17.110)$$

从(17.109)中可以读出相应的拉格朗日量  $\mathcal{L}$ , 为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} \left[ -\frac{1}{4} \partial_\rho h_{\mu\nu} \partial^\rho h^{\mu\nu} \right]. \quad (17.111)$$

为了具体计算(17.107)式给出的能动张量, 我们先算一下  $X^{\rho\mu\nu}$ , 代入前面的定义, 即可得

$$X^{\rho\mu\nu} = -\frac{1}{32\pi G} (\partial^\rho h^{\mu\beta}) h^\nu_\beta. \quad (17.112)$$

进而即有

$$Y^{\rho\mu\nu} = -\frac{1}{32\pi G} [(\partial^\rho h^{\mu\beta}) h^\nu_\beta - (\partial^\rho h^{\nu\beta}) h^\mu_\beta]. \quad (17.113)$$

利用运动方程, 不难得  $\partial_\rho Y^{\rho\mu\nu} = 0$ , 但是,  $\partial_\rho (Y^{\mu\rho\nu} + Y^{\nu\rho\mu}) \neq 0$ , 具体表达式当然可以直接算出来, 不过, 我们这里就不写这个表达式了, 因为正如后文将表明的, 它对我们本节想得到的最终结果没有贡献。另一方面, 代入前面的一般公式(17.94), 即可以得出  $\theta_{\mu\nu}$ , 为(经过了一些指标升降)

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi G} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \partial_\rho h_{\alpha\beta} \partial^\rho h^{\alpha\beta} \right]. \quad (17.114)$$

由于所考察作用量的特殊性, 这已经是一个对称张量了。综上, 可知

$$t^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial_\rho (Y^{\mu\rho\nu} + Y^{\nu\rho\mu}). \quad (17.115)$$

的确是一个对称张量。这个能动张量是在TT规范下给出的, 它当然不是规范不变的! 然而我们希望让它规范不变, 如此才能作为一个物理量。

为了得到规范不变的能动张量，一种不太严格但是简单的处理办法是这样的。假设所考察的引力波的特征波长为 $\lambda$ ，下面我们考察一个以时空点 $x$ 为中心的典型尺寸为 $a$ 的时空区域 $V$ ， $a \gg \lambda$ 。然后在 $V$ 上对 $t_{\mu\nu}$ 进行某种粗粒化平均，即将 $t_{\mu\nu}$ 在 $V$ 上的多次振荡平均掉，具体来说，我们定义

$$\langle t_{\mu\nu}(x) \rangle \equiv \int_V d^4y W(x-y) t_{\mu\nu}(y), \quad (17.116)$$

其中权函数 $W$ 在 $V$ 上光滑变化，满足 $\int_V d^4y W(x-y) = 1$ ，以及在区域的边界 $\partial V$ 上 $W = 0$ 。这种粗粒化意味着，对于一个全微分 $\partial X$ ，其平均将有 $\langle \partial X \rangle \sim 1/a$ ，由于相对来说 $a$ 很大( $a \gg \lambda$ )，因此 $1/a$ 可以忽略，所以在相差 $1/a$ 量级的意义上，我们有

$$\langle \partial X \rangle = 0. \quad (17.117)$$

由此进一步，我们有如下分部积分关系(在相差 $1/a$ 量级的意义上，以后不再说明)

$$\langle X \partial Y \rangle = -\langle (\partial X) Y \rangle. \quad (17.118)$$

利用上面的关系，立即有

$$\langle \partial_\rho (Y^{\mu\rho\nu} + Y^{\nu\rho\mu}) \rangle = 0, \quad (17.119)$$

因为它平均的是一个全微分。类似的，也有

$$\langle \partial_\rho h_{\alpha\beta} \partial^\rho h^{\alpha\beta} \rangle = -\langle (\partial^2 h_{\alpha\beta}) h^{\alpha\beta} \rangle = 0, \quad (17.120)$$

其中最后的等于零是利用了 $h_{\mu\nu}$ 的运动方程。综合这些结果，以及前面给出的能动张量表达式(17.115)，立即有

$$\langle t_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\rho\sigma} \partial_\nu h^{\rho\sigma} \rangle. \quad (17.121)$$

不难验证，平均以后的能动张量依然满足守恒方程，验证如下

$$\partial^\mu \langle t_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{32\pi G} \left[ \langle \partial^2 h_{\rho\sigma} \partial_\nu h^{\rho\sigma} \rangle + \frac{1}{2} \langle \partial_\nu (\partial_\mu h_{\rho\sigma} \partial^\mu h^{\rho\sigma}) \rangle \right] = 0, \quad (17.122)$$

等式右边第一项等于零是由于运动方程，而第二项等于零是因为平均的是一个全微分。

不仅如此, 平均以后的能动张量(17.121)还是规范不变的! 为此, 我们考察规范变换 $\delta h_{\mu\nu} = -(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu)$ , 在此变换之下

$$\begin{aligned}\delta\langle t_{\mu\nu} \rangle &= \frac{1}{32\pi G} \left[ \langle \partial_\mu \delta h_{\rho\sigma} \partial_\nu h^{\rho\sigma} \rangle + \langle \partial_\mu h_{\rho\sigma} \partial_\nu \delta h^{\rho\sigma} \rangle \right] \\ &= -\frac{1}{32\pi G} \left[ \langle \partial_\mu (\partial_\rho \epsilon_\sigma + \partial_\sigma \epsilon_\rho) \partial_\nu h^{\rho\sigma} \rangle + \langle \partial_\mu h_{\rho\sigma} \partial_\nu (\partial^\rho \epsilon^\sigma + \partial^\sigma \epsilon^\rho) \rangle \right].\end{aligned}$$

通过分部积分并利用de Bonder 规范条件 $\partial^\rho h_{\rho\sigma} = 0$ , 可以看出最后这些项都等于零, 因此最后的结果等于零, 即

$$\delta\langle t_{\mu\nu} \rangle = 0. \quad (17.123)$$

所以, 平均以后的能动张量(17.121)才是我们最终要找的物理量。

### 17.5.2 再谈TT规范

对于无源区的一个波矢量为 $\mathbf{k}$ 的平面引力波解 $\bar{h}_{\mu\nu}$ , 假设它已经满足de Donder 规范, 但是不满足TT规范, 如何才能得到一个相应的TT规范下的解呢?

为此我们注意到波的传播方向为 $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ ,  $\mathbf{n}$ 为单位矢量, TT规范当然要满足 $n^i h_{ij} = 0$ 。所以我们引入

$$P_{ij}(\mathbf{n}) \equiv \delta_{ij} - n_i n_j, \quad (17.124)$$

显然, 这是一个对称横向张量, 满足 $n^i P_{ij} = 0$ , 且很明显其迹为2,  $P_{ii} = 2$ 。并且, 不难看出 $P_{ij}$ 是一个投影算符, 即满足

$$P_{ik} P_{kj} = P_{ij}. \quad (17.125)$$

进一步, 我们构建如下张量

$$\Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) = P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl}, \quad (17.126)$$

显然, 它关于指标对 $(ij)$ 和 $(kl)$ 是对称的。不难验证, 它也是投影算符, 满足

$$\Lambda_{ij,kl} \Lambda_{kl,mn} = \Lambda_{ij,mn}. \quad (17.127)$$

并且，它的所有指标均是横向的，即有 $n^i \Lambda_{ij,kl} = 0, n^j \Lambda_{ij,kl} = 0$ 等等。且它的 $(ij)$ 和 $(kl)$ 指标对均是无迹的，即

$$\Lambda_{ii,kl} = \Lambda_{ij,kk} = 0. \quad (17.128)$$

得到TT规范下的解的办法很简单，就是利用 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 的空间分量 $\bar{h}_{ij}$ ,

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \Lambda_{ij,kl} \bar{h}_{kl}, \quad (17.129)$$

式中，为了以示区分，我们用上标TT来明确标示TT规范下的解。更一般的，对于任何对称张量 $S_{ij}$ ，均可以定义其横向无迹部分为

$$S_{ij}^{\text{TT}} = \Lambda_{ij,kl} S_{kl}. \quad (17.130)$$

现在，我们可以将上一小节得到的 $\langle t_{\mu\nu} \rangle$ 公式(17.121)重记为(注意 $h_{0\mu}^{\text{TT}} = 0$ )

$$\langle t_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{ij}^{\text{TT}} \partial_\nu h_{ij}^{\text{TT}} \rangle. \quad (17.131)$$

特别的，能量密度 $\langle t^{00} \rangle$ 为

$$\langle t^{00} \rangle = \frac{1}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \rangle. \quad (17.132)$$

能流密度 $\langle t^{0k} \rangle$ 为(负号来源于0指标的升降)

$$\langle t^{0k} \rangle = -\frac{1}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \partial_k h_{ij}^{\text{TT}} \rangle. \quad (17.133)$$

有时候需要将涉及单位矢量 $\mathbf{n}$ 的一些量在单位球面上平均，这里收集一些结果

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad (17.134)$$

式中 $d\Omega$ 为球面上的立体角。类似的，也有

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j n_k n_l = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (17.135)$$

而且类似的恒等式还可以推广到任意多个 $n$ 乘积的平均，结果是：对于奇数个 $n$ 的乘积，由于被积函数在空间反演下为奇宇称，所以在球面上积分的结果等于零。而对于偶数个 $n$ 的乘积，注意到 $n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{2l}}$ 是全对称的，所

以其平均的最终结果也只能依赖于克隆内克符号的全对称乘积，需要确定的是这个结果前面的整体常数因子，这可以通过把所有指标成对地收缩掉来确定，最终结果是

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{2l}} = \frac{1}{(2l+1)!!} (\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \dots \delta_{i_{2l-1} i_{2l}} + \dots). \quad (17.136)$$

根据定义式(17.126),  $\Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n})$  也可以展开成如下形式

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) = & \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} - n_j n_l \delta_{ik} - n_i n_k \delta_{jl} \\ & + \frac{1}{2} n_k n_l \delta_{ij} + \frac{1}{2} n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2} n_i n_j n_k n_l. \end{aligned} \quad (17.137)$$

进一步运用上一段的结果，即可以得到

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} \Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) = \frac{1}{30} (11\delta_{ik} \delta_{jl} - 4\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (17.138)$$

### 17.5.3 辐射功率

有了以上这些准备，现在即可以计算一个有限尺寸引力源辐射引力波的功率了。为此，我们需要以这个源为中心，在离源很远的地方取一个大的球面  $S^2$  包围这个源(假设这个球面的半径为  $r = |\mathbf{x}|$ )，然后计算单位时间从这个球面流出去的能流，换言之，辐射功率  $\mathcal{P}$  为

$$\mathcal{P} = \int_{S^2} dA n_i \langle t^{0i} \rangle = \int_{S^2} dA \langle t^{0r} \rangle, \quad (17.139)$$

式中  $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$  为径向的单位矢量， $dA = r^2 d\Omega$  为球面的面积元。

根据上一小节，我们知道

$$\langle t^{0r} \rangle = -\frac{1}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{\text{TT}} \rangle. \quad (17.140)$$

另一方面，根据引力波的产生那一节中的公式(17.69)可知， $h_{ij}^{\text{TT}}$  必定具有如下形式

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, r) = \frac{1}{r} f_{ij}(t - r). \quad (17.141)$$

因此，立即有

$$\frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{\text{TT}} = -\frac{1}{r^2} f_{ij}(t - r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f_{ij}(t - r). \quad (17.142)$$

而很显然  $\frac{\partial}{\partial r} f_{ij}(t-r) = -\frac{\partial}{\partial t} f_{ij}(t-r)$ , 所以

$$\frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{\text{TT}} = -\dot{h}_{ij}^{\text{TT}} + O(1/r^2). \quad (17.143)$$

由于我们考察的球面离源非常远, 所以相比来说, 后面的  $O(1/r^2)$  项可以忽略。进一步结合(17.140)式, 即有

$$\langle t^{0r} \rangle = \frac{1}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \rangle = \langle t^{00} \rangle. \quad (17.144)$$

所以, 引力源的辐射功率为

$$\mathcal{P} = \frac{r^2}{32\pi G} \int_{S^2} d\Omega \langle \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \dot{h}_{ij}^{\text{TT}} \rangle. \quad (17.145)$$

为了得到  $h_{ij}^{\text{TT}}$  的表达式, 下面我们要引用引力波的产生那一节中的公式(17.69)了, 不妨将之重写在下面

$$\bar{h}_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{2G}{r} \ddot{I}_{ij}(t-r). \quad (17.146)$$

张量  $I_{ij}$  可以分解成无迹部分和迹部分的和,

$$I_{ij} = \left( I_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} I_{kk} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} I_{kk}. \quad (17.147)$$

式中  $I_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} I_{kk}$  就是无迹部分, 常常记作  $Q_{ij}$ , 根据  $I_{ij}$  的定义, 显然有

$$Q_{ij}(t) = I_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} I_{kk} = \int d^3\mathbf{x} T^{00}(t, \mathbf{x}) \left( x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right). \quad (17.148)$$

为了得到引力辐射的  $h_{ij}^{\text{TT}}$ , 我们只需要沿着引力波传播的径向( $\mathbf{n}$ 方向)对(17.146)作一个横向无迹投影, 注意横向无迹投影的作用之下,  $I_{ij}$  的迹部分可以丢弃, 因此有

$$h_{ij}^{\text{TT}}(\mathbf{x}, t) = \frac{2G}{r} \Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) \ddot{Q}_{kl}(t-r). \quad (17.149)$$

代入辐射功率的(17.145)式, 并利用投影算符的性质, 不难有

$$\mathcal{P} = \frac{G}{8\pi} \int_{S^2} d\Omega \Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{kl} \rangle. \quad (17.150)$$

注意到  $\ddot{I}_{ij}$  仅仅是  $t-r$  的函数, 因此  $\ddot{Q}_{ij}$  也仅仅是  $t-r$  的函数, 与方向  $\mathbf{n}$  无关。所以, 上述球面积分其实仅仅只需对  $\Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n})$  进行, 利用前面的(17.138)式, 并注意到  $Q_{ij}$  是无迹的, 不难得到

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle. \quad (17.151)$$

这就是四极近似下引力源辐射功率的最终表达式。



### 17.5.4 估算辐射功率的量级

下面我们来对辐射功率进行一个快速的估算。还是假设一个双星系统，两星的质量均为 $M$ ，间距为 $R$ ，则根据牛顿引力，它们相互旋转的频率 $\omega$ 为

$$\omega^2 R \sim \frac{GM}{R^2}. \quad (17.152)$$

能量四极矩 $Q \sim MR^2$ ，因此 $\ddot{Q} \sim \omega^3 MR^2$ ，由此即可得此双星系统的辐射功率约为

$$\mathcal{P} \sim G\ddot{Q}^2 \sim \frac{G^4 M^5}{R^5}. \quad (17.153)$$

为了估算出量级，我们需要恢复光速 $c$ ，注意到施瓦西半径为 $R_g = 2GM/c^2$ ，牛顿引力常数的量纲为 $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$ ，从而即知， $c^5/G$ 为功率的量纲(即能量除以时间的量纲)。不妨定义如下普朗克亮度

$$L_{\text{Plank}} \equiv \frac{c^5}{G} \approx 3.6 \times 10^{52} \text{ J/s}. \quad (17.154)$$

进而即可以把上面的(17.153)式恢复为

$$\mathcal{P} \sim \left(\frac{R_g}{R}\right)^5 L_{\text{Plank}}. \quad (17.155)$$

普朗克亮度到底是一个多大的功率呢？这么说吧，太阳发光的功率为 $L_{\odot} \approx 10^{-26} L_{\text{Plank}}$ ，一个星系大约有 $10^{11}$ 颗横星，其总亮度为 $L_{\text{galaxy}} \approx 10^{-15} L_{\text{Plank}}$ ，可观测宇宙中大约有 $10^{10}$ 个星系，因此宇宙中所有恒星的总亮度大约为 $10^{-5} L_{\text{Plank}}$ 。

但是，当两个黑洞相互旋转着彼此靠近，当它们之间的距离小到差不多等于施瓦西半径时，上面的公式(17.155)告诉我们，它们辐射引力波的功率可以达到一个 $L_{\text{Plank}}$ ！也就是说，这时候这两个黑洞辐射引力波的功率超过整个可观测宇宙所有恒星发光的总功率。

那么，行星绕日运动也是一个双星系统，也会辐射引力波，这个辐射功率大约为多少呢？当然，由于这时候我们考察的两个星星质量不等， $M_1 \gg M_2$ ，所以这时候公式(17.153)应该修正为

$$\mathcal{P} \sim \frac{G^4 M_1^3 M_2^2}{R^5}. \quad (17.156)$$

以木星绕日为例, 木星的质量约为 $10^{-3}M_{\odot}$ , 距离太阳约为 $10^9\text{km}$ , 太阳的施瓦西半径约为 $3\text{km}$ , 可以根据上面公式估算出木星绕日辐射引力波的功率, 约为

$$\mathcal{P} \sim 10^{-50}L_{\text{Plank}} \approx 10^{-24}L_{\odot}. \quad (17.157)$$

显然, 这是一个小到可以忽略的功率。之所以和前面黑洞结合过程辐射功率差这么多, 是因为引力辐射的功率反比于距离5次方, 因此它随着距离的增加下降得非常快。

## 17.6 参考文献

关于引力波, 本章当然只是一个导引, 更多的专门内容可以参见Michele Maggiore所著的两卷本:

Gravitational Waves, Volume 1 Theory and Experiments

Gravitational Waves, Volume 2 Astrophysics and Cosmology

非常好的两本书, 强烈推荐给想进一步了解或者深入研究相关内容的读者。