关于未来的一些随想
&若干数学定理欣赏

陈童

1　关于未来的一些随想

超级智能

超级智能一旦实现，它应该像月球，归整个人类共有，而不是被某个国家或者某一些人独占。而且，人类和超级智能的关系也许也应该有点像地球和月球的关系。我们不能把整个月球都拉到地面上来，因为那对地球反而是一种极大的伤害，但是，月亮要受地球约束，在黑夜里，月亮会照耀着地球的前进。同样，现实人类社会的运转也许也无法承受整个超级智能的力量，但是，超级智能受人类约束，而且它可以给我们一些指引。

慎重

探索智能的科学原理可能是我们这个时代最伟大最激动人心的事业。但是，将多大强度的人工智能投入现实社会的运转才合适则是另一个需要慎重的困难问题。

中国的更高追求

经过几代人的努力，中国应该算是强大起来了，下面我们应该向更高的目标进发，就是更多地为整个人类文明添砖加瓦，赢得世界的尊重。当然，我们也尊重别人，并且，不称霸。

2　若干数学定理欣赏

本节是要欣赏几个美妙的数学定理，尤其是其证明过程。值得说明的是，下面给出的这些证明都是从DeepSeek R1的回答中复制的。对我来说，这至少意味着两件事情：第一，DeepSeek R1是辅助学生学习的利器。第二，有了R1的辅助，以后数学家编写数学教材或讲义将大为轻松。但是，R1用在物理讲义编写上好像还差不少，虽然也有一些帮处。

2.1 代数基本定理的证明

本节是要欣赏代数基本定理的证明，但由于将要给出的这个证明需要用到复分析里的刘维尔定理，所以我们先从回顾刘维尔定理开始。

刘维尔定理指出：若在整个复平面全纯的函数$f(z)$同时在复平面上有界，则$f(z)$必为常数。以下是详细证明过程：

步骤1：设定条件 设$f(z)$为在整个复平面上全纯的函数，且存在正数M使得对所有$z \in \mathbb{C}$，有$|f(z)| \leq M$。

步骤2：应用柯西积分公式 对任意$a \in \mathbb{C}$，考虑以a为中心、半径为R的圆周C_R。根据柯西积分公式，$f(z)$在a 处的一阶导数为：

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz$$

步骤3：估计积分模长 利用积分不等式，有：

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \left| \frac{f(z)}{(z-a)^2} \right| |dz|$$

在C_R上，$|z-a| = R$，故：

$$\left| \frac{f(z)}{(z-a)^2} \right| \leq \frac{M}{R^2}$$

积分路径长度为$2\pi R$，因此：

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R}$$

步骤4：取极限$R \to \infty$ 当$R \to \infty$时，$\frac{M}{R} \to 0$，故：

$$|f'(a)| \leq 0 \implies f'(a) = 0$$

由于a是任意的，故$f'(z) \equiv 0$在$\mathbb{C}$上成立。

步骤5：导出结论 导数恒为零意味着$f(z)$为常数函数。因此，刘维尔定理得证。

代数基本定理及其证明

下面给出**代数基本定理**及其详细证明过程。

定理内容： 每个次数$n \geq 1$ 的复系数多项式

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

在复数域$\mathbb{C}$ 中至少有一个根，即存在$z_0 \in \mathbb{C}$ 使得$P(z_0) = 0$。

证明思路： 利用前面的**刘维尔定理**和多项式在无穷远处的行为，通过反证法证明。

—

证明过程

步骤1：反证法假设 假设多项式$P(z)$ 在复平面上没有根，即对任意$z \in \mathbb{C}$，均有$P(z) \neq 0$。此时，函数

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

在整个复平面$\mathbb{C}$ 上全纯（解析）。

步骤2：分析$|P(z)|$ 在无穷远处的行为 将多项式展开为：

$$P(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right).$$

当$|z| \to \infty$ 时，括号内的部分趋近于1。具体地，存在$R > 0$，使得当$|z| \geq R$ 时，

$$\left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right| \geq \frac{1}{2}.$$

因此，当$|z| \geq R$ 时，

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n \cdot \frac{1}{2}.$$

由于$|z|^n \to \infty$，故$|P(z)| \to \infty$，从而

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq \frac{2}{|a_n||z|^n} \to 0 \quad (|z| \to \infty).$$

步骤3：证明$f(z)$ 在$\mathbb{C}$上有界 - 当$|z| \geq R$ 时，$|f(z)| \leq \frac{2}{|a_n|R^n}$（因$|z| \geq R$ 时$|f(z)|$ 随$|z|$ 增大而递减）。- 当$|z| \leq R$ 时，$|f(z)|$ 在紧集$\{z \mid |z| \leq R\}$ 上连续，因此有最大值M。综上，$|f(z)|$ 在整个复平面上有界。

步骤4：应用刘维尔定理 根据刘维尔定理，**复平面上的有界全纯函数必为常数**。因此，$f(z)$ 是常数函数，即

$$f(z) = \frac{1}{P(z)} = C \quad (\text{常数}).$$

这意味着$P(z)=\frac{1}{C}$，即$P(z)$ 是常数多项式，与$P(z)$ 的次数$n\geq 1$矛盾。

步骤5：结论 反证假设不成立，故$P(z)$ 在$\mathbb{C}$ 中至少存在一个根。

—

补充说明

1. **刘维尔定理的关键性**：该定理通过全局性质（有界性）约束了全纯函数的行为。此处通过多项式在无穷远处的增长性，迫使$1/P(z)$ 成为常数，导出矛盾。

2. **多项式根的个数**：进一步可证明，n 次多项式在$\mathbb{C}$ 上恰好有n 个根（计入重数），这可通过因式分解$P(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$得到。

3. **历史背景**：高斯在1799年首次严格证明了代数基本定理，其原始证明依赖复平面的几何性质，后经多数学家（如柯西、魏尔斯特拉斯）简化，最终形成基于分析的经典证明。

—

总结：代数基本定理的证明展示了复分析与多项式性质的深刻联系，其核心在于通过分析无穷远处的行为，结合刘维尔定理，否定非平凡多项式的无根性。这一简洁而深刻的论证，成为连接代数与分析的典范。

2.2 康托尔定理

定理：实数区间$[0,1]$ 是不可数的，即不存在从自然数集$\mathbb{N}$ 到$[0,1]$ 的双射。

证明过程（康托尔的对角线论证）：

1. **反证法假设** 假设$[0,1]$ 是可数的，即存在一个序列$\{r_1,r_2,r_3,\ldots\}$ 包含该区间内的所有实数。

2. **十进制展开表示** 将每个实数r_n 表示为无限十进制小数：

$$\begin{gathered}r_1=0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots\\ r_2=0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots\\ r_3=0.a_{31}a_{32}a_{33}\ldots\\ \vdots\end{gathered}$$

其中$a_{ij}\in\{0,1,2,\ldots,9\}$。为避免表示不唯一（如$0.1999\ldots=0.2000\ldots$），约定所有数均采用无限展开形式（不终止于全9）。

3. **构造对角线元素外的数** 定义一个新的实数$s = 0.b_1b_2b_3\ldots$，其中每一位b_i 满足：

$$b_i = \begin{cases} 5 & \text{如果}a_{ii} \neq 5, \\ 6 & \text{如果}a_{ii} = 5. \end{cases}$$

这样确保$b_i \neq a_{ii}$ 且s 不包含0或9，避免表示歧义。

4. **导出矛盾** - $s \in [0, 1]$，因为所有b_i均为5或6。- 对任意$n \in \mathbb{N}$，s 的第n位$b_n \neq a_{nn}$，故$s \neq r_n$。因此，s 不在原序列$\{r_n\}$中，与假设该序列包含所有$[0, 1]$ 内的实数矛盾。

5. **结论** 原假设错误，故$[0, 1]$ 不可数，进而实数集$\mathbb{R}$ 也不可数。

这个定理和证明为什么精彩？

康托尔的证明仅用初等构造便揭示了无穷的深刻层次：实数比自然数“多得多”。对角线法的思想影响深远，为哥德尔不完备定理、图灵停机问题等提供了方法论原型。这一简洁的论证颠覆了人们对“无限”的直觉认知，展现了数学的严谨与优美。康托尔的对角线论证不仅是技术工具，更是一场关于数学本质的革命。它诞生于19世纪末的数学危机，最终重塑了人类对“无限”的理解，并成为连接数学、逻辑与计算的桥梁。正如希尔伯特所言：“没有人能将我们驱逐出康托尔创造的乐园。”