辛流形路径积分与几何量子化

陈童

类比于标准量子力学教科书里的相空间路径积分公式，一般性地考察了辛流形上的路径积分，并且发现了它和几何量子化的联系。

这实际上是我的一项研究，只不过工作做完以后发现核心结论似乎文献中已经有了，所以就不打算写成论文发表了，但是，考虑到我的处理方式依然是有新意的，所以决定还是写出来。

1 回顾辛流形上的路径积分

以单自由度量子系统为例，记其相空间为$\mathcal{M}_1$, 相空间坐标为$\{q,p\}$，q为正则坐标，p为正则动量。记$H(q,p)$为系统哈密顿量，相应的哈密顿算符记为$\widehat{H}$，它作用在物理的希尔伯特空间$\mathcal{H}$上。则根据量子力学路径积分公式的标准推导，我们有

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}T}) = \int \mathcal{D}q(t)\mathcal{D}p(t) \exp\Big(\frac{i}{\hbar}\big[\oint pdq - \oint_T H(q,p)dt\big]\Big), \tag{1}$$

式中T为系统的演化时间。式中的积分测度$\mathcal{D}q(t)\mathcal{D}p(t)$需要多说两句，作为路径积分，它当然是对所有满足限制的相空间路径进行积分，而由于求迹导致积分初末位置的等同，所以这些相空间路径应该是以T为时间周期的闭合回路，积分测度$\mathcal{D}q(t)\mathcal{D}p(t)$是对所有这样的闭合回路进行积分。

众所周知的，经典力学的相空间是一个辛流形。在式(1)中，pdq是相空间$\mathcal{M}_1$上的1形式，不妨记作$\Theta = pdq$, 称作辛势。Θ的外微分就是辛形式ω,

$$\omega = d\Theta = dp \wedge dq. \tag{2}$$

ω当然是一个闭形式，$d\omega = 0$。所以(1)式也可以写作

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}T}) = \int \mathcal{D}q(t)\mathcal{D}p(t) \exp\Big(\frac{i}{\hbar}\big[\oint \Theta - \oint_T H(q,p)dt\big]\Big). \tag{3}$$

推广到任意的$2n$维辛流形$\mathcal{M}$，这时候不一定存在整体的共轭变量$\{q,p\}$，所以我们一般性地把$\mathcal{M}$的点记作x，相应的局部坐标记作$x^a, a = 1,2,..,2n$。辛流形上依然存在闭合的辛形式ω, 在局部坐标中，它可以写作

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{ab}dx^a \wedge dx^b, \tag{4}$$

式中ω_{ab}为反对称张量，并且我们**使用了求和约定(以后不再说明)**。当然，这里的ω_{ab}作为反对称矩阵要求可逆，记其逆矩阵为ω^{ab}，即满足

$$\omega_{ab}\omega^{bc} = \delta_a^c, \quad \omega^{ab}\omega_{bc} = \delta_c^a. \tag{5}$$

由于$d\omega = 0$，所以在一个局部坐标中将依然有

$$\omega = d\Theta, \tag{6}$$

式中的辛势Θ可以写作

$$\Theta = \Theta_a dx^a. \tag{7}$$

显然，$\omega_{ab} = \partial_a\Theta_b - \partial_b\Theta_a$。(6)式也告诉我们，从局部坐标$x$换到局部坐标$x'$，辛势可以相差一个规范变换

$$\Theta \to \Theta' = \Theta + dF, \tag{8}$$

式中$F(x)$为$\mathcal{M}$上的任意函数, 在经典力学的教科书中$F(x)$也称作正则变换的生成函数。

哈密顿量为辛流形$\mathcal{M}$上的能量函数，不妨记作$H(x)$, 相应的量子化以后的哈密顿算符依然记作$\widehat{H}$, 相应的物理希尔伯特空间依然记作$\mathcal{H}$。则(3)式可以推广到任意的辛流形，成为

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}T}) = \int \mathcal{D}x(t) \exp\Big(\frac{i}{\hbar}\big[\oint \Theta - \oint_T H(x)dt\big]\Big). \tag{9}$$

同样，这里依然是对所有$\mathcal{M}$中的闭合回路进行积分。

值得注意的是，虽然辛势Θ只在局部坐标中有定义，但是由于在规范变换(8)下，有$\oint \Theta' = \oint(\Theta + dF) = \oint \Theta$, 另外，又由于泛函积分测度$\mathcal{D}x(t)$不依赖于局部坐标的具体选择，所以整个路径积分(9)并不依赖于$\mathcal{M}$的局部坐标。

物理中的哈密顿量是有特殊含义的，因为它要生成物理的时间演化。但是在数学上，辛流形$\mathcal{M}$上的任何一个实函数$H(x)$均可以作为“哈密顿量”，只不过它生成的时间演化不一定是物理的时间。所以(9)式对任意$H(x)$均成立，只需注意到这时候t和T可能均不是物理的时间[1]。

[1]为了以示区分，我们也可以记相应的“时间”为s，并把$H(x)$重记为$G(x)$, 记$G(x)$量子化以后对应的“哈密顿算符”为$\widehat{G}$。则类似于(9), 我们有

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\widehat{G}}) = \int \mathcal{D}x(s) \exp\Big(\frac{i}{\hbar}\big[\oint \Theta - \oint_\theta G(x)ds\big]\Big). \tag{10}$$

当然, 现在“时间”s的周期为θ。

Dirac量子化条件

值得注意的是，路径积分(9)并非对任意辛流形均有定义。它要求辛形式ω满足如下量子化条件

$$\int_\Sigma \omega = 2\pi\mathbb{Z}\hbar. \tag{11}$$

式中Σ为辛流形$\mathcal{M}$的任意两维闭合子流形。

为了看清楚这一点，假设$\mathcal{M}$的2阶同调群$H_2(\mathcal{M},\mathbb{Z})$非零，考察$H_2(\mathcal{M},\mathbb{Z})$中的任意一个闭合的2-循环(2-cycle)$\Sigma$。在$\Sigma$上挖去一个圆盘$D$, 剩下的部分记作$\Sigma-D$。取闭合回路$C$为$\Sigma-D$的边，即$C=\partial(\Sigma-D)$, 当然也有$C=\partial(\overline{D})$，这里$\overline{D}$是将$D$的定向进行反转的结果。

下面考虑路径积分(9)中的相因子$\exp\big[\frac{i}{\hbar}\oint_C\Theta\big]$, 路径积分的单值性要求

$$\exp\big[\frac{i}{\hbar}\oint_C\Theta\big] = \exp\big[\frac{i}{\hbar}\int_{\Sigma-D}\omega\big] = \exp\big[\frac{i}{\hbar}\int_{\overline{D}}\omega\big]. \tag{12}$$

进而即有

$$1 = \exp\big[\frac{i}{\hbar}\int_{\Sigma-D}\omega - \frac{i}{\hbar}\int_{\overline{D}}\omega\big] = \exp\big[\frac{i}{\hbar}\int_{\Sigma-D}\omega + \frac{i}{\hbar}\int_{D}\omega\big] = \exp\big[\frac{i}{\hbar}\int_{\Sigma}\omega\big].$$

从而必然有如下Dirac量子化关系

$$\int_\Sigma \omega = 2\pi\mathbb{Z}\hbar. \tag{13}$$

换言之，路径积分(9)要能定义良好的话，就要求$f=-\frac{i}{\hbar}\omega$可以看作是$\mathcal{M}$上一个复线丛$L\to\mathcal{M}$的曲率2-形式。由于$\omega=d\Theta$，因此$-\frac{i}{\hbar}\Theta$就是相应的联络1-形式。在几何量子化的文献中，$L\to\mathcal{M}$ 被称之为预量子线丛。

2 辛流形路径积分与极化

在通常的量子力学中，我们不仅能定义$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(e^{-i\widehat{H}T/\hbar})$, 而且能定义矩阵元$\langle\phi|e^{-i\widehat{H}T/\hbar}|\psi\rangle$, 式中$|\psi\rangle,|\phi\rangle$为希尔伯特空间$\mathcal{H}$中的两个量子态。分别记$|\psi\rangle$态和$|\phi\rangle$态的波函数为$\psi(q)$和$\phi(q)$, 式中$q=\{q^s\},s=1,2,...,n$为系统位形空间的广义坐标。路径积分的标准公式告诉我们

$$\langle\phi|e^{-i\widehat{H}T/\hbar}|\psi\rangle = \int dq_f\int dq_i\int[\mathcal{D}q(t)\mathcal{D}p(t)]_{q_i,t=0}^{q_f,t=T}e^{iS/\hbar}\overline{\phi}(q_f)\psi(q_i), \tag{14}$$

式中S为相空间作用量，它由下式给出

$$S = \int_0^T dt[p_s \dot{q}^s - H(q,p)]. \tag{15}$$

(14)式中的泛函积分测度$[\mathcal{D}q(t)\mathcal{D}p(t)]_{q_i,t=0}^{q_f,t=T}$是表示对所有连接$q_i$和$q_f$的相空间路径进行积分，注意，这个积分中对于$t=0$和$t=T$时刻的所有$p$坐标都要进行积分，没有任何限制，另外，式中的$dq$表示系统位形空间的体积形式。

下面，我们把(14)式中对q_i和q_f的积分吸收进泛函积分测度中，并考虑进行一个相空间坐标变换，这个坐标变换将会把初始点q_i的坐标变为一般性的$x(0)=\{x^a(0)\}, a=1,2,...,2n,$ 类似的会把末尾点q_f的坐标变为一般性的$x(T)=\{x^a(T)\}$。进而(14)式可以被重写为

$$\langle\phi|e^{-i\widehat{H}T/\hbar}|\psi\rangle = \int \mathcal{D}x(t)\exp\Big(\frac{i}{\hbar}[\int_{x(0)}^{x(T)}\Theta - \int_0^T dtH(x)]\Big)\overline{\phi}(x(T))\psi(x(0)). \tag{16}$$

式中泛函积分测度$\mathcal{D}x(t)$ 表示对所有$t=0$时刻到$t=T$时刻的相空间路径进行积分，注意，这时候我们对初始时刻的$x(0)$以及对末尾时刻的$x(T)$ 都没有任何限制。

我们把(16)式推广到任何存在预量子线丛的辛流形$\mathcal{M}$。不仅如此，我们还把式中的H推广到$\mathcal{M}$上的任意函数，只需要注意这时候t,T不一定为物理的时间。一个值得特别说明的问题是，由于在上面的推广过程中，我们需要进行局部坐标变换，而在这样的变换下$\Theta\to\Theta+dF$。所以为了保证方程(16)的规范不变性，我们必须要求波函数$\psi(x)$和$\phi(x)$同时进行如下规范变换

$$\Theta\to\Theta+dF, \quad \psi(x)\to e^{iF(x)/\hbar}\psi(x), \quad \phi(x)\to e^{iF(x)/\hbar}\phi(x). \tag{17}$$

不难验证，(16)式在上面的规范变换下的确保持不变。(17)式意味着，波函数必须为预量子线丛$L\to\mathcal{M}$的截面。

当然，波函数$\psi(x)$和$\phi(x)$并非预量子线丛$L\to\mathcal{M}$的任意截面，因为它们分别是从原来的$\psi(q)$和$\phi(q)$ 经过相空间坐标变换而得来的。因此，假设记原来正则坐标下的切矢量$\partial_{q^s}, s=1,2,..,n$为$Q_s$, 即在原来的正则坐标下$Q_s=\partial_{q^s}$, 那么如果忽略规范变换多出来的相因子$e^{iF(x)/\hbar}$的话，$\psi(x)$和$\phi(x)$就必须支撑在$Q_s, s=1,2,...,n$的积分子流形上。或者换种等价的说法，假设记原来正则坐标中的切矢量$\partial_{p_s}=P_s$, 那么如果忽

略规范变换多出来的相因子$e^{iF(x)/\hbar}$，$\psi(x)$和$\phi(x)$就必须分别满足$P_s\psi(x) = 0$和$P_s\phi(x) = 0$。式中，变换到任意的相空间局部坐标x以后，可以记$P_s = P_s^a\partial_a$ $(\partial_a \equiv \partial_{x^a})$。

为了把规范变换多出来的相因子$e^{iF(x)/\hbar}$也考虑进来，就需要将普通偏导推广为协变导数，由于线丛$L \to \mathcal{M}$的联络为$-\frac{i}{\hbar}\Theta_a$，所以需要考虑的协变导数为

$$D_a = \partial_a - \frac{i}{\hbar}\Theta_a. \tag{18}$$

现在，我们就可以说，波函数$\psi(x)$和$\phi(x)$需要满足

$$D_{P_s}\psi(x) = 0, \quad D_{P_s}\phi(x) = 0. \tag{19}$$

式中$D_{P_s} \equiv P_s^a D_a$。换言之，任何物理态的波函数都需要满足这样的要求。

(19)式就是几何量子化文献中的极化条件。注意，对于线丛$L \to \mathcal{M}$的曲率2形式$f = -\frac{i}{\hbar}\omega$而言，式中的切矢量$P_s$满足

$$\omega(P_s, P_r) = \omega_{ab}P_s^a P_r^b = 0. \tag{20}$$

这是因为，在原来的正则坐标中$P_s = \partial_{p_s}$，而$\omega = dp_s \wedge dq^s$。总之，几何量子化中著名的极化条件在我们的推导中自动出现了！

公式(16)中的泛函积分测度$\mathcal{D}x(t)$需要一个合适的定义，它是对所有0到T时刻的辛流形路径积分，不妨记这样的路径集合为$\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$。很显然$\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$为一个无穷维流形，$\mathcal{D}x(t)$就是$\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$上的一个“最高阶”微分形式。特别的，$\mathcal{D}x(t)$不依赖于$\mathcal{M}$上局部坐标的具体选择。仿照费曼，可以将整个时间区间$[0, T]$切分成N等分，取$T = N\epsilon$为固定值, 记$x_j \equiv x(j\epsilon)$，并定义相空间辛体积元dx_j为

$$dx_j \equiv \frac{1}{n!}\big(\frac{\omega_j}{2\pi\hbar}\big)^n, \tag{21}$$

式中$\omega_j = \frac{1}{2}\omega_{ab}(x_j)dx_j^a \wedge dx_j^b$，最后即可以将$\mathcal{D}x(t)$定义成

$$\mathcal{D}x(t) = \lim_{N\to+\infty}\big(\prod_{j=0}^{N} dx_j\big). \tag{22}$$

很显然，这个定义满足$\mathcal{D}x(t)$不依赖于具体相空间局部坐标的要求。

当然，由于以上所有路径积分公式都是在无穷维流形$\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$上的积分，所以具体计算的时候为了得出不发散的计算结果，一般来说我们都需要进行

合适的正规化，并且，为了将这些计算结果和“物理”的计算结果相比较，我们还需要进行合适的重整化。

公式(16)加上极化条件(19) 就是我们给出的辛流形路径积分公式。尤其值得注意的是，我们的结果并不依赖于辛流形局部坐标的选择，而是具有明显的局部坐标变换下的协变性。极化的关键就是在波函数$\psi(x)$的自变量中协变地去除相空间的一半坐标，对于辛流形$\mathcal{M}$为某个位形流形的余切丛的情形，极化条件(19)总是可以实现的。然而，极化条件并不是唯一的，原则上几何量子化文献中考察的几乎所有极化条件都可以照搬到我们的辛流形路径积分中。稍后我们将讨论$\mathcal{M}$为某个凯勒流形的时候，人们常常采用的极化条件，以及相应的辛流形路径积分。

凯勒流形路径积分

如果辛流形$\mathcal{M}$为一个凯勒流形，记其复坐标为$z^s, s = 1, 2, ..., n$, 相应的实坐标依然记作$x^a, a = 1, 2, ..., 2n$。这时候，辛形式ω可以由凯勒势$K(z, \overline{z})$给出

$$\omega = i\partial\overline{\partial}K. \tag{23}$$

因此可以取辛势Θ为(注意，辛势总是实的)

$$\Theta = \frac{i}{2}\big(\overline{\partial}K - \partial K\big). \tag{24}$$

从而相应的协变导数为

$$D_{\overline{s}} = \partial_{\overline{s}} + \frac{1}{2\hbar}\partial_{\overline{s}}K, \quad D_s = \partial_s - \frac{1}{2\hbar}\partial_s K, \tag{25}$$

式中$\partial_s \equiv \frac{\partial}{\partial z^s}, \partial_{\overline{s}} \equiv \frac{\partial}{\partial \overline{z}^s}$。

这时候，相比于上文讨论的实极化条件，更好用的是凯勒极化条件，即要求物理态的波函数$\psi(x)$满足，

$$D_{\overline{s}}\psi(x) = 0. \tag{26}$$

很显然，这个方程的解为

$$\psi(x) = e^{-\frac{1}{2\hbar}K(x)}\psi_h(z), \tag{27}$$

式中$\psi_h(z)$为复坐标z的全纯函数(即不依赖于$\overline{z}$)，显然是协变地去除了$\mathcal{M}$的一半坐标。因此这个时候，相应的路径积分表达式(16)将成为，

$$\langle\phi|e^{-i\widehat{H}T/\hbar}|\psi\rangle = \int \mathcal{D}x(t)\exp\Big(\frac{i}{\hbar}[\int_{x(0)}^{x(T)}\Theta - \int_0^T dtH(x)]\Big)\times \\ \exp\Big(-\frac{1}{2\hbar}[K(x(T))+K(x(0))]\Big)\overline{\phi_h(z(T))}\psi_h(z(0)). \quad (28)$$

注意到$\Theta = \frac{i}{2}dK - i\partial K$, 进而可知，这个式子也可以写成

$$\langle\phi|e^{-i\widehat{H}T/\hbar}|\psi\rangle = \int \mathcal{D}x(t)e^{-\frac{1}{\hbar}K(x(T))}\overline{\phi_h(z(T))}\times \\ \exp\Big(\frac{1}{\hbar}[\int_{x(0)}^{x(T)}\partial K - i\int_0^T dtH(x)]\Big)\psi_h(z(0)). \quad (29)$$

特别的，如果在上式中取$T=0$，这个时候整个泛函积分$\mathcal{D}x(t)$就相当于对相空间坐标$x(0)=x$积分，因此就可以得到如下关于量子态的内积公式

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int dxe^{-\frac{1}{\hbar}K(x)}\overline{\phi_h(z)}\psi_h(z). \quad (30)$$

式中dx代表辛体积元, 即$dx \equiv \frac{1}{n!}\big(\omega/2\pi\hbar\big)^n$。

3 辛流形路径积分与预量子化

3.1 从辛流形路径积分到预量子化

下面我们把(16)式涉及的路径积分重写为

$$\int dx'\overline{\phi}(x')\int[\mathcal{D}x(t)]^{x',T}\exp\Big(\frac{i}{\hbar}[\int_{x(0)}^{x'}\Theta - \int_0^T dtH(x)]\Big)\psi(x(0)). \quad (31)$$

式中的泛函积分测度$[\mathcal{D}x(t)]^{x',T}$代表对所有0时刻发出，T时刻到达相空间固定点x'的相空间路径进行积分，特别的，这里对$x(0)$没有任何附加要求。不妨定义$\psi_T(x')$如下，

$$\psi_T(x') \equiv \int[\mathcal{D}x(t)]^{x',T}\exp\Big(\frac{i}{\hbar}[\int_{x(0)}^{x'}\Theta - \int_0^T dtH(x)]\Big)\psi(x(0)). \quad (32)$$

很显然，$\psi_T(x)$也是线丛$L\to\mathcal{M}$的截面，不过，虽然初始的$\psi(x)$满足极化条件，但一般来说，$\psi_T(x)$并不满足极化条件，因此不能作为物理态的波函数。

根据$\psi_T(x')$的定义和路径积分式(31)，可知，可以将$\psi_T(x)$和$\phi(x)$的内积(ϕ, ψ_T)定义为

$$(\phi, \psi_T) \equiv \int dx \overline{\phi}(x) \psi_T(x). \tag{33}$$

当然，这个内积也可以推广到线丛$L \to \mathcal{M}$的任意两个截面。

定义哈密顿函数$H(x)$的预量子化算符$\widehat{H}_{\rm pre}$如下，

$$\psi_T(x') \equiv \exp\big(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_{\rm pre}T\big)\psi(x'). \tag{34}$$

进而根据(32)式，即有

$$\exp\big(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_{\rm pre}T\big)\psi(x') = \int [\mathcal{D}x(t)]^{x',T} \exp\Big(\frac{i}{\hbar}S[x(t)]\Big)\psi(x(0)). \tag{35}$$

式中的作用量$S[x(t)]$为

$$S[x(t)] = \int_{x(0)}^{x'} \Theta - \int_0^T dt H(x) = \int_0^T dt \big[\Theta_a \dot{x}^a - H(x)\big]. \tag{36}$$

下面我们证明，当$\hbar \to 0$时，(35)式定义的预量子化算符$\widehat{H}_{\rm pre}$将自动趋于几何量子化方案中所定义的预量子化算符。具体的推导如下：首先，在$\hbar \to 0$时，(35)式右边的路径积分可以由驻定相近似来计算，也即是说，对路径积分的贡献将主要由如下相空间路径主导，在这条路径附近作用量S的变分等于零，即$\delta S = 0$, 我们称之为经典路径，记作$y(t)$。正如我们马上就会看到的，$y(t)$满足一组一阶微分方程，也就是通常所谓的哈密顿方程。而且，由于T时刻的x'是给定的，所以$y(t)$必须满足$y(T) = x'$, 但是，由于$x(0)$并不是给定的，所以$y(0)$也不是预先给定的，而是要由$y(T) = x'$决定。

为了导出$y(t)$所满足的方程，我们需要对(36)式给出的作用量S进行变分，不难发现$\delta \int_{x(0)}^{x'} \Theta = \int_0^T dt \delta\big(\Theta_a \dot{x}^a\big) = \int_0^T dt \omega_{ab} \dot{x}^b \delta x^a$，进而有

$$0 = \delta S = \int_0^T dt \big[\omega_{ab}\dot{x}^b - \partial_a H\big]_{x(t)=y(t)} \delta x^a. \tag{37}$$

也即是说，$y(t)$满足

$$\dot{y}^a = \omega^{ab}\partial_b H(y) \equiv v_H^a. \tag{38}$$

这就是著名的哈密顿方程，其中切向量场$v_H \equiv v_H^a \partial_a$就称之为哈密顿向量场。

也即是说，当$\hbar \to 0$时，(35)式可以近似为

$$\exp\big(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_{\rm pre}T\big)\psi(x') \simeq \exp\Big(\frac{i}{\hbar}S[y(t)]\Big)\psi(y(0)). \tag{39}$$

式中$y(t)$为满足哈密顿方程(38)的，由$y(T)=x'$决定的相空间路径。

最后，为了求出$\widehat{H}_{\rm pre}$的表达式，我们在(39)式中取无穷小的时间间隔$T=\epsilon$, 并注意到此时$S[y(t)]$近似为

$$S[y(t)] = [\Theta_a(x')\dot{y}^a - H(x')]\epsilon + ... = [\Theta_a(x')v_H^a(x') - H(x')]\epsilon + ... \tag{40}$$

同时注意到$y^a(0) = y^a(T) - v_H^a(T)\epsilon + ... = x' - v_H^a(x')\epsilon + ...$, 从而$\psi(y(0)) = \psi(x') - \epsilon v_H^a(x')\partial_a\psi(x') + ...$, 以上所有的省略号都表示$\epsilon$的高阶项。进而即有

$$\psi(x') - \epsilon\frac{i}{\hbar}\widehat{H}_{\rm pre}\psi(x') \simeq \big(1 + \frac{i}{\hbar}[\Theta_a v_H^a(x') - H(x')]\epsilon\big)\big(\psi(x') - \epsilon v_H^a\partial_a\psi(x')\big).$$

比较ϵ项的系数，即可以得到

$$\widehat{H}_{\rm pre} \simeq -i\hbar D_{v_H} + H, \tag{41}$$

式中$D_{v_H} \equiv v_H^a D_a$，$\simeq$号表示在$\hbar \to 0$时等式才成立。这正是几何量子化中熟知的预量子化算符。

到这里为止，本文的核心结论就都已经得到了，但是，考虑到很多熟悉量子力学路径积分的物理学工作者并不熟悉几何量子化，所以下一节我们对预量子化的概念进行一个简短的回顾。

3.2 预量子化简短回顾

根据上一节可以知道，任给辛流形$\mathcal{M}$上的一个哈密顿函数$H(x)$，我们可以定义相应的哈密顿向量场v_H为

$$v_H = v_H^a\partial_a = (\omega^{ab}\partial_b H)\partial_a. \tag{42}$$

另外，任给$\mathcal{M}$上的两个函数H_1, H_2，可以定义它们的泊松括号

$$\{H_1, H_2\} \equiv v_{H_1}(H_2) = -\omega^{ab}\partial_a H_1 \partial_b H_2. \tag{43}$$

按照熟知的定义$\omega(v_{H_1},v_{H_2})=\omega_{ab}v^a_{H_1}v^b_{H_2}$, 不难验证有，

$$\omega(v_{H_1},v_{H_2})=\{H_1,H_2\}. \tag{44}$$

另一方面，辛流形的熟知结果告诉我们，$d\omega=0$的条件等价于如下雅可比恒等式

$$\{H_1,\{H_2,H_3\}\}+\{H_2,\{H_3,H_1\}\}+\{H_3,\{H_1,H_2\}\}=0. \tag{45}$$

或者等价的用向量场的对易子来说，即是

$$[v_{H_1},v_{H_2}]=v_{\{H_1,H_2\}}. \tag{46}$$

另外，对于线丛$L\to\mathcal{M}$上的协变导数，微分几何的熟知结论告诉我们

$$[D_v,D_u]-D_{[v,u]}=f(v,u)=-\frac{i}{\hbar}\omega(v,u), \tag{47}$$

式中v,u为$\mathcal{M}$上的任意两个切向量场，f为线丛$L\to\mathcal{M}$的曲率2形式。

为了符号简单起见，我们直接在(41)式中取等于号，即相当于直接取几何量子化中标准的预量子化算符,

$$\widehat{H}_{\rm pre}=-i\hbar D_{v_H}+H. \tag{48}$$

则，根据上面这些熟知的结果，不难验证

$$[\widehat{H_1}_{\rm pre},\widehat{H_2}_{\rm pre}]=(-i\hbar)\big(-i\hbar D_{v_{\{H_1,H_2\}}}+\{H_1,H_2\}\big)=(-i\hbar)\widehat{\{H_1,H_2\}}_{\rm pre}. \tag{49}$$

即, 预量子化映射是一个从泊松括号的李代数到算符对易子李代数的同态。

预量子化算符$\widehat{H}_{\rm pre}$作用在线丛$L\to\mathcal{M}$的截面上。根据(33)式，任给$L\to\mathcal{M}$的两个截面$\sigma_1(x)$和$\sigma_2(x)$, 其内积(σ_1,σ_2)定义为

$$(\sigma_1,\sigma_2)\equiv\int dx\overline{\sigma_1}(x)\sigma_2(x). \tag{50}$$

根据这个内积，$L\to\mathcal{M}$的所有截面构成一个希尔伯特空间$\mathcal{H}_{\rm pre}$。不难验证，预量子化算符$\widehat{H}_{\rm pre}$是作用在这个希尔伯特空间上的自伴算子。不过，$\mathcal{H}_{\rm pre}$并不是物理态的希尔伯特空间$\mathcal{H}$, 因为物理态的波函数并非$L\to\mathcal{M}$的任意截面，而是还要额外满足极化条件！