

# 目录

第十五章 球对称恒星及其演化	2
15.1 星体结构微分方程	2
15.2 牛顿近似以及均匀密度星	7
15.3 恒星演化	10

# 第十五章 球对称恒星及其演化

陈童

前面的章节中我们系统讲述了黑洞这种最为奇异的天体，当然今天我们知道黑洞是存在的，然而由于广义相对论的黑洞解中总是存在时空奇性(即时空曲率发散的地方)，而奇性的存在本身意味着广义相对论在此处失效，所以关于黑洞解是否描写了真实存在的天体(还是仅仅只有数学意义)就曾经是一个很难确定的难题(比如白洞通常就被认为是不存在的)。尤其是，如果黑洞真实存在，那它是如何形成的呢？这一章的目的之一就是要讨论这个问题。

结果表明，对黑洞如何形成的一个回答是，它可以作为恒星演化的可能归宿之一而出现。因此这就把我们带到一个同样重要而且有意思的课题，即利用广义相对论来探讨恒星的演化。当然，动态演化过程研究起来比较困难，但是考虑到恒星的演化通常是在天文学时间尺度上进行的，所以我们不妨从研究恒星的平衡态开始，具体来说，我们将从研究一颗静态球对称恒星开始。

## 15.1 星体结构微分方程

对于一颗静态球对称恒星，其外部的时空当然由施瓦西解所描述，所以关键是要研究星体的内部。而星体内部是有物质分布的，因此内部时空满足的显然不是真空爱因斯坦方程，而是有物质分布的爱因斯坦方程。

星体内部的物质分布可以看作是微观上由大量粒子所构成的理想流体，因此具有如下能量动量张量

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (15.1)$$

很显然  $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = 3p - \rho$ 。由于星体被假定为静态的，从而描述物质分布的理想流体也是静态的，这意味着协变流速场  $u = u^\mu \partial_\mu$  将正比于静态基林向量场  $\xi = \partial_t$ 。

根据第八章中的分析，静态球对称度规必定可以取成如下形式

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (15.2)$$

$u$  正比于  $\partial_t$  就意味着  $u^\mu$  只有时间分量，进一步根据归一化条件  $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$ ，即可以定出在  $(t, r, \theta, \phi)$  坐标中，

$$u^\mu = A^{-\frac{1}{2}}(1, 0, 0, 0), \quad u_\mu = A^{\frac{1}{2}}(-1, 0, 0, 0). \quad (15.3)$$

代入(15.1)式，即得能动张量的非零分量为

$$\begin{aligned} T_{tt} &= \rho(r)A(r), & T_{rr} &= p(r)B(r) \\ T_{\theta\theta} &= p(r)r^2, & T_{\phi\phi} &= \sin^2\theta T_{\theta\theta}. \end{aligned} \quad (15.4)$$

另一方面，根据第八章的计算，静态球对称度规的里奇张量为

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{A''}{2B} + \frac{A'}{rB} - \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) \\ R_{rr} &= -\frac{A''}{2A} + \frac{B'}{rB} + \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) \\ R_{\theta\theta} &= 1 - \left(\frac{r}{B}\right)' - \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta R_{\theta\theta}. \end{aligned} \quad (15.5)$$

进而由爱因斯坦场方程  $R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)$  即可以得到

$$R_{tt} = \frac{A''}{2B} + \frac{A'}{rB} - \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = \kappa\frac{1}{2}(\rho + 3p)A \quad (15.6)$$

$$R_{rr} = -\frac{A''}{2A} + \frac{B'}{rB} + \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = \kappa\frac{1}{2}(\rho - p)B \quad (15.7)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \left(\frac{r}{B}\right)' - \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = \kappa\frac{1}{2}(\rho - p)r^2. \quad (15.8)$$

注意，只有三个方程，因为 $\theta\theta$ 分量和 $\phi\phi$ 分量所给出的方程是同一个。

考虑以上三个方程的组合 $\frac{R_{tt}}{A} + \frac{R_{rr}}{B} + \frac{2R_{\theta\theta}}{r^2}$ , 不难得得到

$$\frac{1}{r^2} \left( 1 - \left( \frac{r}{B} \right)' \right) = \kappa \rho. \quad (15.9)$$

积分这个式子，即可以得到 $\frac{r}{B} = r - 2Gm(r) + c$ , 式中 $c$ 为积分常数， $m(r)$ 为

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (15.10)$$

为了定出积分常数 $c$ ，我们注意到度规在 $r = 0$ 处必定是有限的，从而 $B(0)$ 有限，进而在 $\frac{r}{B} = r - 2Gm(r) + c$ 中取 $r = 0$ ，即可以得到 $c = 0$ ，即有

$$\frac{1}{B} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r}. \quad (15.11)$$

假设恒星的半径为 $R$ , 恒星外面施瓦西解的质量参数为 $M$ , 即恒星外部的度规满足 $B = (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}$ , 则很显然，为了衔接恒星内部和外部的解，必然有

$$M = m(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr. \quad (15.12)$$

注意，上面的 $M$ 并不是星体内部所有物质分布的总能量(虽然表达式看起来很像)，由于径向空间的弯曲，星体内部所有物质分布的总能量应该由下式给出

$$4\pi \int_0^R \sqrt{B(r)} \rho(r) r^2 dr. \quad (15.13)$$

很显然，这和上面的 $M$ 并不同。实际上，正如后面的章节中将会证明的，上面的 $M$ 是整个时空所有东西(包括星体内部的物质分布和整个时空的引力场)的总能量，它当然和物质分布的能量是不同的。

一共三个独立方程，我们才处理完一个，为了继续进行下去，我们把(15.9)式代入(15.8)式以消去其中的 $\rho$ ，进而得到

$$1 - \left( \frac{r}{B} \right)' - \frac{r}{B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) = -\kappa p(r) r^2. \quad (15.14)$$

整理一下，可以得到

$$\frac{r}{B} \frac{d \ln A}{dr} = \left( 1 - \frac{1}{B} \right) + kpr^2. \quad (15.15)$$

代入(15.11)式，即可以得到

$$\begin{aligned}\frac{d \ln A}{dr} &= \frac{2G(m(r) + 4\pi p(r)r^3)}{r(r - 2Gm(r))} \\ &= \frac{2Gm(r)}{r^2} \left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{m(r)}\right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)^{-1}.\end{aligned}\quad (15.16)$$

现在只剩下最后一个独立方程要处理了，但是直接从前面那三个独立方程组合出最后这个方程的话有些繁琐，一个简洁的办法是利用能动量守恒方程  $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$  (由于爱因斯坦张量满足比安基恒等式，所以这个式子必定成立) 来得到最后这个独立方程。第四章我们推导过矢量场的协变散度必定可以写成  $D_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} A^\mu)$ ，完全类似的推导可以得到

$$D_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\rho}^\nu T^{\mu\rho}. \quad (15.17)$$

将  $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$  用到理想流体的能动张量，并注意到  $D_\mu g^{\mu\nu} = 0$ ，即有

$$0 = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} (\rho + p) u^\mu u^\nu) + \Gamma_{\mu\rho}^\nu (\rho + p) u^\mu u^\rho + g^{\mu\nu} \partial_\mu p. \quad (15.18)$$

注意到  $u^\mu$  仅仅只有时间分量非零，同时注意到球对称性的假设意味着  $\rho$  和  $p$  都仅仅是  $r$  的函数，进而即可以从上式得到

$$0 = \frac{\rho + p}{A} \Gamma_{tt}^\nu + g^{rr} \frac{dp}{dr}. \quad (15.19)$$

根据第八章对克里斯托夫联络的计算可知， $\Gamma_{tt}^\nu$  中只有  $\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} \frac{A'}{B}$  非零，因此在上式中取  $\nu = r$ ，即可以得到

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{2}(\rho + p) \frac{d \ln A}{dr}. \quad (15.20)$$

代入(15.16)式，即可以得到

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \left(1 + \frac{p(r)}{\rho(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{m(r)}\right) \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)^{-1}. \quad (15.21)$$

这就是著名的，相对论星体结构的 Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程。

Tolman-Oppenheimer-Volkoff 方程就是最主要的一个星体结构微分方程。另一个关键的结构方程是对(15.10)式的重新改写，改写为

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi \rho(r) r^2. \quad (15.22)$$

很显然，这个方程的初始条件是

$$m(0) = 0. \quad (15.23)$$

但是，方程(15.21)和方程(15.22)还不够，因为这只有两个方程，但是未知的变量有 $\rho(r)$ ,  $p(r)$ 和 $m(r)$ 三个，所以还缺了一个方程。这个所缺的方程就是星体物质分布的物态方程。一般性的物态方程当然很复杂，因为它可能和物质的比熵分布以及化学成分都有关系。但在最简单和最有用的情况下，我们可以假定所谓的物态方程，就是压强 $p$ 作为能量密度 $\rho$ 的一个给定函数关系，即我们假定

$$p(r) = p(\rho(r)). \quad (15.24)$$

通常还要求物态满足下面的合理要求

$$\rho \geq 0, \quad p \geq 0. \quad (15.25)$$

补上了这样的物态方程，方程的数目就够了。

为了联立求解星体结构方程(15.21),(15.22) 以及物态方程(15.24)，我们还需要知道初始条件， $m(r)$ 的初始条件为 $m(0) = 0$ ，另一个初始条件就是 $\rho(0)$ ，不妨假定

$$\rho(0) = \rho_0, \quad (15.26)$$

并记相应的 $p(0)$ 为

$$p(0) = p(\rho(0)) = p_0. \quad (15.27)$$

利用初始条件求解微分方程，就可以得到函数 $\rho(r)$ ,  $p(r)$ 以及 $m(r)$ 。有了这三个函数，再代入方程(15.11)和方程(15.16)就能求出时空度中待定的 $A(r)$ 和 $B(r)$ 。

注意，星体不是黑洞，它内部不可能含有视界，所以通常来说

$$A(r) > 0, \quad B(r) > 0, \quad (15.28)$$

换言之，必定有

$$2Gm(r) < r. \quad (15.29)$$

进一步，对于 $\rho \geq 0, p \geq 0$ 的合理物态，由Tolman-Oppenheimer-Volkoff方程可以知道，星体从内向外，其压强 $p(r)$ 必定是单调下降的，到星体的表面上，这个压强将下降为零。所以，星体的半径 $R$ 可以定义为，使得下式成立的最小 $R$

$$p(R) = 0. \quad (15.30)$$

## 15.2 牛顿近似以及均匀密度星

### 牛顿近似

下面考虑星体结构微分方程的牛顿近似。这是指：1. 首先，时空弯曲可以忽略，比方说 $B(r)$ 近似等于1，从而

$$2Gm(r) \ll r. \quad (15.31)$$

2. 其次，物质粒子的动能远远小于静止能量，由于压强是由动能导致的，从而这意味着

$$p \ll \rho \Rightarrow pr^3 \ll \rho r^3 \sim m(r). \quad (15.32)$$

不难看出，在牛顿近似下，Tolman-Oppenheimer-Volkoff方程可以近似为

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}. \quad (15.33)$$

这个方程当然也可以在牛顿引力的框架下推导出来，为此你只需要在星体内部考虑一个厚度为 $dr$ 的薄球层，由球层内外压力差(内部压力高)与球层所包围物质对它的万有引力之间的平衡，也就是所谓压强梯度与星体自引力之间的平衡，就可以导出方程(15.33)，如图(15.1).

另外，同样不难看出，在牛顿近似下，方程(15.16)将近似为

$$\frac{d \ln A}{dr} = \frac{2Gm(r)}{r^2}. \quad (15.34)$$

实际上，这个结果说明，在牛顿近似下

$$\ln A = 2\varphi(r), \quad (15.35)$$

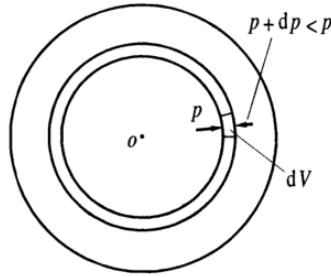


图 15.1: 由一个薄球层内外压力差与球层内部物质对它的万有引力的平衡可以导出方程(15.33).

式中  $\varphi(r)$  表示牛顿引力势。

为了看出这一点，我们只需要注意到牛顿引力势  $\varphi(r)$  满足泊松方程  $\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho$ 。在球对称的情况下，这个方程将成为

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 4\pi G \rho(r). \quad (15.36)$$

将这个方程积分一次，即有  $r^2 \frac{d\varphi}{dr} = 4\pi G \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' = Gm(r)$ ，进而即有

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{Gm(r)}{r^2}. \quad (15.37)$$

比较这个结果和(15.34)式，即知  $\ln A = 2\varphi(r)$ 。

### 施瓦西内解

星体结构微分方程通常无法解析求解，只能求数值解。不过，对于一种最简单的假想物态，最早在1916年施瓦西就已经求得了其解析解，这就是所谓的施瓦西内解。这种最简单的情况就是所谓的均匀密度星，即其物态方程是

$$\rho(r) = \rho_0 = \text{常数.} \quad (15.38)$$

很显然，这时候

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3. \quad (15.39)$$

特别的，总能量 $M$ 为

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3. \quad (15.40)$$

由于 $\rho$ 为常数，这时候Tolman-Oppenheimer-Volkoff方程可以写成

$$-\frac{p'(r)}{[\rho_0 + p(r)][\frac{\rho_0}{3} + p(r)]} = 4\pi G r \left[1 - \frac{8\pi G \rho_0 r^2}{3}\right]^{-1}. \quad (15.41)$$

从星体表面向内积分(因为星体表面的压强已知为0)，即可以得到

$$\frac{p(r) + \rho_0}{3p(r) + \rho_0} = \left[\frac{1 - 8\pi G \rho_0 R^2 / 3}{1 - 8\pi G \rho_0 r^2 / 3}\right]^{1/2}. \quad (15.42)$$

代入 $\rho_0 = 3M/(4\pi R^3)$ ，即可以得到Tolman-Oppenheimer-Volkoff方程的一种解析解

$$p(r) = \rho_0 \frac{(1 - 2GM/R)^{1/2} - (1 - 2GMr^2/R^3)^{1/2}}{(1 - 2GMr^2/R^3)^{1/2} - 3(1 - 2GM/R)^{1/2}}. \quad (15.43)$$

这时候，星体中心的压强 $p_0$ 为，

$$p_0 = \rho_0 \frac{1 - Y}{3Y - 1}, \quad (15.44)$$

式中

$$Y = (1 - 2GM/R)^{1/2}. \quad (15.45)$$

由于物质压强大于零，所以从上面 $p_0$ 的表达式可知，必然要求 $1/3 < Y < 1$ 。不难验证 $dp_0/dY < 0$ ，进而可知，中心压强 $p_0$ 随着 $GM/R$ 的增加而增加。这不难理解，因为在 $R$ 一定时，若 $M$ 越大，则星体的自引力就越强，为了抗衡自引力，星体的压强梯度就越大，由于 $R$ 一定，则中心压强 $p_0$ 就必然越大。反之，若 $M$ 一定，则 $R$ 变小，则为了产生所需的压强梯度也需要更大的 $p_0$ 。

当 $GM/R$ 大到使得 $Y = 1/3$ 时，显然就有 $p_0 \rightarrow +\infty$ 。因此对于均匀密度星，其 $GM/R$ 有上限，由 $Y = 1/3$ 可知，这个上限为

$$(GM/R)_{\max} = 4/9. \quad (15.46)$$

在广义相对论中，星体质量上限的存在并非均匀密度星特有的结论，可以证明，只要假定 $\rho(r) \geq 0$ ，并且 $d\rho/dr \leq 0$ ，则任何球对称星体的 $GM/R$ 都得

以 $4/9$ 为上限！这个结论的证明可以参见温伯格《引力和宇宙学》第11章第11.6节。

实际上，普通星体的 $GM/R$ 远小于 $4/9$ 。为做数值估算，恢复光速 $c$ ，即考察 $\frac{GM/c^2}{R}$ 。以太阳为例，其 $GM_\odot/c^2 \approx 1.5\text{km}$ ，其 $R_\odot \approx 7 \times 10^5\text{km}$ ，所以，对于太阳

$$\frac{GM_\odot/c^2}{R_\odot} \approx 2 \times 10^{-6} \ll 4/9. \quad (15.47)$$

### 15.3 恒星演化

下面我们来简单概述恒星的演化过程，并弄清楚为何说黑洞是大质量恒星演化的可能归宿之一。我们将看到，恒星演化大体有三种可能的归宿，其一是最终成为白矮星，其二是成为中子星，最后一种可能归宿就是成为黑洞。对于演化形成白矮星的这种归宿，由于密度并不十分高，引力场也不足够强，所以实际上用牛顿引力就足够了。但是对于中子星和黑洞，广义相对论是不可或缺的。

在恒星形成之前，起初是一团密度不均匀的气体，以氢为主。在自引力的作用下，密度较大的地方就开始吸聚周围的气体，逐渐形成一个球对称的气团。同样是由于自引力，这个气团会不断收缩，气团收缩的过程会使得引力势能不断转化成热能，因此气团的温度 $T$ 就不断升高。根据理想气体压强公式 $p = nk_B T$ ( $n$ 为粒子数密度)，随着温度的升高，气团的压强也不断增大，压强的梯度也不断增大，看来好像有可能和自引力达成平衡。但是，如果气团本身没有能源，一切热能都来自于引力势能转化的话，那这种平衡是不可能的。原因在于，即使某个时刻暂时平衡下来，但由于气团会通过热辐射损失能量，而它自身又没有能源，那它的温度就会降低，压强梯度就会减小，那就会继续收缩。总体来看就是，气团必须不断收缩，以使得引力势能不断转化成热辐射出去的能量。因此没有能源的话，平衡是不可能的。

经过一段时间的缓慢收缩，气团中心的温度和密度终于高到足以点燃热核反应(也就是氢聚合成氦的核聚变反应)的程度了。这个温度大约只要1500万度左右(以太阳为例)就够了，当然，本来这个温度是不够高的，但是考虑到量子隧穿效应，它已经有不可忽视的概率使得两个氢核克服库伦排斥力而聚合成氦核了。气团中心附近(一个称作星核的中心球体)的这种核聚变反应能释放巨大的能量，从而提供能量来平衡热辐射损失的能量，

这样，气团就能不再收缩，达成一种平衡态。这时候，气团就成为一颗恒星，其内的压强梯度满足平衡条件(15.33)。

太阳目前就处在这种普通恒星阶段，据估计，太阳的星核部分氢变氦的聚变反应已经在稳定状态中持续了约45亿年，而且大约还能保持这种状态50亿年。

总有一天，星核内部的氢会全部聚变成氦，只有星核周围的一薄层氢还在聚变燃烧，如图(15.2)所示。当星核的温度尚未达到进一步点燃氦(使

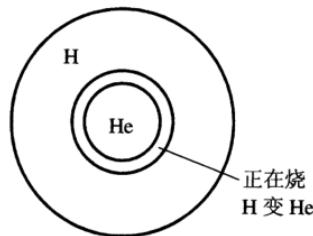


图 15.2: 星核内部氢燃烧完后的情况.

之再次聚变成更重元素)的核聚变反应时，这时候星核就没有进一步的核聚变能源可用了，那就如氢尚未被点燃时类似，核心的氦球将在自引力作用下再次开始收缩，同时变得更热。这会使星核周围薄层的氢燃烧加剧，从而导致星体更外层的部分膨胀和冷却，变成一个**红巨星**！“红”是由于星体表面的温度降低了，“巨”则是因为星体膨胀变得很大。红巨星阶段的星体会大量抛出其外层物质。

当然，氦核收缩导致的高温可能会进一步点燃氦的聚变反应，也就是烧氦变碳或氧的聚变反应，所释放的能量可以再次使得星核达到平衡。不过，这种靠氦燃烧维持的平衡所持续的时间远小于氢燃烧的情形。当星核的氦全部变成碳或氧时，星核又会再次收缩！

恒星晚年的命运因其抛出物质以后剩余的质量而定，对于质量较小的恒星，比如说太阳，星核的收缩已经不能提供足够的温度使碳和氧发生核聚变，因此靠核聚变来维持平衡就变得不再可能。那么，这时候还有没有什么力量提供足够的压强梯度来抗衡星体的自引力呢？

在经典物理的范畴的确是找不到抗衡力量了，不过，量子物理为我们提供了新的可能。这是因为，量子物理为我们找到了一种新的即使在零温下都能存在的压强产生机制，那就是所谓的电子简并压。具体来说，星体

由氢、氦以及其它元素组成，之前的高温会使得原子都处于电离状态，因此星体可以看成是离子和电子的理想气体。以电子气为例，根据量子物理，电子气中每个电子的能量都会量子化成许多密集的能级，而由泡利不相容原理，每一个能级最多被两个电子占据，一个自旋向上、一个自旋向下。 $T = 0$ 时，电子会优先占据能量为零的最低能级，一个能级占满了就会接着往上占据更高的能级，最终，电子气中的所有电子将占满从最低能级到某个能量为 $E_F$ 的能级的所有状态。 $E_F$ 就叫费米能，其值随密度的增大而增大，因为星核的密度很高，所以 $E_F$ 非常大，以致于相比于 $E_F$ 我们可以忽略温度的效应( $k_B T \ll E_F$ )，即可以看作零温(即使从通常的观点来看，这时候星核的温度还是很高)。

也就是说，和经典物理的结论不同， $T = 0$ 时，电子不能全部集中在最低能态(也就是能量为0的能级)，而是也有正的能量，因此也有运动，而且这个运动的能量(虽然不是热运动的动能)还可能很高，由此产生的压强就叫电子简并压，相应的电子气就叫简并电子气。在普通密度下， $E_F$ 很小(常见金属中自由电子气的 $E_F$ 只有几个电子伏特)，因此电子简并压也很小。但是，前面说了，星核内部的 $E_F$ 可以非常大，导致电子简并压也非常大，进而可能抗衡星体的自引力，使星体保持平衡，永不收缩(因为这种抗衡不需要能源)。这种靠电子简并压维持的稳定星体就是白矮星。

一个孤立星体一旦演化成白矮星就不再会有重要的进一步演化，因此白矮星是恒星的可能归宿之一。因为温度比外界高，白矮星会不断辐射出能量，而又由于没有能源支持，所以热辐射会导致它的温度不断降低，直至温度接近外界温度而再也看不见，就成了一颗所谓的“黑矮星”。

人类早已观测到白矮星的存在，天狼星B就是人类发现的第一颗白矮星。至于白矮星的“矮”字，则是指这些星的半径比普通恒星小得多(部分原因是由于其密度高)，白矮星的半径约在3千到2万公里之间。据估计，初始质量小于 $6 \sim 8 M_{\odot}$ 的恒星都将经过红巨星阶段并抛出大量物质，最终成为剩余质量约为 $0.5 \sim 0.6 M_{\odot}$ 的白矮星。

当然，剩余质量越大的恒星其自引力就越强，因此，只有质量足够小的恒星其自引力才能被电子简并压所平衡。因此可以想见，白矮星的质量应该有一个上限，钱德拉塞卡最早求得了这个质量上限，大约为 $1.4 M_{\odot}$ ，称作钱德拉塞卡极限。

如果剩余质量大于钱德拉塞卡极限，那么电子简并压将不足以维持星体平衡，星体会在自引力作用下继续收缩，并一级一级地点燃星核内部的核聚变反应，直至将元素都聚合成铁和镍。这两者是结合得最紧密(也就

是核子的平均结合能最大)的原子核，它们要再进行核聚变成为更重的原子核的话，那就不是释放能量了，而是要吸收能量，因此就不能成为星体平衡的能源了。于是，星核就会在自引力作用下急剧收缩，密度和温度都急剧升高。这时，自引力已经强到使得牛顿近似不再适用了，我们需要使用完整的Tolman-Oppenheimer-Volkoff方程(15.21)。注意到(15.21)式右边的绝对值总是大于牛顿近似下(15.33)式右边的绝对值，因此这时候为达到平衡所需要的中心压强将更大，平衡将更难以实现。在这样的高温高密下，高能光子会将铁、镍原子核打碎成中子、质子和轻核，而且电子也将通过逆 $\beta$ 衰变同质子反应，生成中子和中微子。当然，中微子会逸出星体之外。于是，中子在星核内将占据主导地位，注意，中子和电子一样，也是费米子，也服从泡利不相容原理，因此也会有一个费米能 $E_F$ ，也会产生中子简并压！在星核达到原子核密度( $\sim 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )时，中子的费米能也会远大于热能 $k_B T$ ，因此这时候的中子可以看成是零温的简并中子气。简并中子气的中子简并压也有可能抗衡星体自引力，使得星体达到平衡，这种靠中子简并压支撑的星体就称作**中子星**。

和白矮星类似，中子星当然也会有一个质量上限，超过这个质量上限星体自引力就会压倒中子简并压，使得星体进一步坍缩。不过，由于中子星的密度甚至超过了原子核密度，人们对这种密度下的物态了解得不够确切，这给中子星质量上限的计算带来了一些不确定性。总之，按照今天人们的了解，中子星的质量上限大约为 $2 \sim 3 M_\odot$ 。

中子星比白矮星还要小很多，典型中子星的半径只有 $10 \text{ km}$ 。除了密度甚至超过原子核之外，中子星还有很多非常特别的表现：比如异常强的磁场、比如高速的自转(频率从 $1 \text{ Hz}$ 到 $1000 \text{ Hz}$ )、比如接近光速的声速、甚至比如超流的内部等等。

中子星的理论模型最早是由Oppenheimer和Volkoff在1939年提出的。但是中子星的存在一直要到1967年发现脉冲星才得到观测证实。脉冲星是一种在地球上观测到的周期性电磁波信号的信号源，周期约为1秒甚至更短。对脉冲星的可信解释就是：这是一颗旋转着的中子星，其表面的强磁场导致磁偶极辐射，辐射的方向性和旋转效应的结合就使得地球上接收到周期性信号。只有中子星由于半径足够小，而且自引力足够强，才能在如此高速的旋转中免于“散架”。

星核在形成中子星之前的收缩非常急剧，可以称之为引力坍缩，这种急剧的引力坍缩一旦被中子简并压所遏止，其强大的能量将表现为向外的冲击波，并使得星体的外层物质向四周飞出，形成能量急剧释放的**超新星**

**爆发。**著名的超新星爆发遗址蟹状星云中就发现了中子星，这是对上述理论的支持。世界上最早记录下对超新星爆发观测的国家就是中国，其中宋史志卷九关于公元1054年(北宋期间)观测到的超新星爆发(SN1054)的记录特别受到国际上的重视，而蟹状星云也正是这次超新星爆发的遗址。

超新星爆发抛出的物质会形成星云(比如蟹状星云)，这些星云中有大量的氢、也有一些比较重的元素(比如铁)。实际上，地球上的重元素就是这么来的，宇宙大爆炸的原初核合成中并没有这些重的元素，它们是来自于超新星爆发。爆发后的气团遗址当然又可以开始集聚，形成新一代的恒星，从而开始新一轮的恒星演化。据估计，我们的太阳就是这样的第三代恒星。

如果在超新星爆发抛出物质之后，星体的剩余质量依然大于中子星质量上限，那中子简并压也将无法抗衡星体自引力，实际上，这时候就没有任何力量可以抗衡星体自引力了，星体会急剧地坍缩下去，直至形成一个密度无穷大的奇点，外面再包裹一个事件视界，这也就是形成黑洞。所以黑洞是高质量恒星演化的可能归宿之一。但是，由于它涉及到无穷大的物质密度，所以早期人们一直很抗拒这种可能性。当然，如果密度大到(或者说尺寸小到)这个程度，那就需要考虑量子引力了，人们一般相信，考虑到量子引力以后奇点可能就不再是奇点了，不过，由于完整的量子引力理论今天还没有，所以奇点处到底会发生什么，今天依然是不知道的。

### 估算钱德拉塞卡极限

对于钱德拉塞卡极限的一个大致估计可以通过研究引力能和费米能之间的竞争来进行。为此，不妨假定半径为 $R$ 的球对称星核包含 $N$ 个电子和 $N$ 个质子(所以整体是电中性的)。质子当然比电子重得多，因此承载了星核的绝大部分质量，而更轻的电子气则承载了大部分的压强。

既然电子之间相互排斥，我们不妨假定每个电子占据一个特征尺度为 $\lambda$ 的体积， $\lambda$ 就是电子的波长。由于半径 $R$ 之内共有 $N$ 个电子，所以 $\lambda \sim R/N^{1/3}$ 。利用德布罗意关系式 $p = 2\pi\hbar/\lambda$ ，相应的电子特征动量(也就是费米动量) $p_F$ 为，

$$p_F \sim \hbar/\lambda \sim N^{1/3}\hbar/R. \quad (15.48)$$

假如星核被压缩， $R$ 缩小，从而 $p_F$ 就会增大，相应的费米能也会增大，因此为了完成这种压缩就必须有一个外力做功，这个外力当然就是星核的自引力。为了简单起见，不妨假设这种压缩已经进行到如此地步，以

致于每个电子都在做高速的极端相对论运动，换言之，每个电子的能量为 $E = [(p_{Fc})^2 + (m_e c^2)^2]^{1/2} \approx p_{Fc}$ 。实际上，最重的白矮星正好满足这个假定。因此，星核中的总费米能 $E_F$ (注意，和上面不同，这里不是每个电子的费米能)就近似为

$$E_F \sim N(p_{Fc}) \sim N^{4/3} \hbar c / R. \quad (15.49)$$

另一方面，质子提供了绝大部分质量，因此提供了绝大部分引力能 $E_G$ ，它大约为

$$E_G \sim -G(m_p N)^2 / R. \quad (15.50)$$

其中 $m_p$ 是一个质子的质量， $m_p N$ 就是总质量。注意，引力能是负的。

费米能和引力能都正比于 $1/R$ ，但是两者对 $N$ 的依赖关系不同。如果 $N$ 足够大，则负的引力能将占上风，星核就会坍缩，反之，则是费米能占上风。不难得到，临界的 $N$ 值为

$$N_{\text{crit}} \sim (\hbar c / G m_p^2)^{3/2} \sim 10^{57}. \quad (15.51)$$

相应的星核质量为

$$M_{\text{crit}} \sim N_{\text{crit}} m_p \sim M_\odot. \quad (15.52)$$

当然，更精确的计算表明，这个质量约为 $1.4 M_\odot$ ，这就是钱德拉塞卡极限。精确细致的计算参见温伯格《引力和宇宙学》第11章第11.3节。