

# 目录

<b>第十二章 德西特空间与反德西特空间</b>	<b>2</b>
12.1 德西特和反德西特空间的定义 . . . . .	2
12.2 德西特空间的一些常用坐标以及彭罗斯图 . . . . .	6
12.2.1 整体坐标与彭罗斯图 . . . . .	6
12.2.2 静态坐标以及其它 . . . . .	9
12.3 反德西特空间的一些常用坐标 . . . . .	12

# 第十二章 德西特空间与反德西特空间

陈童

本章将承接前面的章节，系统地介绍一下德西特以及反德西特空间，包括它们的一些常用坐标，以及它们的彭罗斯图。

## 12.1 德西特和反德西特空间的定义

欧几里德号差的最大对称空间

$n$ 维欧几里德空间 $\mathbb{R}^n$ 是一个曲率为零的最大对称空间。除此之外， $n$ 维欧几里德号差的最大对称空间还有截面曲率为正的 $n$ 维球面 $S^n$ ，以及截面曲率为负的 $n$ 维双曲空间 $H^n$ 。

其中 $S^n$ 可以嵌入到 $n+1$ 维欧几里德空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中作为它的一张超曲面。具体来说，取 $z^A = (z^1, z^2, \dots, z^{n+1})$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的笛卡尔坐标， $\mathbb{R}^{n+1}$ 上有如下平坦的黎曼度规

$$ds^2 = (dz^1)^2 + (dz^2)^2 + \dots + (dz^{n+1})^2 = \delta_{AB} dz^A dz^B. \quad (12.1)$$

则 $S^n$ 可以由下面方程定义

$$S^n : (z^1)^2 + \dots + (z^{n+1})^2 = L^2 \Leftrightarrow \delta_{AB} z^A z^B = L^2. \quad (12.2)$$

式中  $L$  为  $S^n$  的半径。 $S^n$  上的黎曼度规可以通过将  $\mathbb{R}^{n+1}$  的平坦度规限制在超曲面  $S^n$  上而诱导得出。

为了证明上面定义的  $S^n$  的确是一个最大对称空间，我们指出它有如下  $(n+1)(n+1-1)/2 = n(n+1)/2$  个基林向量场

$$M_{AB} = z_A \partial_B - z_B \partial_A, \quad (12.3)$$

式中  $z_A \equiv \delta_{AB} z^B = z^A$ 。即  $S^n$  有最大可能数目的线性独立基林向量，从而是最大对称空间。为了验证  $M_{AB}$  的确是基林向量场，我们不妨以  $M_{12} = z^1 \partial_2 - z^2 \partial_1$  为例，它生成的无穷小微分同胚为

$$z^1 \rightarrow z'^1 = z^1 - \epsilon z^2, \quad z^2 \rightarrow z'^2 = z^2 + \epsilon z^1. \quad (12.4)$$

不难看出，在此微分同胚下，有

$$(z'^1)^2 + (z'^2)^2 = (z^1 - \epsilon z^2)^2 + (z^2 + \epsilon z^1)^2 = (z^1)^2 + (z^2)^2. \quad (12.5)$$

从而  $S^n$  的超曲面方程(12.2)在此微分同胚下保持不变，这说明  $M_{12}$  是  $S^n$  的一个切向量。类似的，可以验证度规  $ds^2 = \delta_{AB} dz^A dz^B$  在此微分同胚下也保持不变。从而  $M_{12}$  是  $S^n$  上的一个基林向量。完全类似的， $M_{AB}$  也是  $S^n$  的基林向量，所以  $S^n$  是最大对称空间。实际上， $S^n$  是截面曲率为  $K = 1/L^2$  的最大对称空间。

容易算得  $S^n$  的基林向量场满足如下李代数

$$[M_{AB}, M_{CD}] = \delta_{AD} M_{BC} + \delta_{BC} M_{AD} - \delta_{AC} M_{BD} - \delta_{BD} M_{AC}. \quad (12.6)$$

另一方面，很显然  $n$  维球面在  $\mathbb{R}^{n+1}$  的绕坐标原点的任意旋转之下均保持不变，而且欧氏度规(12.1)也在这个旋转之下保持不变。通常记这样的旋转的集合为  $SO(n+1)$ ，当然，它就是  $S^n$  的等度规群。进而即知，(12.6) 就是  $SO(n+1)$  的李代数。

为了定义  $n$  维双曲空间  $H^n$ ，我们可以引入  $n+1$  维闵可夫斯基时空  $\mathbb{R}^{1,n}$ ，其坐标为  $z^A = (z^0, z^1, \dots, z^n)$ ，相应的度规张量为

$$ds^2 = -(dz^0)^2 + (dz^1)^2 + (dz^2)^2 + \dots + (dz^n)^2 = \eta_{AB} dz^A dz^B. \quad (12.7)$$

式中  $\eta_{AB} = \text{diag}\{-1, 1, \dots, 1\}$ 。 $H^n$  为  $\mathbb{R}^{1,n}$  中的双曲面，由下式定义

$$H^n : -(z^0)^2 + (z^1)^2 + \dots + (z^n)^2 = -L^2 \Leftrightarrow \eta_{AB} z^A z^B = -L^2. \quad (12.8)$$

$H^n$ 上的黎曼度规可以由(12.7)式的度规限制在超曲面 $H^n$ 上而诱导得出。值得注意的是，虽然 $\mathbb{R}^{1,n}$ 是闵可夫斯基号差的，但 $H^n$ 并不是， $H^n$ 的度规其实是欧几里德号差的，即度规张量的本征值全为正。这是因为，在 $H^n$ 上可以利用(12.8)式消去号差为负的变量 $z^0$ 。

类似于 $S^n$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的空间旋转之下保持不变， $H^n$ 在闵可夫斯基时空 $\mathbb{R}^{1,n}$ 的洛伦兹变换下是保持不变的，换言之， $\mathbb{R}^{1,n}$ 的洛伦兹群也是 $H^n$ 的等度规群，通常记作 $SO(1, n)$ （是四维闵可夫斯基时空的洛伦兹群 $SO(1, 3)$ 的推广）。同样类似于 $S^n$ 的情况，不难验证， $H^n$ 有如下 $n(n + 1)/2$ 个线性独立基林向量场（记 $z_A \equiv \eta_{AB} z^B$ ）

$$M_{AB} = z_A \partial_B - z_B \partial_A. \quad (12.9)$$

它们满足的李代数是

$$[M_{AB}, M_{CD}] = \eta_{AD} M_{BC} + \eta_{BC} M_{AD} - \eta_{AC} M_{BD} - \eta_{BD} M_{AC}. \quad (12.10)$$

因此， $H^n$ 也为最大对称空间，实际上， $H^n$ 的截面曲率为 $K = -1/L^2$ 。

### 德西特(de Sitter)空间和反德西特(Anti-de Sitter)空间

下面我们可以引入 $n$ 维德西特空间( $dS_n$ )和反德西特空间 $AdS_n$ 了。

$dS_n$ 其实是 $S^n$ 的推广，是将 $S^n$ 某一个分量的号差由正改成负而得来（因此 $dS_n$ 是闵可夫斯基号差的）。因此， $dS_n$ 可以嵌入 $n + 1$ 维闵可夫斯基时空 $\mathbb{R}^{1,n}$ 中（即把 $\mathbb{R}^{n+1}$ 某一个分量的号差改成负的）。具体来说，设 $\mathbb{R}^{1,n}$ 的坐标为 $z^A = (z^0, z^1, \dots, z^n)$ ，相应的度规张量为

$$ds^2 = -(dz^0)^2 + (dz^1)^2 + (dz^2)^2 + \dots + (dz^n)^2 = \eta_{AB} dz^A dz^B. \quad (12.11)$$

则 $dS_n$ 为 $\mathbb{R}^{1,n}$ 中的“球面”，由下式定义

$$dS_n : -(z^0)^2 + (z^1)^2 + \dots + (z^n)^2 = L^2 \Leftrightarrow \eta_{AB} z^A z^B = L^2. \quad (12.12)$$

$dS_n$ 上的度规可以由(12.11)式诱导得出。不难看出， $dS_n$ 有基林向量场 $M_{AB} = z_A \partial_B - z_B \partial_A$ 。 $dS_n$ 的等度规群为 $SO(1, n)$ 。作为 $\mathbb{R}^{1,n}$ 中的“球面”， $dS_n$ 的截面曲率同样为 $K = 1/L^2$ 。

类似的， $AdS_n$ 其实是 $H^n$ 的推广，是将 $H^n$ 的 $z^n$ 分量的号差由正改成负而得来（因此 $AdS_n$ 是闵可夫斯基号差的）。因此， $AdS_n$ 可以嵌入 $n + 1$ 维时

空 $\mathbb{R}^{2,n-1}$ 中(即把 $\mathbb{R}^{1,n}$ 中 $z^n$ 分量的号差改成负的)。具体来说，设 $\mathbb{R}^{2,n-1}$ 的坐标为 $z^A = (z^0, z^1, \dots, z^n)$ ，相应的度规张量为

$$ds^2 = -(dz^0)^2 + (dz^1)^2 + \dots + (dz^{n-1})^2 - (dz^n)^2 = \eta_{AB} dz^A dz^B. \quad (12.13)$$

式中 $\eta_{AB} = \text{diag}\{-1, 1, \dots, 1, -1\}$ 。则 $AdS_n$ 为 $\mathbb{R}^{2,n-1}$ 中的“双曲面”，由下式定义

$$AdS_n : -(z^0)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (z^i)^2 - (z^n)^2 = -L^2 \Leftrightarrow \eta_{AB} z^A z^B = -L^2. \quad (12.14)$$

作为 $\mathbb{R}^{2,n-1}$ 中的“双曲面”， $AdS_n$ 的截面曲率同样为 $K = -1/L^2$ 。

类似的， $AdS_n$ 上有基林向量场 $M_{AB} = z_A \partial_B - z_B \partial_A$ ， $AdS_n$ 的等度规群为 $\mathbb{R}^{2,n-1}$ 的“洛伦兹群”，记为 $SO(2, n-1)$ 。值得一提的是， $SO(2, n-1)$ 同样是 $n-1$ 维闵可夫斯基时空 $\mathbb{R}^{1,n-2}$ 的共形变换群，这其实也是 $AdS_n/CFT_{n-1}$ 对应成立的一个必要条件。比方说，对于 $n = 5$ 的 $AdS_5$ 情形，其等度规群为 $SO(2, 4)$ ，而 $SO(2, 4)$ 同样是4维闵可夫斯基时空 $\mathbb{R}^{1,3}$ 的共形变换群，这两者的等同是 $AdS_5/CFT_4$ 对应之所以成立的保证之一。

### 德西特空间和反德西特空间作为常曲率空间

上一章中，作为一种常曲率空间，我们已经引入过 $n$ 维德西特空间和 $n$ 维反德西特空间了，而且我们还给出了它们的一种度规，也就是黎曼在其演讲《论几何学之基础假设》中给出的度规。为了看清楚上面对德西特空间和反德西特空间的定义其实与上一章一致，下面我们根据本章的定义重新来推导上一章的那个度规。

先看德西特空间。为此，我们需要作一个投影(本质上是球极投影的一种推广)，即将 $n+1$ 维的坐标 $z^A = (z^0, z^1, \dots, z^n)$ 投影到 $n$ 维的 $x^\mu = (x^0, x^1, \dots, x^{n-1})$ ，这个投影的定义如下

$$z^\mu = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4L^2}} x^\mu, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1 \quad (12.15)$$

以及

$$z^n = L \left( \frac{1 - \frac{x^2}{4L^2}}{1 + \frac{x^2}{4L^2}} \right) \quad (12.16)$$

这里 $x^2 \equiv \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ ，其中 $n$ 维的 $\eta_{\mu\nu}$ 为 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, 1, \dots, 1\}$ 。

要看清上面定义的投影的确满足方程(12.12)，只需注意到

$$\eta_{\mu\nu}z^\mu z^\nu = \frac{x^2}{(1 + \frac{x^2}{4L^2})^2} \Rightarrow \eta_{\mu\nu}z^\mu z^\nu + (z^n)^2 = L^2. \quad (12.17)$$

进而，可以根据上面的投影定义直接验证 $dS_n$ 上的度规为

$$ds^2 = \eta_{AB}dz^A dz^B = \eta_{\mu\nu}dz^\mu dz^\nu + (dz^n)^2 = \frac{\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}{(1 + \frac{x^2}{4L^2})^2}. \quad (12.18)$$

这正好是上一章给出的度规！这也验证了，德西特时空的截面曲率的确为 $K = 1/L^2$ 。

反德西特空间是类似的。不过，这时候 $n+1$ 维坐标 $z^A = (z^0, z^1, \dots, z^n)$ 到 $n$ 维坐标 $x^\mu = (x^0, x^1, \dots, x^{n-1})$ 的投影应该定义为

$$z^\mu = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4L^2}} x^\mu, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1 \quad (12.19)$$

以及

$$z^n = L \left( \frac{1 + \frac{x^2}{4L^2}}{1 - \frac{x^2}{4L^2}} \right). \quad (12.20)$$

不难验证，这的确满足方程(12.14)。进而可以算得 $AdS_n$ 上的度规为

$$ds^2 = \eta_{AB}dz^A dz^B = \eta_{\mu\nu}dz^\mu dz^\nu - (dz^n)^2 = \frac{\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}{(1 - \frac{x^2}{4L^2})^2}. \quad (12.21)$$

这正好是上一章给出的度规！这也验证了，反德西特时空的截面曲率的确为 $K = -1/L^2$ 。

## 12.2 德西特空间的一些常用坐标以及彭罗斯图

下面我们介绍 $dS_n$ 的一些常用坐标，并讨论 $dS_n$ 的彭罗斯图。

### 12.2.1 整体坐标与彭罗斯图

#### 整体坐标

先从 $dS_n$ 的所谓整体坐标入手。为了引入整体坐标，让我们先观察定义德西特超曲面的方程(12.12)，重写如下

$$dS_n : -(z^0)^2 + (z^1)^2 + \dots + (z^n)^2 = L^2. \quad (12.22)$$

从这个方程可以看出 $dS_n$ 其实是一个拓扑为 $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ 的双曲面，其中 $\mathbb{R}$ 为时间方向，由坐标 $z^0$ 参数化。给定时间 $z^0$ ，相应的空间 $n-1$ 维球面 $S^{n-1}$ 由下式给出

$$(z^1)^2 + \dots + (z^n)^2 = L^2 + (z^0)^2 = \text{常数} > 0. \quad (12.23)$$

超曲面方程(12.22)显然可以通过如下参数化方式解出来，即定义

$$z^0 = L \sinh \tau, \quad z^a = L n^a \cosh \tau, \quad (12.24)$$

式中 $a = 1, 2, \dots, n$ ,  $n^a$ 是定义 $n-1$ 维单位球面的 $n$ 维单位向量， $n^a$ 满足

$$\delta_{ab} n^a n^b = 1, \quad \delta_{ab} n^a d n^b = 0, \quad \delta_{ab} d n^a d n^b = d\Omega_{n-1}^2, \quad (12.25)$$

式中 $d\Omega_{n-1}^2$ 表示 $n-1$ 维单位球面上的标准度规。进而不难得到， $dS_n$ 的度规可以表示为

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[ -(dz^0)^2 + \sum_{a=1}^n (dz^a)^2 \right] |_{dS_n} \\ &= L^2 \left[ -d\tau^2 + \cosh^2 \tau d\Omega_{n-1}^2 \right]. \end{aligned} \quad (12.26)$$

在上述整体坐标中，明显的对称性是 $S^{n-1}$ 的旋转对称性，也即是完整的等度规群 $SO(1, n)$ 中的 $SO(n)$ 子群。

与(12.26)式相应的，欧几里得号差的最大对称空间 $S^n$ 上的相应度规可以由(12.26)式通过将时间 $\tau$ “维克旋转”到虚时间而得到，即

$$\tau \equiv i\theta \Rightarrow -d\tau^2 + \cosh^2 \tau d\Omega_{n-1}^2 \rightarrow d\theta^2 + \cos^2 \theta d\Omega_{n-1}^2 = d\Omega_n^2. \quad (12.27)$$

这告诉我们闵氏号差的 $dS_n$ 和欧氏号差的 $S^n$ 其实只相差一个“维克旋转”。

### 彭罗斯图和视界

为了讨论 $dS_n$ 的彭罗斯图，我们引入共形时间 $\eta$ ，其定义为

$$d\eta = \frac{d\tau}{\cosh \tau}, \quad (12.28)$$

不难验证这相当于

$$\cos \eta = \frac{1}{\cosh \tau}, \quad \tau \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow \eta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (12.29)$$

引入共形时间后，即可将度规(12.26)式重写成

$$\begin{aligned} ds^2 &= L^2 \cosh^2 \tau \left( -\frac{d\tau^2}{\cosh^2 \tau} + d\Omega_{n-1}^2 \right) \\ &= \frac{L^2}{\cos^2 \eta} (-d\eta^2 + d\Omega_{n-1}^2). \end{aligned} \quad (12.30)$$

因此，如果我们取共形因子  $\Omega = \frac{1}{L} \cos \eta$ ，则由(12.30)式可见， $dS_n$  外尔等价于具有如下度规的所谓爱因斯坦静态宇宙  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times S^{n-1}$

$$ds^2 = \Omega^2 ds^2 = -d\eta^2 + d\Omega_{n-1}^2. \quad (12.31)$$

由共形紧化的定义， $dS_n$  的无穷远对应  $\Omega = 0$  的地方，也就是对应

$$\eta = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (12.32)$$

通常称  $\eta = \frac{\pi}{2}$  为未来无穷，记作  $\mathcal{I}^+, i^+$ ，因为在现在的情形中类时未来无穷和类光未来无穷合并在一起了；称  $\eta = -\frac{\pi}{2}$  为过去无穷，记作  $\mathcal{I}^-, i^-$ ，因为类时过去无穷和类光过去无穷合并了。

为了画出  $dS_n$  的彭罗斯图，通常进一步将空间部分的  $d\Omega_{n-1}^2$  写成  $d\Omega_{n-1}^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega_{n-2}^2$ ，这里  $\chi \in [0, \pi]$ ， $\chi = 0$  对应  $S^{n-1}$  的北极， $\chi = \pi$  对应  $S^{n-1}$  的南极。从而  $dS_n$  外尔等价于

$$ds^2 = -d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega_{n-2}^2. \quad (12.33)$$

因此，我们可以在  $(\eta, \chi)$  平面上画出  $dS_n$  的彭罗斯图，如图(12.1)(图中每一个点代表一个  $n-2$  维球面)。

注意，彭罗斯图中左侧的直线  $\chi = 0$  和右侧的直线  $\chi = \pi$  并非时空的边界，而只是空间部分  $S^{n-1}$  的北极和南极。

现在，考虑一个位于北极  $\chi = 0$  的观察者，这个观察者将有一个事件视界(event horizon)，它也即是此观察者能够从中接收到信号的时空区域的边界。同时，北极观察者还有一个粒子视界(particle horizon)，它也即是此观察者能够通过发射信号影响的区域的边界。如图(12.2)所示。北极观察者能够接收信号的区域和能够影响的区域的交集称作北极的因果菱形(causal diamond)，即图(12.2)中右侧的图的红色部分。

不难看出，北极观察者的事件视界和粒子视界分别是彭罗斯图上的两条对角线，它们满足方程

$$\chi = \pm(\eta - \frac{\pi}{2}). \quad (12.34)$$

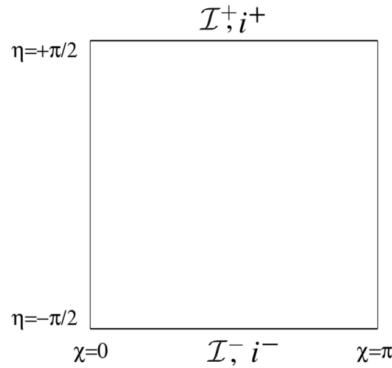
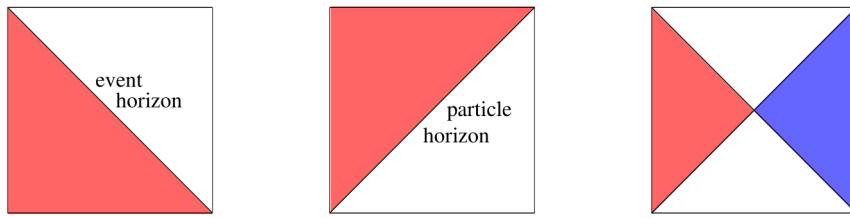
图 12.1:  $dS_n$  的彭罗斯图, 图中每一个点代表一个  $n - 2$  维球面。

图 12.2: 左边的图表示北极观察者能够看到的时空区域, 其边界即是这个观察者的事件视界。中间的图表示北极观察者能够通过发射信号影响的时空区域, 其边界即是这个观察者的粒子视界。右边这幅图的红色部分表示北极观察者的因果菱形, 蓝色部分表示南极观察者的因果菱形。

### 12.2.2 静态坐标以及其它

在  $dS_n$  的整体坐标中, 度规场显然是依赖于时间  $\tau$  的, 然而,  $dS_n$  上还可以引入一组适当的局部坐标(而不是整体坐标), 其中度规场不依赖于时间, 甚至是静态的, 这就是所谓的静态坐标。

为了引入静态坐标, 我们将(12.22)式重写为

$$\sum_{k=1}^{n-1} (z^k)^2 = (z^1)^2 + \dots + (z^{n-1})^2 = L^2 + (z^0)^2 - (z^n)^2. \quad (12.35)$$

然后，通过下式定义空间径向坐标 $r$

$$r^2 \equiv \sum_{k=1}^{n-1} (z^k)^2 \Rightarrow (z^n)^2 - (z^0)^2 = L^2 \left(1 - \frac{r^2}{L^2}\right). \quad (12.36)$$

假如 $r \leq L$ ，则根据上式可以自然地定义

$$\begin{aligned} z^k &= rn^k, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \\ z^0 &= L \left(1 - \frac{r^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sinh\left(\frac{t}{L}\right), \quad z^n = L \left(1 - \frac{r^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cosh\left(\frac{t}{L}\right), \end{aligned} \quad (12.37)$$

式中 $n^k$ 为 $n-1$ 维单位向量，它定义了一个 $n-2$ 维单位球面。根据上面的定义，即可以得到 $dS_n$ 的度规为

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(dz^0)^2 + (dz^n)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (dz^k)^2 \\ &= -(1 - \frac{r^2}{L^2}) dt^2 + (1 - \frac{r^2}{L^2})^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{n-2}^2. \end{aligned} \quad (12.38)$$

这就是 $dS_n$ 的静态度规，它也正是第10章中解出来的德西特度规。

显然， $r = L$ 是一个德西特视界，同时也是基林向量场 $\xi = \partial_t$ 的基林视界。根据(12.37)式，也有

$$\begin{aligned} \xi &= \partial_t = \frac{\partial z^A}{\partial t} \partial_A = \frac{1}{L} (z^n \partial_0 + z^0 \partial_n) \\ &= \frac{1}{L} (z_n \partial_0 - z_0 \partial_n) = \frac{1}{L} M_{n0}. \end{aligned} \quad (12.39)$$

所以， $\xi$ 正比于 $M_{n0}$ ，是 $dS_n$ 的基林向量场之一。

为了看清楚静态坐标所覆盖的区域，我们由(12.37)式，有

$$z^n + z^0 = L \left(1 - \frac{r^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{t/L} \geq 0, \quad z^n - z^0 = L \left(1 - \frac{r^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-t/L} \geq 0. \quad (12.40)$$

所以静态坐标仅仅覆盖 $z^n \geq |z^0|$ 的四分之一时空。 $r = L$ 的德西特视界就是这四分之一时空的边界。

下面考察 $r \rightarrow L$ 时，坐标如何趋于德西特视界。为此令 $r = L(1 - \epsilon^2/2)$ ( $\epsilon$ 为无穷小量)，代入(12.40)式，即有

$$z^n + z^0 = \epsilon e^{t/L}, \quad z^n - z^0 = \epsilon e^{-t/L}. \quad (12.41)$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 如果同时令 $\epsilon e^{t/L} \rightarrow$ 有限(即同时取 $t \rightarrow \infty$ ), 则显然有 $\epsilon e^{-t/L} \rightarrow 0$ , 这时的德西特视界为

$$z^n = z^0, \quad z^n + z^0 = \text{有限}. \quad (12.42)$$

反过来, 若当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 同时令 $\epsilon e^{-t/L} \rightarrow$ 有限(即同时取 $t \rightarrow -\infty$ ), 则必然有 $\epsilon e^{t/L} \rightarrow 0$ , 这时的德西特视界为

$$z^n = -z^0, \quad z^n - z^0 = \text{有限}. \quad (12.43)$$

总之, 静态坐标的德西特视界必然满足 $z^n = \pm z^0$ 。

翻译到整体坐标中, 根据整体坐标的定义(12.24), 这时候有

$$z^0 = L \sinh \tau, \quad z^n = L \cosh \tau \cos \chi, \quad (12.44)$$

式中 $\chi$ 为 $n - 1$ 维单位球面上的极角。因此 $z^n = \pm z^0$ 相当于

$$\begin{aligned} \cosh \tau \cos \chi &= \pm \sinh \tau \Rightarrow \cos \chi = \pm \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau} = \pm \sin \eta \\ &\Rightarrow \chi = \pm(\eta - \frac{\pi}{2}). \end{aligned} \quad (12.45)$$

这正好是上一小节中北极的事件视界和粒子视界所满足的方程! 所以, 北极的事件视界和粒子视界正好就是静态坐标的德西特视界。

实际上, 容易进一步验证, 静态坐标中的 $r = 0$ 就相当于整体坐标中的北极 $\chi = 0$ , 进而沿着 $r = 0$ 的静止世界线有 $t/L = \tau$ , 这也正好就是上一小节中北极观察者的世界线。综上可知, 静态坐标其实仅仅覆盖了北极的因果菱形! 它正好是德西特彭罗斯图的四分之一。

### 庞加莱坐标

还有一种坐标也很常用, 即所谓的庞加莱坐标。为了定义庞加莱坐标, 我们引入空间坐标 $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^{n-1})$ , 并定义

$$\begin{aligned} z^n - z^0 &= Le^{-t} \geq 0, \quad z^n + z^0 = L(e^t - \mathbf{x}^2 e^{-t}) \\ z^k &= Le^{-t} x^k, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (12.46)$$

注意到 $(z^n)^2 - (z^0)^2 = (z^n - z^0)(z^n + z^0) = L^2 - L^2 \mathbf{x}^2 e^{-2t}$ , 由此不难验证上面的定义满足(12.22)式。进而可以求出相应的 $dS_n$ 度规, 为

$$ds^2 = L^2(-dt^2 + e^{-2t} d\mathbf{x}^2). \quad (12.47)$$

由于有  $z^n - z^0 \geq 0$ , 所以上面的坐标仅仅覆盖了整个  $dS_n$  的一半。但是上面的坐标还不是庞加莱坐标, 为了进一步引入庞加莱坐标, 我们将(12.47)重写为

$$ds^2 = L^2 e^{-2t} (-e^{2t} dt^2 + d\mathbf{x}^2). \quad (12.48)$$

进而只要定义  $\tau \equiv e^t \geq 0$ , 则有

$$ds^2 = L^2 \frac{1}{\tau^2} (-d\tau^2 + d\mathbf{x}^2). \quad (12.49)$$

最终的这个度规就是  $dS_n$  的庞加莱度规, 相应的坐标即是庞加莱坐标。很显然, 在庞加莱坐标中,  $\tau = 0$  是时空的共形边界, 相应于过去无穷  $\mathcal{I}^-, i^-$ , 未来无穷所在的那一半区域没有被庞加莱坐标覆盖。

### 12.3 反德西特空间的一些常用坐标

$AdS_n$  空间的坐标可以类似于前面  $dS_n$  情形处理。为此我们从方程(12.14)开始, 将之重写如下

$$AdS_n : -(z^0)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (z^k)^2 - (z^n)^2 = -L^2. \quad (12.50)$$

稍微调整一下, 也可以写成

$$(z^0)^2 + (z^n)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} (z^k)^2 + L^2. \quad (12.51)$$

不难看出这个空间具有拓扑  $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ , 因为对于  $\mathbb{R}^{n-1}$  上给定  $z^k$  的点, 上面方程描述了  $(z^0, z^n)$  平面上的一个圆周  $S^1$ 。由于度规在  $(z^0, z^n)$  平面上是负定的, 这表明这个  $S^1$  是闭合类时曲线。具有闭合类时曲线的时空, 其因果性是有问题的。为了避免这个问题, 我们可以取上述时空的万有覆盖空间, 也就是将时间圆周  $S^1$  替换成  $\mathbb{R}$ , 即  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ 。实际上, 我们通常所谓的  $AdS$  时空都是指这个覆盖空间。

#### 整体坐标

为了定义  $AdS_n$  的整体坐标, 我们取(12.51)式的如下解

$$(z^0)^2 + (z^n)^2 = L^2 \cosh^2 \rho, \quad \sum_{k=1}^{n-1} (z^k)^2 = L^2 \sinh^2 \rho. \quad (12.52)$$

进一步，可以取如下参数化

$$z^0 = L \cosh \rho \sin \tau, \quad z^n = L \cosh \rho \cos \tau, \quad z^k = L n^k \sinh \rho, \quad (12.53)$$

式中  $n^k$  为  $(n - 1)$  维单位矢量，它定义了一个  $n - 2$  维单位球面。根据上面的参数化不难得到如下  $AdS_n$  的度规

$$ds^2 = L^2 \left[ -\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{n-2}^2 \right]. \quad (12.54)$$

这就是所谓的  $AdS_n$  的整体坐标，其中  $\rho$  的取值范围是  $[0, +\infty)$ ， $\tau$  的取值范围本来是  $[0, 2\pi]$ ，忽略  $2\pi$  周期等同进而过渡到万有覆盖空间以后就变成了  $\tau \in (-\infty, +\infty)$ 。

假设定义  $r \equiv L \sinh \rho$ ，并定义  $t \equiv L\tau$ ，则度规(12.54)就变成了

$$ds^2 = -(1 + \frac{r^2}{L^2}) dt^2 + (1 + \frac{r^2}{L^2})^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{n-2}^2. \quad (12.55)$$

这正是我们在第十章中得出爱因斯坦场方程的  $AdS$  解时解出来的度规，它是静态  $dS$  度规的对应物。

### 彭罗斯图以及共形边界

我们可以将  $AdS_n$  的整体度规重写作

$$ds^2 = L^2 \cosh^2 \rho \left[ -d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{\cosh^2 \rho} + \tanh^2 \rho d\Omega_{n-2}^2 \right]. \quad (12.56)$$

通过下式引入一个新的径向坐标  $\psi$

$$d\psi = \frac{d\rho}{\cosh \rho}. \quad (12.57)$$

这个方程的解是

$$\cos \psi = \frac{1}{\cosh \rho}. \quad (12.58)$$

由于  $\rho \in [0, +\infty)$ ，所以

$$\cosh \rho \in [1, +\infty) \Rightarrow \psi \in [0, \frac{\pi}{2}). \quad (12.59)$$

由

$$\cosh \rho = \frac{1}{\cos \psi} \Rightarrow \sinh \rho = \tan \psi, \tanh \rho = \sin \psi, \quad (12.60)$$

从而可以将度规变成

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{L^2}{\cos^2 \psi} [-d\tau^2 + d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Omega_{n-2}^2] \\ &= \frac{L^2}{\cos^2 \psi} [-d\tau^2 + d\Omega_{n-1}^2]. \end{aligned} \quad (12.61)$$

从上面的结果可以看出,  $AdS_n$ 时空外尔等价于

$$d\tilde{s}^2 = -d\tau^2 + d\Omega_{n-1}^2, \quad 0 \leq \psi < \frac{\pi}{2}. \quad (12.62)$$

也即是说,  $AdS_n$ 外尔等价于爱因斯坦静态宇宙(它有 $0 \leq \psi \leq \pi$ )的一半。给定时间 $\tau$ , 空间超曲面是一个 $n-1$ 维的半球, 边界在 $\psi = \frac{\pi}{2}$ 处(它显然不在时空本身的定义域内), 这个空间边界当然是一个 $n-2$ 维球面 $S^{n-2}$ 。 $\psi = \frac{\pi}{2}$ 也是共形因子 $\Omega = \cos \psi / L = 0$ 的地方, 因此对应 $AdS_n$ 的共形边界, 记作 $\mathcal{I}$ 。

从(12.61)式可以看出, 这个共形边界 $\mathcal{I}$ 是类时的, 具有度规

$$d\tilde{s}^2|_{\psi=\pi/2} = -d\tau^2 + d\Omega_{n-2}^2. \quad (12.63)$$

所以 $\mathcal{I}$ 的拓扑是

$$\mathcal{I} \simeq \mathbb{R} \times S^{n-2}. \quad (12.64)$$

它可以看作是对 $n-1$ 维闵可夫斯基时空 $\mathbb{R}^{1,n-2}$ 的空间部分作了一个共形紧化

$$\mathbb{R}^{1,n-2} \rightarrow \mathbb{R} \times S^{n-2}. \quad (12.65)$$

$\mathcal{I}$ 其实是未来类光无穷、过去类光无穷、以及类空无穷结合起来的产物。

可以在 $(\tau, \psi)$ 平面上画出 $AdS_n$ 的彭罗斯图, 如图(12.3)左图。图中与竖直方向成45度角的那些直线代表类光测地线。由于 $\tau$ 无限延伸, 而 $\psi$ 有限, 所以很难在保持光线沿着45度角方向的前提下进一步将整幅彭罗斯图压缩到一个有限区域内, 因为一旦我们将 $\tau$ 压缩到有限了, 那就一定会同时把整个 $\psi$ 轴压缩成一个点, 最后的结果将如图(12.3)右图。我们通常不会这么做, 通常我们就将图(12.3)的左图当作 $AdS_n$ 的彭罗斯图, 虽然它的 $\tau$ 方向向两端无限延伸。注意, 图(12.3)中左边 $\psi = 0$ 的那条直线并不是 $AdS_n$ 的边界, 而只是 $\psi = 0$ 的径向坐标的坐标原点。

从彭罗斯图中可以清楚地看到, 光线可以在有限的坐标时内抵达共形边界 $\mathcal{I}$ 。这意味着, 取 $AdS_n$ 的任意一个空间截片 $\Sigma$ (如图(12.3)所示), 在 $\Sigma$ 的

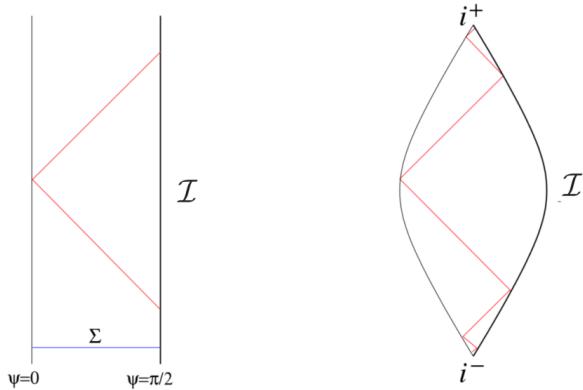


图 12.3: 反德西特时空的彭罗斯图, 图中每一个点代表一个 $n - 2$ 维球面。

未来一定存在一些点, 它的某一些过去指向的因果线(类光测地线)在过去并不会与 $\Sigma$ 相交, 而是跑到共形边界 $\mathcal{I}$ 上去了。这意味着,  $\Sigma$ 上的初始数据并不足以决定场位形在这些未来点处的值, 换言之,  $AdS_n$ 不是整体双曲时空! (关于整体双曲的定义, 请参见第九章在介绍强宇宙监督猜测时的讲述。)

为了决定场位形在整个 $AdS$ 时空的演化, 我们不仅需要初始数据, 还需要在 $\mathcal{I}$ 上指定合适的边界条件, 比方说让 $\mathcal{I}$ 完美地反射光线等等。由于需要在共形边界 $\mathcal{I}$ 上给定边界条件, 这也就意味着, 可以有一些场本身就生存在 $\mathcal{I}$ 上。特别的, 可以在 $\mathcal{I}$ 上定义共形场论。这些事实, 结合 $AdS_5$ 的等度规群(即 $SO(2, 4)$ ) 与边界四维闵氏时空的共形群相同的事, 对于 $AdS/CFT$ 对应的引入起到了重要作用。 $AdS/CFT$ 对应说的就是 $AdS$ 时空的量子引力理论等价于共形边界 $\mathcal{I}$ 上的一个没有引力的共形场论。

### 庞加莱坐标

和 $dS$ 时空一样,  $AdS$ 时空也有一组庞加莱坐标。为了定义它, 我们注意到下式可以满足定义了 $AdS$ 时空的(12.50)式

$$\begin{aligned} z^\alpha &= Lrx^\alpha, & z^n - z^{n-1} &= Lr \\ z^n + z^{n-1} &= L(r^{-1} + r\eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta). \end{aligned} \tag{12.66}$$

式中 $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n - 2$ 。利用上式，可以将AdS的度规改写成

$$\begin{aligned} ds^2 &= L^2 \left( \frac{dr^2}{r^2} + r^2 \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \right) \\ &= L^2 (d\rho^2 + e^{2\rho} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta) \quad (r = e^\rho) \\ &= L^2 \frac{1}{z^2} (\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + dz^2) \quad (r = z^{-1}). \end{aligned} \quad (12.67)$$

最后一行的度规就是庞加莱度规，相应的坐标就是庞加莱坐标。

$z = 0$ 就对应AdS的共形边界，很显然，共形边界具有标准的闵氏度规

$$\tilde{ds^2}|_{z=0} = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (12.68)$$

这个结果表面看起来与(12.63)式有点出入，因为(12.68)式并不与(12.63)式微分同胚等价，但是两者共形等价，也就是说，在合适的微分同胚变换下，两者只相差一个外尔共形因子。实际上，共形紧化手续并不能唯一决定共形边界上的度规，因为共形紧化时所乘的共形因子 $\Omega$ 并不是唯一的，这导致共形紧化只能将边界上的度规确定到一个共形等价类，而(12.63)式与(12.68)式正是属于同一个共形等价类，所以两者并不矛盾。同时，这也是为什么共形边界上只能定义共形场论的原因，因为只有共形场论才不依赖于确定的背景度规，而只依赖于背景度规的一个共形等价类。