

# 目录

|   |          |
|---|----------|
| <b>第九章 黑洞基础</b>                             | <b>2</b> |
| 9.1 黑洞视界 . . . . .                          | 3        |
| 9.1.1 视界的定义 . . . . .                       | 3        |
| 9.1.2 近视界几何 . . . . .                       | 7        |
| 9.1.3 基林(Killing)视界 . . . . .               | 9        |
| 9.1.4 表面引力与霍金温度 . . . . .                   | 13       |
| 9.2 克鲁斯卡延拓 . . . . .                        | 14       |
| 9.2.1 克鲁斯卡延拓的一般原理 . . . . .                 | 14       |
| 9.2.2 施瓦西黑洞的克鲁斯卡延拓 . . . . .                | 19       |
| 9.2.3 Reissner-Nordstrom黑洞的克鲁斯卡延拓 . . . . . | 26       |
| 9.2.4 Eddington-Finkelstein坐标 . . . . .     | 29       |
| 9.3 彭罗斯图 . . . . .                          | 33       |
| 9.3.1 外尔变换 . . . . .                        | 34       |
| 9.3.2 闵可夫斯基时空的彭罗斯图 . . . . .                | 36       |
| 9.3.3 施瓦西时空的彭罗斯图 . . . . .                  | 40       |
| 9.3.4 RN解的彭罗斯图 . . . . .                    | 45       |

# 第九章 黑洞基础

陈童

米歇尔和拉普拉斯曾经论证，天体的引力可以大到连光都无法逃逸，因此这样的天体可能是看不见的。这就是人类最早对黑洞的想象，当然他们的论证依赖于牛顿力学，尤其是它假设光是一种有质量的粒子，因此这个论证在细节上当然是不对的。正确的论证需要用到广义相对论，尤其是从施瓦西解中，我们可以论证当星体的半径小于其施瓦西半径 $r_g = 2GM$ 时，它就会成为一个黑洞。所以，广义相对论允许黑洞的存在，然而理论允许并不等于黑洞真的会存在，因为如何论证星体的半径真的可以小于其施瓦西半径是一个问题，从而论证黑洞真的会存在是一个远为复杂的问题，对此，我们推迟到后面的章节再进行一些讨论。本节先讨论施瓦西解如何描述一个被允许存在的黑洞，称作施瓦西黑洞。

关于黑洞，最重要的一件事情也许是存在一个事件视界，本章将以施瓦西黑洞为例，详细讨论黑洞视界的方方面面。

本章要讨论的第二个问题是组性质非常好的坐标系，称作克鲁斯卡坐标。用克鲁斯卡坐标来描述施瓦西解就称作施瓦西解的克鲁斯卡延拓。除了施瓦西解的延拓之外，我们还会使用统一的办法讨论Reissner-Nordstrom黑洞(RN黑洞)的克鲁斯卡延拓。

本节要讨论的第三个问题是关于时空的整体结构，尤其是因果结构。我们将讨论，如何在不破坏因果结构的情况下，像画地图一样，将整个时空画在一张图上。这样的时空地图即是由彭罗斯和卡特引入的彭罗斯图。本节将详细讨论平坦的闵可夫斯基时空的彭罗斯图，以及施瓦西黑洞和RN黑洞的彭罗斯图。

## 9.1 黑洞视界

### 9.1.1 视界的定义

#### 事件视界

首先写出施瓦西解,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (9.1)$$

用上一章的记号即是  $A(r) = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$ ,  $B(r) = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}$ , 从而  $AB = 1$ 。显然, 函数  $A(r)$  在  $r = r_g$  处是一个一阶零点, 即在  $r_g$  附近, 有

$$A(r) \sim (2\kappa) \cdot (r - r_g) + \dots \quad (9.2)$$

显然, 在这里  $\kappa = 1/(2r_g) = 1/(4GM)$ , 注意它和前面章节中出现的符号  $\kappa$  不是同一个东西。

在上一章中, 我们都是假设星体的半径大于甚至远大于其施瓦西半径  $r_g = 2GM$ , 然后施瓦西解描述的是星体的外部时空, 所以在上一章中, 恒有  $r > r_g$ 。现在, 我们假设星体的半径小于  $r_g$ , 甚至极端一点, 我们假设星体是  $r = 0$  处的一个质点, 然后问, 现在施瓦西解描述的时空有何奇异之处?

最显眼的一个奇异之处, 从(9.1)式可以看到: 当  $r > r_g$  时,  $g_{tt} = -(1 - \frac{r_g}{r}) < 0$ , 而  $g_{rr} = (1 - \frac{r_g}{r})^{-1} > 0$ , 所以,  $t$  是时间坐标, 而  $r$  是空间坐标, 这和我们的预期一致。但是, 当  $r < r_g$  时却有,  $g_{tt} > 0$ , 而  $g_{rr} < 0$ , 所以, 这时候实际上  $r$  变成了时间坐标, 而  $t$  变成了空间坐标。即是说, 在  $r = r_g$  处, 时间和径向空间互换了!

值得注意的是, 这种时空互换并不意味着观察者在穿过  $r = r_g$  处的球面往中心掉落时其时钟会变成米尺而米尺会变成时钟。不会有这种戏剧性的事件发生, 之所以我们有这种错觉, 是因为我们选择了施瓦西  $(t, r)$  坐标的原因, 这个坐标在  $r = r_g$  处是奇异的, 因为  $g_{tt}(r_g) = 0, g_{rr}(r_g) = \infty$ , 所以这个坐标可以覆盖  $r < r_g$  的区域, 也可以覆盖  $r > r_g$  的区域, 但却不能同时覆盖两者, 如果你让它同时覆盖这两者, 那就会产生上面的错觉。后文我们将会讨论能够同时覆盖两个区域的时空坐标。

但是, 在经典物理中, 时间和空间性质有根本性的不同, 空间是可以前进也可以后退的, 但是时间却是单向的! 这就说明, 对于施瓦西解描

述的时空而言，一旦过了 $r = r_g$ 处的球面，身处 $r < r_g$ 的区域，则由于 $r$ 方向变成了时间方向，因此沿着 $r$ 方向走只可能有两种选择(这两种选择互为对方的时间反演)：要么 $r$ 减少的方向为时间前进方向，这时所有粒子都单向地朝着 $r$ 减少的方向前进，直至 $r = 0$ 的时间终点，这就是黑洞，这时 $r < r_g$ 的区域就叫黑洞区域；要么 $r$ 增加的方向为时间前进方向，这时候 $r = 0$ 就变成了时间起点，所有粒子都从这里出发单向地朝 $r = r_g$ 的球面前进，然而穿过这个球面跑到外面的区域，这就是所谓的白洞！当然，白洞通常被认为不是物理的，因为黑洞可以由恒星发生引力坍缩而形成，但却并没有形成白洞的物理机制。

为了将施瓦西解和黑洞的定义(光无法逃逸)联系起来，我们考察光在施瓦西时空中的运动，由上一章的式子(并代入 $AB = 1$ )，

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{B}\left(\frac{l^2}{r^2}\right) - \frac{\epsilon^2}{AB} &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + A(r)\left(\frac{l^2}{r^2}\right) - \epsilon^2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.3)$$

在 $r = r_g$ 处，由于有 $A(r_g) = 0$ ，所以显然 $\frac{dr}{d\lambda}|_{r_g} = \pm\epsilon$ ，这说明在跟着光子一起运动的参考系看来， $r = r_g$ 处并没有什么特殊的地方，因为光子在此处的径向速度很正常。所以，从跟着光子一起运动的参考系来看，光子(其它物质粒子也一样)可以正常地穿过 $r = r_g$ 的球面。

下面，我们从空间无穷远处的静止观察者的角度来看 $r = r_g$ 处。从(9.1)式可以看到，对于无穷远处的静止观察者而言，时间 $t$ 其实就是其经历的固有时。结合上一章的式子 $\frac{dt}{d\lambda} = \frac{\epsilon}{A}$ 和上面的(9.3)式，可以得到

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + A^2\left[A\frac{1}{r^2}\frac{l^2}{\epsilon^2} - 1\right] = 0.$$

所以，在 $r = r_g$ 附近，有 $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \sim A^2 \sim (2\kappa)^2(r - r_g)^2$ 。也即是说，在无穷远处的静止观察者看来，光子在 $r_g$ 附近会运动得越来越慢，甚至在 $r = r_g$ 处，光速会减小到零，所以，无穷远处的静止观察者无法看到光穿越 $r = r_g$ 这个球面。不仅无法看到光穿越它，类似的分析同样告诉我们，无穷远处的静止观察者也无法看到任何物质粒子穿越 $r = r_g$ 这个球面。由于看不到光穿越 $r = r_g$ ，所以 $r < r_g$ 的区域对于无穷远处的静止观察者而言当然是黑暗的，光无法从这个区域逃逸到无穷远处去，这就是黑洞！ $r = r_g$ 处的球面随着时间演化在时空中扫过的柱形世界面就称作黑洞事件视界！它就是无穷远处的静止观察者能够看到的时空区域的边界，越过边界就是黑洞区域。

反过来也一样，无穷远处的观察者并不能看到外面的粒子真正掉进黑洞区域，在无穷远处的观察者看来，当粒子不断接近视界面时，其速度会越来越缓慢，直至无限趋近于零，因此他并不能看到粒子真正掉进去，只能看到粒子越来越慢越来越接近 $r = r_g$ 的视界面，在无穷远处的观察者看来，粒子需要无穷长的时间才能真正到达视界面。

视界面还有另外一种定义，为了说清楚这种定义(对于施瓦西解)，不妨考察一族由方程 $f(r) = c$ 所描述的超曲面( $c$ 为这一族超曲面的参数)，其中 $f(r)$ 是径向坐标的某个函数，比方说如果 $f(r) = r - r_g$ ，那么视界面就对应 $c = 0$ 。这样的超曲面簇自然有一个余法向量 $n_\mu$ ，

$$n_\mu = \partial_\mu f(r). \quad (9.4)$$

比方说对于 $f(r) = r - r_g$ ，在 $(t, r, \theta, \phi)$ 的坐标系中

$$n_\mu = (0, 1, 0, 0), \quad (9.5)$$

即是说，它只有径向分量 $n_r = 1$ ，其余分量都是零。这个余法向量在视界面上是一个类光向量，因为，

$$g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = g^{rr} (\partial_r f(r))^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (\partial_r f(r))^2, \quad (9.6)$$

这个表达式限制在 $r = r_g$ 的视界面上显然为零，满足 $(g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu)|_{r_g} = 0$ 。

从上面的计算可以看出，在视界面的外面，即 $r > r_g$ 时，余法向量类空，即满足 $g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu > 0$ ，这表示沿着 $f(r) = c$ 超曲面的法向是一个空间方向，沿着这个方向可以前进也可以后退。但是，在视界面以内，即 $r < r_g$ 的黑洞区域，余法向量类时，即满足 $g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu < 0$ ，这表示这时候 $f(r) = c$ 超曲面的法向是一个时间方向，因此有单向性，对于黑洞，只能沿着法向朝 $r$ 减小的方向前进。因此，人们也称黑洞区域的 $f(r) = c$ 超曲面为**单向膜**，而**黑洞事件视界**，就是单向膜区开始的那个超曲面。

所以，黑洞存在一个事件视界面，它其实有非常特殊的性质。但是(9.1)式的 $(t, r, \theta, \phi)$ 坐标系无法仔细地考察这些性质，因为这个坐标系在 $r = r_g$ 处是奇异的，它的 $g_{tt}|_{r_g} = 0$ 而 $g_{rr}|_{r_g} = \infty$ 。这些奇异性导致，比方说，时空上的余切向量 $n_\mu = (0, 1, 0, 0)$ 在视界面上的对偶向量为零，即 $n^\mu|_{r_g} = 0$ (因为 $g^{rr}|_{r_g} = 0$ )，类似的，切向量 $\xi = \partial_t$ ，即 $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ 在视界面上的对偶向量也为零(因为 $g_{tt}|_{r_g} = 0$ )。一个非零向量的对偶向量却是零，这当然是病态的，这种病态源自于 $(t, r)$ 坐标在 $r = r_g$ 处的奇异性。

后文将会讨论一些在视界面上也定义良好的其它坐标系，比如说后文将要研究的近视界几何中的 $(V, U)$ 光锥坐标系，以及后面将要详细讨论的克鲁斯卡坐标系。

### 无限红移面

施瓦西黑洞的事件视界还有一层含义，和引力红移有关。为了看清楚这一层含义，让我们回想一下第三章中对引力红移的讨论。根据第三章中的相关讨论可以知道，在一个静态时空中，位于 $\mathbf{x}_E$ 位置的信号发射者发射电磁波的频率 $\nu_E$ ，和位于 $\mathbf{x}_R$ 位置的信号接收者接收到的电磁波频率 $\nu_R$ 之间满足如下关系

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left( \frac{g_{00}(\mathbf{x}_R)}{g_{00}(\mathbf{x}_E)} \right)^{-1/2}.$$

对于施瓦西时空，即是

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left( \frac{1 - \frac{r_g}{r_R}}{1 - \frac{r_g}{r_E}} \right)^{-1/2}.$$

特别的，如果信号接收者位于空间无穷远处，则有

$$\nu_R = \nu_E \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_E}}. \quad (9.7)$$

很显然，无穷远接收者接收到的信号频率 $\nu_R$ 要比发射频率 $\nu_E$ 低，在从发射地传播到接收地的过程中，信号频率向更低频移动了，这就是所谓的引力红移，因为低频信号就是“更红”的信号。

从(9.7)式容易看出，如果信号发射者越靠近黑洞视界，则对于无穷远处的接收者而言，它发出的信号就红移得越厉害。换句话说，在无穷远观察者看来，一件事物越接近视界面，则它的频率就红移得越低，它的时间过程看起来就越慢，最后，当事物无限接近视界面时，在无穷远观察者看来，它的频率就无限接近于零了，称之为发生了无限红移，当然，与此同时，它的时间过程看起来也无限变慢，正由于这样的无限变慢，因此在无穷远观察者看来，一个粒子要想真正达到视界面，需要无穷长的时间！

无穷远观察者永远也不会看到一个粒子真正掉进黑洞之中！他只会看到它越来越红越来越慢，越来越接近视界面，因此施瓦西黑洞的事件视界同时又是所谓的无限红移面。

当然，对于更一般的黑洞，比如后面的章节中要讲述的克尔黑洞，无限红移面与事件视界就不是完全重合的一回事了。

### 9.1.2 近视界几何

为了搞清楚黑洞视界的性质，不妨将注意力集中在 $r = r_g$ 的视界附近，根据前面的分析，在视界附近 $A(r) \sim (2\kappa)(r - r_g)$ ，因此施瓦西解可以近似为(称作近视界几何)

$$ds^2 \sim -(2\kappa)(r - r_g)dt^2 + (2\kappa)^{-1}(r - r_g)^{-1}dr^2 + r_g^2d\Omega^2. \quad (9.8)$$

重新定义径向坐标 $\rho$ ，使得 $d\rho = (2\kappa)^{-1/2}(r - r_g)^{-1/2}dr$ ，积分即

$$\rho = (2\kappa)^{-1/2}2(r - r_g)^{1/2} \Leftrightarrow \rho^2 = 4r_g(r - r_g). \quad (9.9)$$

黑洞视界 $r = r_g$ 对应于 $\rho = 0$ 。利用这个新的径向坐标 $\rho$ ，就可以将近视界几何重写成

$$ds^2 \sim -\kappa^2\rho^2dt^2 + d\rho^2 + r_g^2d\Omega^2. \quad (9.10)$$

不妨忽略角度部分，仅仅考察径向和时间向这个 $1+1$ 维的时空，从而近视界几何为

$$ds^2 = -\kappa^2\rho^2dt^2 + d\rho^2. \quad (9.11)$$

这样一个 $1+1$ 维时空又称作Rindler时空。所以，施瓦西黑洞的近视界几何是一个Rindler时空。

为了搞清楚Rindler时空的本质，引入新的坐标 $V, U$ ，

$$V = \rho e^{\kappa t}, \quad U = -\rho e^{-\kappa t}, \quad (9.12)$$

不难验证，在 $(V, U)$ 坐标之下，Rindler时空度规正好是

$$ds^2 = -dVdU. \quad (9.13)$$

但这正是平坦的 $1+1$ 维闵可夫斯基时空，为了看清这一点可以令 $V = T + X$ ， $U = T - X$ ，从而使得度规变成标准的 $ds^2 = -dT^2 + dX^2$ ，换言之， $V, U$ 也是平坦的 $1+1$ 维闵可夫斯基时空的光锥坐标。由于我们是研究近视界几何得到上面的式子，所以它清楚地说明了黑洞视界面附近的时空并没有奇异性，它就是很正常的时空，所有的奇异性都来自于原来的 $(t, r)$ 坐标。

当然，从(9.12)式可以看出，严格来说，Rindler时空只是闵可夫斯基时空的四分之一，也就是 $V > 0, U < 0$ 的那四分之一，如图(9.1)所示(右侧满足 $X > |T|$ 的那四分之一)。

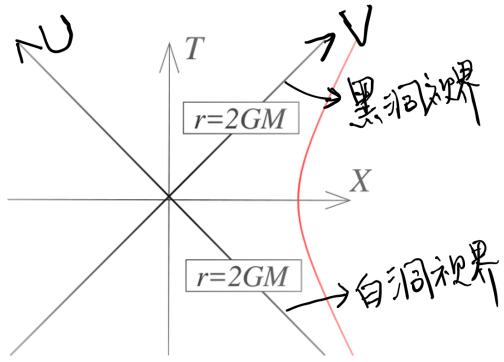


图 9.1: 施瓦西黑洞的近视界几何, 红线表示位于黑洞外面( $r > r_g$ )一个恒定 $r$ 处的一个观察者.

为了看清楚原来位于 $\rho = 0$ 处的黑洞视界在新的( $V, U$ )坐标下如何描述, 我们根据(9.12)式, 得

$$VU = -\rho^2, \quad U/V = -e^{-2\kappa t}. \quad (9.14)$$

由 $VU = -\rho^2$  可见,  $\rho = 0$  现在对应 $V = 0$  或  $U = 0$  这两个坐标轴, 在图(9.1)中也就是与竖直轴成45度角的那两条斜线, 这就是对黑洞视界的新的描述, 注意, 现在的( $V, U$ )坐标即使在视界面上也同样定义良好。

当然严格来说,  $U = 0, V > 0$  半轴对应的才是黑洞视界, 而  $V = 0, U < 0$  半轴对应的实际上是我们延拓出来的白洞的视界, 后文会进一步进行相关讨论。

从 $U/V = -e^{-2\kappa t}$  可见,  $t$  等于常数的曲面现在对应( $V, U$ )坐标系中过原点的一条斜率为常数的直线。特别的,  $V = 0$  对应  $t = -\infty$ , 而  $U = 0$  对应  $t = \infty$ 。也就是说, 在这种描述下, 视界与  $t = \pm\infty$  的超曲面重合, 对此的物理解释是, 从无穷远处的静止观察者看来(还记得吗?  $t$  是这种观察者的固有时), 粒子要花无限长的时间才能到达视界。

将角度部分也包括进来, 那么近视界几何即是

$$ds^2 = -dVdU + r_g^2 d\Omega^2. \quad (9.15)$$

假设把这个度规限制在  $U = 0, V > 0$  的黑洞视界面这个三维超曲面上, 我们得到的度规即是

$$ds^2|_{U=0} = r_g^2 d\Omega^2 = r_g^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (9.16)$$

很显然，这是一个退化的度规，它没有 $dV^2$ 项，也没有 $dVd\theta$ 以及 $dVd\phi$ 这样的交叉项。换言之，视界面上的度规是退化的，其号差可以示意性地记为 $0++$ ，其中 $++$ 对应 $d\theta^2$ 和 $d\phi^2$ 之前的正定度规， $0$ 表示 $dV$ 相关项的退化。一个具有 $0++$ 号差的超曲面就称之为一个**类光超曲面**，类光主要指沿着这个超曲面的度规退化方向走 $ds^2 = 0$ ，这当然也就是类光。所以，**黑洞的事件视界是一个类光超曲面！**

完全类似的讨论可以知道，白洞视界面也是一个类光超曲面，总之， $V = 0$ 和 $U = 0$ 的两个超曲面都是类光超曲面。

以 $U = 0$ 的类光超曲面为例，给定其上一点，其切空间的三个独立切向量为 $\partial_V, \partial_\theta, \partial_\phi$ ，根据与坐标无关的数学语言， $\langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle = g_{\mu\nu}$ ，从而不难得出

$$\langle \partial_V, \partial_V \rangle|_{U=0} = 0, \quad \langle \partial_V, \partial_\theta \rangle = \langle \partial_U, \partial_\phi \rangle = 0. \quad (9.17)$$

也即是说，切向量 $\partial_V$ 是类光向量！并且 $\partial_V$ 这个切向量与整个切空间都正交，所以它其实也是 $U = 0$ 的类光超曲面的法向量！类似的， $\partial_U$ 是 $V = 0$ 的类光超曲面的类光切向量，当然也是其法向量。这正是类光超曲面的特殊之处，它的类光切向量也正是其法向量。

有一个定理告诉我们，所有的类光超曲面都可以看成是由类光测地线铺成的，证明可以参见E. Witten 的经典综述文章Light Rays, Singularities, and All That，附录E。这篇文章有中文译本，叫《光线、奇点，以及其它》，是由我们一些人翻译的，网上能搜到。从上面对黑洞视界的这个描述也能清楚地看到， $U = 0, V > 0$ 的黑洞视界是由给定 $\theta, \phi$ 值的类光测地线生成的， $V$ 就是这些类光测地线的仿射参数！ $V = 0$ 的视界面也有类似结论。

### 9.1.3 基林(Killing)视界

从施瓦西解的表达式(9.1)容易看出，这个解的度规表达式在如下 $t$ 平移的单参数微分同胚变换下保持不变

$$t \rightarrow t + c, \quad (9.18)$$

其中平移量 $c$ 为任意常数。注意，广义相对论虽然允许任意的微分同胚变换，但是，一般来说，度规表达式在微分同胚变换下是要变的。因此， $t$ 平移对于施瓦西解来说是特殊的，它是施瓦西解的一个对称性，而不仅仅是像其它微分同胚变换一样只是广义相对论理论(也就是场方程)的对称性，它的对称从方程延伸到了解。

很明显,  $t$  平移可以用如下切向量场  $\xi$  生成,

$$\xi = \partial_t. \quad (9.19)$$

这样的对应于度规对称性的切向量场, 就称作基林(Killing)向量场, 后面的章节中会进一步深入讨论基林(Killing)向量场以及它们和时空对称性的关系。总之, 施瓦西解有一个基林向量场  $\xi = \partial_t$ 。

很显然, 这个基林向量场满足

$$\langle \xi, \xi \rangle = \langle \partial_t, \partial_t \rangle = g_{tt} = -(1 - \frac{r_g}{r}). \quad (9.20)$$

显然,  $\xi$  在  $r > r_g$  处是类时的, 特别的,  $\xi$  在空间无穷远处是类时的, 是无穷远处的一个类时基林向量场, 在无穷远处  $\xi$  归一化为  $\langle \xi, \xi \rangle|_\infty = -1$ 。但是, 在  $r < r_g$  处,  $\xi$  类空! 特别的, 在  $r = r_g$  的视界面上,  $\xi$  类光, 满足  $\langle \xi, \xi \rangle|_{r_g} = 0$ 。为了考察基林向量  $\xi$  在视界面上的行为, 下面我们来考察它在近视界几何光锥坐标  $(V, U)$  中的表达式。

假设在近视界几何中考察一个位于给定  $\rho$  位置的粒子随时间的演化, 不妨设时间平移了一个  $c$  吧, 即  $t \rightarrow t + c$ 。则根据(9.12)式, 有

$$V \rightarrow V e^{\kappa c}, \quad U \rightarrow U e^{-\kappa c}. \quad (9.21)$$

由于  $V, U$  也是平坦时空的光锥坐标, 所以这个式子的含义其实就是一个洛伦兹推动(boost), 也即是说, 在  $(V, U)$  坐标中看来, 这个粒子的时间演化其实是一个洛伦兹推动(boost)。

取  $c = \delta t$  为无穷小时间平移, 则从(9.21)式容易看出,

$$\delta V = \kappa V \delta t, \quad \delta U = -\kappa U \delta t. \quad (9.22)$$

从而即可以得到基林向量场  $\xi$  在  $(V, U)$  坐标中的表达式, 为

$$\xi = \partial_t = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial}{\partial V} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial}{\partial U} = \kappa \left( V \frac{\partial}{\partial V} - U \frac{\partial}{\partial U} \right). \quad (9.23)$$

用  $(V, U)$  坐标的分量形式来表达即是

$$\xi^\mu = \kappa (V, -U). \quad (9.24)$$

特别的, 对于  $(V, U)$  坐标的原点,  $V = U = 0$ , 从而  $\xi = 0$ , 这样的点称为基林分岔点(bifurcation point), 当然, 如果加上角度部分的坐标, 那这样的

点实际上就是一个二维球面，称作分岔球。很显然，这里整个 $V = 0$ 或 $U = 0$ 的视界面都是由分岔球上所发出的类光测地线扫出的。

在 $U = 0$ 的视界面上，基林向量 $\xi^\mu = \kappa(V, 0)$ ，由于近视界度规为 $-dVdU$ ，所以这显然是 $U = 0$ 视界面的一个类光切向量，同时，因为 $U = 0$ 的视界面为类光超曲面，所以这时 $\xi^\mu$ 也为这个超曲面的类光法向量。类似的，在 $V = 0$ 的视界面上(此时 $\xi^\mu = \kappa(0, -U)$ )，基林向量 $\xi$ 也是一个类光切向量，当然也是类光法向量。

如果一个类光超曲面以一个基林向量为类光法向量，则我们就称之为一个基林视界，所以，施瓦西黑洞的事件视界面同时也是基林视界。

再强调一下，所谓的**基林视界**，其一般定义是，首先它是一个类光超曲面，其次，其类光法向量(也是一个切向量)刚好是一个基林向量(不妨一般性地记为 $K^\mu$ )，当一个超曲面同时满足这两点时，就称之为一个基林视界。所以，从定义来看，基林视界和事件视界的定义是相互独立的，两者并不一定重合。不过，对于施瓦西黑洞而言，其事件视界正好也是其基林视界！而且相应基林向量为在无穷远处类时的 $\xi$ ，即 $K = \xi$ 。

实际上，霍金和卡特曾经证明过一个定理：**在稳态时空中，事件视界就是类时基林视界。**当然，这里的类时指的是这个基林向量场在空间无穷远处类时！施瓦西时空就是这个定理的一个典型例子。

根据前面提及的E.Witten文章里的定理，作为一个类光超曲面，基林视界当然也是由类光测地线铺成的，不防记这些类光测地线的切向量场为 $l^\mu$ ，它满足如下测地线方程

$$l^\mu D_\mu l^\nu = 0. \quad (9.25)$$

$l^\mu$ 当然是一个类光切向量，因此它也是基林视界的法向量场，因此在基林视界上，它必定和同样作为法向量场的基林向量场 $K^\mu$ 成比例，即存在函数 $\chi(x)$ ，使得

$$K^\mu = \chi(x)l^\mu. \quad (9.26)$$

注意 $l^\mu$ 只在基林视界上有定义，从而这个式子也只在基林视界上成立。

从而根据(9.25)式，不难得得到，在基林视界上， $K^\mu$ 满足方程 $K^\mu D_\mu K^\nu = \chi(x)l^\mu D_\mu(\chi(x)l^\nu) = \chi(x)(l^\mu \partial_\mu \chi(x))l^\nu = (l^\mu \partial_\mu \chi(x))K^\nu$ ，记式中的 $l^\mu \partial_\mu \chi(x) = w(x)$ ，即有方程

$$K^\mu D_\mu K^\nu = w(x)K^\nu. \quad (9.27)$$

这个方程的本质其实依然是测地线方程，不过测地线的参数不是仿射参数而已，这个式子当然也只在基林视界上成立。

稍后我们将证明，对于施瓦西黑洞的视界面(以及类似的一类球对称黑洞)，如果取基林向量 $K = \xi = \partial_t$ ，则必定有 $w(x) = \pm\kappa$ ，这里的 $\kappa$ 也就是前面引入的 $1/(2r_g) = 1/(4GM)$ 。换言之，对于施瓦西黑洞的视界面(以及类似的一类球对称黑洞)，我们有

$$\xi^\mu D_\mu \xi^\nu = \pm\kappa \xi^\nu. \quad (9.28)$$

这个结果依赖于 $\xi$ 的归一化，因为如果将 $\xi$ 替换成 $c\xi$ ，那上式中的 $\kappa$ 就应该替换成 $c\kappa$ 。这里是取 $\xi = \partial_t$ ，因此是将 $\xi$ 的模长平方在空间无穷远处归一为负一，即 $\langle \xi, \xi \rangle|_\infty = -1$ 。而之所以有正负号的不确定性，是因为如果将 $\xi$ 替换成时间反演版的 $-\xi$ ，那 $w(x)$ 就将变成 $-w(x)$ ，而对于施瓦西黑洞而言， $\xi = \partial_t$ 和它的时间反演是地位平等的，都可以作为类时基林向量场。值得说明的是，通常人们称方程(9.28)中的 $\kappa$ 为表面引力，因此本章前面引入的 $\kappa = 1/(2r_g)$ 当然就是施瓦西黑洞视界上的表面引力。

下面，我们来证明定义了表面引力的(9.28)式。由于这个式子只定义在基林视界上，所以要证明它显然只需要考察基林视界附近的情况，从而只需研究近视界几何就足够了！为此，首先注意到，在 $(V, U)$ 坐标中，近视界几何的度规是平凡的 $-dVdU$ ，从而可知在这个坐标中，联络系数都等于零，从而在 $(V, U)$ 坐标中协变导数就等于普通的导数。所以在基林视界附近我们有

$$\begin{aligned} \xi^\mu D_\mu \xi^\nu &= \xi^\mu \partial_\mu \xi^\nu \\ &= \kappa \left( V \frac{\partial}{\partial V} - U \frac{\partial}{\partial U} \right) \kappa(V, -U) = \kappa^2(V, U). \end{aligned} \quad (9.29)$$

所以，在 $U = 0$ 的基林视界上(此时 $\xi^\nu = \kappa(V, 0)$ )，我们有

$$\xi^\mu D_\mu \xi^\nu = \kappa^2(V, 0) = \kappa \xi^\nu. \quad (9.30)$$

而在 $V = 0$ 的基林视界上(此时 $\xi^\nu = \kappa(0, -U)$ )，我们有

$$\xi^\mu D_\mu \xi^\nu = \kappa^2(0, U) = -\kappa \xi^\nu. \quad (9.31)$$

这就证明了(9.28)式。

不仅如此，在后面的章节中我们还将证明，对于任意时空的任意基林视界，只要它可以由其分岔球上的类光测地线扫出，则(9.27)式中的 $w(x)$ 的

平方( $w^2$ )沿着整个基林视界都必定为常数！从而在基林视界上 $w(x)$ 只能和一个常数(就记作 $\kappa$ )相差正负号，所以可以一般地记 $w(x) = \pm\kappa$ ，进而一般性地将方程(9.27)重写作

$$K^\mu D_\mu K^\nu = \pm\kappa K^\nu. \quad (9.32)$$

对于类时基林视界，通常还要求 $K^\mu$ 满足归一化条件 $\langle K, K \rangle|_\infty = -1$ 。注意，这个方程和上一段证明的结论的区别在于，这个方程的成立条件要广泛得多，而上一段只是它在施瓦西视界情形的特例。

#### 9.1.4 表面引力与霍金温度

黑洞视界是一个物质有去无回的单向膜区开始的地方。然而，1974年，霍金发现，在考虑了量子效应以后，黑洞也能往外辐射，它有一个非零的温度，这就是霍金温度。

为了推导出霍金温度的表达式，设想在空间无穷远处，将一个量子场 $\phi(x)$ 与黑洞耦合，设想量子场与黑洞达成了热平衡，温度为 $T_{BH}$ ，温度的负一次方记作 $\beta = 1/T_{BH}$  (假设取玻尔兹曼常数 $k_B = 1$ 的单位制)。记量子场的哈密顿量为 $H$ ，则量子场的配分函数为

$$\mathcal{Z} = \text{Tr}(e^{-\beta H}). \quad (9.33)$$

人们可以用路径积分的方法计算这个配分函数，为此，我们需要将时间延拓为欧氏时间 $t_E$

$$t \rightarrow -it_E, \quad (9.34)$$

并将这个欧氏时间紧致化为一个周长为 $\hbar\beta$ 的圆周，也就是要进行如下的周期等同

$$t_E \sim t_E + \hbar\beta. \quad (9.35)$$

然后在这个时间紧致化了的欧氏时空中对量子场进行欧氏路径积分，结果就是上面的配分函数。

很显然，要推导出霍金温度的公式，就是要确定上面周期等同的 $\beta$ 具体为多少？为此，让我们来考察上述欧氏化对近视界几何的影响。

延拓到欧氏时间 $t_E$ 以后，近视界几何的Rindler度规就变成了

$$ds^2 = \kappa^2 \rho^2 dt_E^2 + d\rho^2. \quad (9.36)$$

现在，我们定义变量 $\theta_E = \kappa t_E$ ，并将之理解成一个角度变量，那么上面的度规就成为

$$ds^2 = \rho^2 d\theta_E^2 + d\rho^2. \quad (9.37)$$

很显然，如果 $\theta_E$ 以 $2\pi$ 为周期，那这个度规就是两维欧氏平面的极坐标度规，特别的，径向坐标 $\rho = 0$ 的原点没有任何奇异性。而如果 $\theta_E$ 不以 $2\pi$ 为周期，而是其它的某个周期，那上面这个度规描述的就是一个圆锥面， $\rho = 0$ 就是这个圆锥的顶点，它当然是奇异的，这种奇异性也称作锥形奇异性。但是， $\rho = 0$ 对应的是黑洞视界，它并不是一个时空奇异的地方。因此，为了消除锥形奇异性，我们只能取 $\theta_E$ 的周期为 $2\pi$ ，也即是

$$\kappa t_E \sim \kappa t_E + 2\pi \Leftrightarrow t_E \sim t_E + 2\pi/\kappa. \quad (9.38)$$

所以， $t_E$ 的紧化周期 $\hbar\beta$ 必须为 $2\pi/\kappa$ ，也即是

$$\beta = \frac{2\pi}{\hbar\kappa} \Leftrightarrow T_{BH} = \frac{\hbar\kappa}{2\pi}. \quad (9.39)$$

如果恢复玻尔兹曼常数，即是

$$T_{BH} = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{\hbar}{k_B}. \quad (9.40)$$

以上就是著名的霍金温度，它由表面引力决定，表达式中 $\hbar$ 的存在意味着，这个温度完全是一个量子效应，在经典物理的层次上，一个黑洞是没有什么温度概念的。另外，值得说明的是，霍金温度之下施瓦西黑洞与量子场的热平衡其实是不稳定的，因为施瓦西黑洞会吸收物质，从而使得质量增加(即能量增加)，但是温度却降低(注意 $\kappa \propto 1/M$ )，进而使得能量会进一步向施瓦西黑洞传输，也就是说，施瓦西黑洞具有负比热。

## 9.2 克鲁斯卡延拓

### 9.2.1 克鲁斯卡延拓的一般原理

假设我们考察如下球对称时空

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (9.41)$$

如果用之前的记号即是考察 $A(r) = f(r), B(r) = 1/f(r)$ 的球对称时空，施瓦西时空是其特例。按照前面的分析，黑洞视界必定对应函数 $f(r)$ 的零点(如果 $f(r)$ 没有零点，那相应的时空就不存在黑洞)。假设 $f(r)$ 在 $r = r_h$ 处有一个零点，即在 $r_h$ 附近，有

$$f(r) \sim (2\kappa)(r - r_h) + \dots \quad (9.42)$$

式中 $2\kappa$ 为泰勒展开的系数。很显然，在这个零点位置， $(t, r)$ 坐标是奇异的，因此它不能同时覆盖 $r < r_h$ 的区域和 $r > r_h$ 的区域。下面我们来寻找能够同时覆盖这两个区域的一组坐标系。

为此，我们将(9.41)式的度规改写成如下形式

$$ds^2 = -f(r)\left(dt + \frac{dr}{f(r)}\right)\left(dt - \frac{dr}{f(r)}\right) + r^2 d\Omega^2. \quad (9.43)$$

定义新的径向坐标 $r_*$ ，使得 $dr_* = \frac{dr}{f(r)}$ ，也即

$$r_* = \int \frac{dr}{f(r)}, \quad (9.44)$$

显然，函数 $f(r)$ 的零点就对应这个积分表达式的极点。下面，定义新的坐标 $v, u$

$$v = t + r_*, \quad u = t - r_*, \quad (9.45)$$

从而可以将度规(9.43)重写成

$$ds^2 = -f(r)dvdu + r^2 d\Omega^2. \quad (9.46)$$

很明显， $v, u$ 为两个类光坐标。值得注意的是， $(v, u)$ 坐标在 $f(r)$ 的零点 $r = r_h$ 处依然是奇异的，因为 $(v, u)$ 坐标下的度规(9.46)在这个零点处是病态的(有 $g_{vu}(r_h) = 0$ )。

当然，(9.45)式也可以重写成

$$v + u = 2t, \quad v - u = 2r_*. \quad (9.47)$$

先将注意力集中在 $v - u = 2r_*$ 上，它也即是

$$v - u = 2 \int \frac{dr}{f(r)}. \quad (9.48)$$

现在考察这个积分表达式的极点(也就是 $f(r)$ 的零点)所控制的一个邻域，并在这个邻域上将极点的积分分离出来，即写成

$$\begin{aligned} v - u &= \int \left[ \frac{1}{\kappa(r - r_h)} + g(r) \right] dr \\ &= \frac{1}{\kappa} \ln \left| \frac{r - r_h}{r_h} \right| + G(r), \end{aligned} \quad (9.49)$$

式中 $g(r)$ 表示分离出极点以后的一个不含极点的被积项， $G(r)$ 是它的积分，当然由于被积函数没有极点，所以 $G(r)$ 一定是一个在这个邻域上光滑的函数。由(9.49)式，即有

$$e^{\kappa(v-u)} = \left| \left( \frac{r - r_h}{r_h} \right) \right| e^{\kappa G(r)}. \quad (9.50)$$

下面来改进我们的类光坐标，将之变成类似于近视界几何中的那种光锥坐标 $(V, U)$ ，使之在 $r = r_h$ 处不再奇异。首先，根据上面的(9.50)式，我们有，当 $r < r_h$ 时(黑洞或者白洞区域)

$$e^{\kappa(v-u)} = - \left( \frac{r - r_h}{r_h} \right) e^{\kappa G(r)}. \quad (9.51)$$

对于黑洞区域，由于粒子总是朝着视界里面一去不复返的(即走向未来)，所以它应该处于这种 $(V, U)$ 坐标的未来部分，反之白洞区域则应该处于过去部分，比方说，黑洞区域和白洞区域可以分别处于光锥坐标 $(V, U)$ 的第一象限和第三象限，即上部(未来)和下部(过去)。为此我们可以进行如下操作：我们可以在 $r < r_h$ 的邻域上定义新的坐标 $V, U$ 如下

$$V = \pm e^{\kappa v}, \quad U = \pm e^{-\kappa u}, \quad (9.52)$$

从而使得(利用了 $v + u = 2t$ )

$$VU = - \left( \frac{r - r_h}{r_h} \right) e^{\kappa G(r)}, \quad U/V = e^{-\kappa(v+u)} = e^{-2\kappa t}. \quad (9.53)$$

很显然，(9.52)式定义的两种可能性的确分别覆盖了 $(V, U)$ 坐标系的一、三象限。

同样根据上面的(9.50)式，我们有，当 $r > r_h$ 时(外部区域)

$$e^{\kappa(v-u)} = \left( \frac{r - r_h}{r_h} \right) e^{\kappa G(r)}. \quad (9.54)$$

当然，这个黑洞和白洞外部的区域只可能占据剩下的二、四象限了(也即左右两侧)。为此我们需要进行如下操作：我们可以在 $r > r_h$ 的邻域上定义新的坐标 $V, U$ 如下

$$V = \pm e^{\kappa v}, \quad U = \mp e^{-\kappa u}, \quad (9.55)$$

以使得

$$VU = -\left(\frac{r - r_h}{r_h}\right)e^{\kappa G(r)}, \quad U/V = -e^{-\kappa(v+u)} = -e^{-2\kappa t}. \quad (9.56)$$

很显然，(9.55)式定义的两种可能性的确分别覆盖了 $(V, U)$ 坐标系的二、四象限。

从(9.53)式和(9.56)式可以看到， $r = r_h$ 的视界面正好对应 $V = 0$ 或 $U = 0$ 的两个坐标轴，并且它正好分别和 $t = \pm\infty$ 的超曲面重合，总之，这些都非常类似于前面在研究近视界几何时所得到的结论。

不难验证，无论 $r > r_h$ 还是 $r < r_h$ ，均有

$$dV dU = -\kappa^2 V U dv du = \kappa^2 \left(\frac{r - r_h}{r_h}\right) e^{\kappa G(r)} dv du. \quad (9.57)$$

从而能够将时空度规(9.46)重写为

$$ds^2 = -\frac{r_h}{\kappa^2} \frac{f(r)}{r - r_h} e^{-\kappa G(r)} dV dU + r^2 d\Omega^2. \quad (9.58)$$

式中的变量 $r$ 应该理解为通过反解 $VU = -\left(\frac{r - r_h}{r_h}\right)e^{\kappa G(r)}$ 式所得到的关于变量 $VU$ 的表达式。很明显，在这个式子中， $f(r)$ 的零点被分母上的 $r - r_h$ 消去了，从而度规在 $r = r_h$ 处不再病态，因此 $(V, U)$ 坐标系在 $r = r_h$ 处不奇异。

总之，(9.52)式和(9.55)式给出 $V, U$ 的四种可能定义，它们分别覆盖 $(V, U)$ 坐标系的四个象限，但是在每一个象限里面，与 $V, U$ 对应的 $v, u$ 的取值范围都是 $(-\infty, +\infty)$ ，所以用 $v, u$ 坐标来看的话，每一个象限都是一个完整的时空，四片完整的时空拼合在一起就构成整个大的由 $(V, U)$ 坐标描述的时空。而从 $(v, u)$ 所描写的一个象限延拓到完整的 $(V, U)$ 所描写的四个象限的过程，就叫做克鲁斯卡延拓， $(V, U)$ 坐标有时也称作克鲁斯卡坐标，如图(9.2)所示。值得强调的是，克鲁斯卡坐标在 $r = r_h$ 的视界面上是定义良好的，没有奇异性。

举例来说，比如对于 $V = +e^{\kappa v}$ ， $U = -e^{-\kappa u}$ 所描述的第四象限(即右侧的四分之一)，它对应的当然是 $r > r_h$ 的黑洞外部时空， $V = 0$ 或 $U = 0$ 的

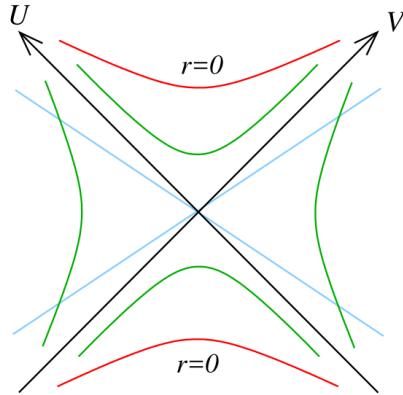


图 9.2: 施瓦西黑洞的克鲁斯卡延拓。图中  $U, V$  轴对应  $r = r_h$  的黑洞视界, 红线是  $r = 0$  处的时空奇性, 绿线表示  $r$  为常数的超曲面, 而蓝线表示  $t$  为常数的超曲面。

事件视界将它和黑洞以及白洞内部分隔开来, 当然, 严格来说  $U = 0, V > 0$  半轴对应的才是黑洞视界, 因为它处于  $(V, U)$  坐标系的未来部分, 是所谓的未来事件视界。而  $V = 0, U < 0$  半轴对应的视界是白洞视界, 因为它处于  $(V, U)$  坐标系的过去部分, 是过去事件视界。

根据上面这个分析, 我们就容易知道, 黑洞视界所分隔的一、四象限中, 第四象限对应黑洞外部, 第一象限所描述的则是黑洞内部(即上部的四分之一)。类似的, 白洞视界所分隔的三、四象限中, 第四象限是白洞外部, 而第三象限是白洞内部(即底部的四分之一)。所以, 正如我们所期望的, 在  $(V, U)$  坐标中, 处于未来的第一象限描述的是黑洞内部, 而处于过去的第三象限描述的则是白洞内部, 而第四象限和第二象限所描述的则是黑洞和白洞的共同外部区域。至于第二象限和第四象限这两个外部区域之间是什么关系, 我们稍后再作分析。

上述时空延拓过程的奇妙之处在于, 你可以从爱因斯坦方程在某个时空区域的一个解开始, 通过变换坐标进行延拓, 得到一个更大的时空区域上的解。注意, 对于新坐标所描述的更大时空区域, 你无需再次求解爱因斯坦场方程, 因为延拓来的度规一定会满足它。之所以有这么一个奇妙的性质, 其原因在于两个因素的共同作用: 首要的因素是, 爱因斯坦场方程是广义协变的, 其成立不受坐标变换的影响。其次, 场方程解出来的度规的各分量均是实解析函数, 这意味着, 在一个开集上的度规足以决定整个

更大的时空区域的度规。

### 基林视界

(9.41)式描写的球对称时空显然有一个基林向量场 $\xi$ ,

$$\xi = \partial_t. \quad (9.59)$$

很容易计算出这个基林向量场的模长平方, 为

$$\langle \xi, \xi \rangle = g_{tt} = -f(r). \quad (9.60)$$

一般来说,  $r \rightarrow \infty$ 时 $f(r) \rightarrow 1$ , 所以 $\xi$ 在空间无穷远处是类时的。假设 $f(r)$ 仅在 $r = r_h$ 处有唯一一个零点, 由于经过零点 $f(r)$ 要变号, 所以很显然,  $r > r_h$ 时均有 $f(r) > 0$ , 因此这时 $\xi$ 均类时。而 $r < r_h$ 时有 $f(r) < 0$ , 所以这时 $\xi$ 类空。当然, 在 $r = r_h$ 的视界面上 $\xi$ 类光。从而视界面同时也是基林视界。

不妨将注意力限制于 $(V, U)$ 坐标的右侧四分之一(第四象限)。设想在基林向量 $\xi$ 的作用之下,  $t$ 坐标平移一个无穷小量 $\delta t$ , 则根据(9.45)式, 有

$$\delta v = \delta u = \delta t. \quad (9.61)$$

进而根据 $V = +e^{\kappa v}$ ,  $U = -e^{-\kappa u}$ , 有

$$\delta V = \kappa V \delta v = \kappa V \delta t, \quad \delta U = -\kappa U \delta u = -\kappa U \delta t. \quad (9.62)$$

从而即可以得到基林向量场 $\xi$ 在克鲁斯卡坐标中的表达式, 为

$$\xi = \partial_t = \kappa \left( V \frac{\partial}{\partial V} - U \frac{\partial}{\partial U} \right). \quad (9.63)$$

不难验证, 其它象限求出来的最终表达式是一样的。这个结论在形式上完全和近视界几何所得出来的一样。特别的,  $V = U = 0$ 是一个分岔球。

### 9.2.2 施瓦西黑洞的克鲁斯卡延拓

#### 奇点

对于施瓦西解,  $f(r) = (1 - \frac{r_g}{r})$ , 所以度规在 $r = 0$ 处也是奇异的。前面提到过, 对于施瓦西黑洞而言,  $r = 0$ 对应的是时间的一个终点, 注

意，不是空间的终点，因为在 $r < r_g$ 区域，时间和径向空间互换了。因为 $r = 0$ 是时间终止的地方，所以此处的奇异性和平面处的度规奇异性有根本性的不同，具体来说，视界面的度规奇异性是坐标奇异性，换一个坐标这种奇异性就可能被消除，比方说在克鲁斯卡坐标中视界所对应的 $U = 0$ 或 $V = 0$ 就没有什么奇异性。但是， $r = 0$ 处的奇异性是真正的施瓦西时空的奇异性，称作**时空奇性**。

这种时空奇性反映为无穷大的时空曲率，换言之，反映为黎曼曲率张量在 $r = 0$ 处的发散。计算表明，对于施瓦西解，有

$$R^{\rho\sigma\mu\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{12r_g^2}{r^6}, \quad (9.64)$$

所以在 $r = 0$ 处黎曼曲率张量的确是发散的，这种发散不依赖于坐标系的选择！这个计算同时也表明，在 $r = r_g$ 的视界面处，时空曲率其实是正常的，并没有发散。所以黑洞视界并没有任何时空奇性，它的特殊之处不在于奇异性，而在于，从时空整体的因果结构来说黑洞视界比较特殊。

### 施瓦西解的克鲁斯卡延拓

下面来考察具体的施瓦西时空的克鲁斯卡延拓。对于施瓦西解而言 $f(r) = (1 - \frac{r_g}{r})$ ，所以

$$2\frac{1}{f(r)} = \frac{2r}{r - r_g} = \frac{2r_g}{r - r_g} + 2. \quad (9.65)$$

与(9.49)式比较，即知 $r_h = r_g$ ， $\kappa = 1/(2r_g)$ ， $g(r) = 2$ ，从而

$$G(r) = 2r. \quad (9.66)$$

由此当然就可以定义克鲁斯卡坐标，根据(9.58)式，在这个坐标中施瓦西时空的度规就成为

$$ds^2 = -\frac{r_g}{\kappa^2 r} e^{-2\kappa r} dV dU + r^2 d\Omega^2. \quad (9.67)$$

另外，根据(9.53)式，

$$VU = -\left(\frac{r - r_g}{r_g}\right) e^{2\kappa r}. \quad (9.68)$$

特别的，对应**时空奇性**的 $r = 0$ 现在成为

$$r = 0 \Leftrightarrow VU = 1. \quad (9.69)$$

它对应 $(V, U)$ 坐标系中位于一、三象限内的一条双曲线，其中在第三象限(也即白洞区域)内的部分描述的是时间的一个起始之处，而位于第一象限(也即黑洞区域)内的部分描述的是时间的一个终止之处。所以，在克鲁斯卡坐标系中， $VU = 1$ 描述的是时空在一、三象限内的边界，边界之外时空是不存在的！显然，施瓦西解的时空奇性是类空的。整个施瓦西黑洞的克鲁斯卡延拓如图(9.3)所示。注意，由于我们没有画出角度部分的坐标，

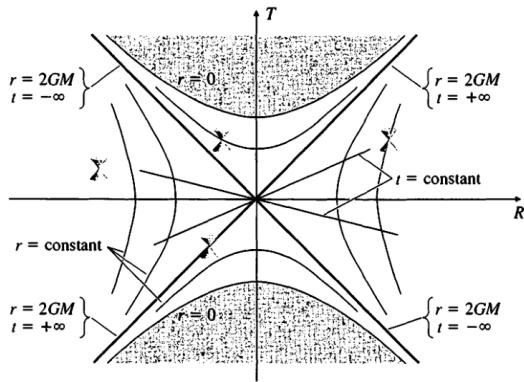


图 9.3：施瓦西黑洞的克鲁斯卡延拓。图中 $V = T + R$ ,  $U = T - R$ , 请注意 $V - U$ 坐标系的象限划分和 $T - R$ 坐标系的象限划分的不同。

所以其实这个图中的每一个点都代表一个两维球面，面积为 $4\pi r^2$ 。

可以看到，在克鲁斯卡图的上部，任何一个类时或者类光的曲线(切线与竖直轴的夹角小于等于45度)只要过了视界面那条直线就休息逃离上部四分之一的区域，只能撞到 $r = 0$ 的时空奇性上，所以上部四分之一的区域就是黑洞区域。

而在下部四分之一区域，注意到时间的单向性，可以看到任何一个类时或者类光曲线都会穿过视界逃离这个区域，这个区域和黑洞区域相对，就叫做白洞区域。

克鲁斯卡图可以直观地显示一些很微妙的事情，比如如图(9.4)所示的，某A掉进黑洞，某B在视界外面固定 $r$ 距离处观察这一过程。B当然是通过接收A发出的光信号而观察他的，这些光信号就是图中所示的与 $V$ 轴平行的那些线段，它们均与竖直轴成45度夹角。如图所示，A在 $P_A$ 点发出的信号将在 $P_B$ 点到达B，这个时候的时间 $t$ 是 $t = 1$ ，接着，A在 $Q_A$ 点发出的信号将在 $Q_B$ 点到达B，这个时候的时间 $t$ 是 $t = 100$ ，而A在 $R_A$ 点发出的信号将在 $R_B$ 点到达B，这个时候的时间 $t$ 是 $t > 1000$ ，很显然，随着A越来越靠近视

界面,  $t$ 将趋于 $\infty$ , 即 $B$ 永远也不能看到 $A$ 真正掉进黑洞, 只能看到他不断接近视界。但是, 在 $A$ 本身看来, 他掉进黑洞的事件当然发生了, 而且发生在 $A$ 的有限固有时之内。

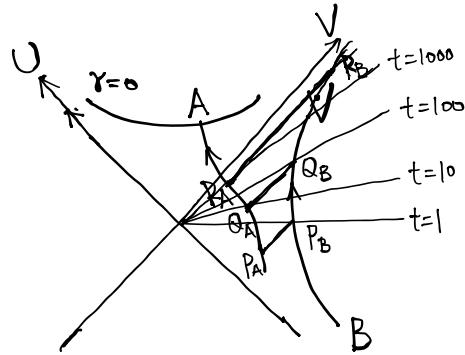


图 9.4: 某 $A$ 掉进黑洞, 某 $B$ 在视界外固定 $r$ 处观察他。

有一个问题是, 克鲁斯卡延拓以后的施瓦西时空还能被进一步延拓吗? 回答是, 不能够了, 克鲁斯卡延拓就是施瓦西时空的最大延拓。

这里有一个简单的方法来判断一个时空是否能被进一步延拓: 那就是观察时空中的测地线, 看它们在哪里终止。假如你能跟着一条测地线跑到其固有时参数或者仿射参数的无穷值处, 那这时候你也就跑到时空的无穷远处去了。假如相反, 测地线在一个固有时参数(或者仿射参数)的有限值处终止了, 不能进一步继续延伸了, 那这时候就一定有如下事情之一发生: 要么这条测地线遇到了时空奇性, 要么它遇到了坐标奇性。假设只是遇到了坐标奇性, 那换一个更好的坐标系, 测地线就还能继续延伸, 这时候我们就说时空能被这个更好的坐标系延拓。而假如测地线遇到的是时空奇性, 那我们就做不了什么了, 它就真的无法进一步延伸了。所谓最大延拓, 指的是, 任何在固有时参数(或者仿射参数)的有限值处终止的测地线所遇到的都是时空奇性的那种延拓。

不难检验, 施瓦西解的克鲁斯卡延拓的确是最大延拓!

### 爱因斯坦-罗森桥

前面提到过, 在克鲁斯卡延拓中, 黑洞和白洞外面的区域一共有两片, 分别对应 $(V, U)$ 坐标系的第二象限和第四象限(即左侧的四分之一和右侧的四分之一)。这两个区域都在空间无穷远处渐近平坦, 但是这两个渐近平坦

的区域通过黑洞和白洞连接起来了。从图(9.3)中可以清楚的看到，第四象限(右侧)的观察者其实无法向第二象限(左侧)的观察者发射信号，因为任何这样的信号都会掉进黑洞，并不可避免地终止在时空奇性上。然而，我们不禁想知道，连接这两个区域的空间几何到底是怎么样的呢？

为此，我们不妨考察克鲁斯卡时空在  $t = 0$  时的纯空间部分，很显然，这就是一条穿过原点的水平轴，它在右侧四分之一的部分和在左侧四分之一的部分均对应黑洞的外部，空间度规均为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (9.70)$$

并且  $r > r_g$ ，这两个区域通过  $U = V = 0$  的原点连接起来，但是  $U = V = 0$  的原点其实代表一个半径  $r = r_g$  的二维球面。所以完整的  $t = 0$  空间几何其实是两片渐近平坦的空间在  $r = r_g$  的二维球面处粘合在一起，如图(9.5)所示。图中上面和下面的两片分别代表克鲁斯卡图中左右两侧的两个渐近平

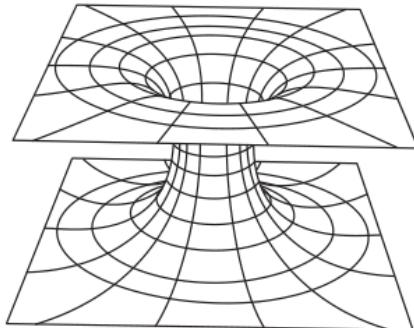


图 9.5：爱因斯坦-罗森桥，图中我们已经取  $\theta = \pi/2$ ，因此二维球面变成一个圆周，而  $d\Omega^2 = d\phi^2$ 。

坦区。连接两片渐近平坦时空的粘合区(也就是图中的“喉咙”部分)就称作爱因斯坦-罗森桥，它就是所谓的时空虫洞的一种。

我们可以通过在近视界几何的探讨中引入的坐标  $\rho^2 = 4r_g(r - r_g)$  来更清楚地考察爱因斯坦-罗森桥。不过具体的处理有所不同，为了避免混淆，这里我们将把  $\rho$  记为  $z$ 。下面我们取  $\theta = \pi/2$ ，从而  $d\Omega^2 = d\phi^2$ ，而空间变成二维的，由极坐标  $(r, \phi)$  表示。当这样处理以后，(9.70)式描写的空间几何(现在是二维)，就可以看作平坦的三维空间(取柱坐标  $(r, \phi, z)$ )中的由下式描述

的三维超曲面

$$z^2 = 4r_g(r - r_g). \quad (9.71)$$

我们很容易验证度规的确是对的，为此首先注意到平坦三维空间的度规为 $dr^2 + r^2 d\Omega^2 + dz^2$ ，其次，注意到 $zdz = 2r_g dr$ ，从而 $dr^2 + dz^2 = (1 + \frac{4r_g^2}{z^2}) dr^2 = (1 - \frac{r_g}{r})^{-1} dr^2$ ，所以这张三维超曲面上的诱导度规的确是(9.70)式。

下面只需在三维平坦空间中示意性地画出(9.71)式所描写的这张二维超曲面，显然，结果就是图(9.5)。

进一步，在克鲁斯卡坐标中，如果定义 $V = T + R$ ,  $U = T - R$  (从而 $VU = T^2 - R^2$ )，然后取一些固定时间 $T$ 的空间切片来考察(如图(9.6))，就可以看到虫洞的打开和关闭过程(如图9.7)。在图(9.6)中，我们取定

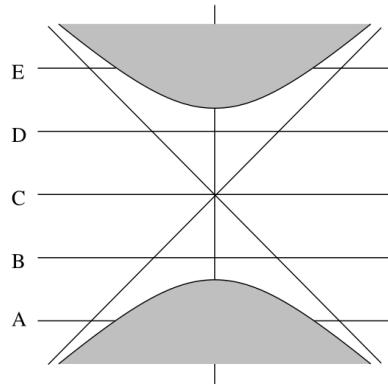


图 9.6: 取定A,B,C,D,E五个空间切片。

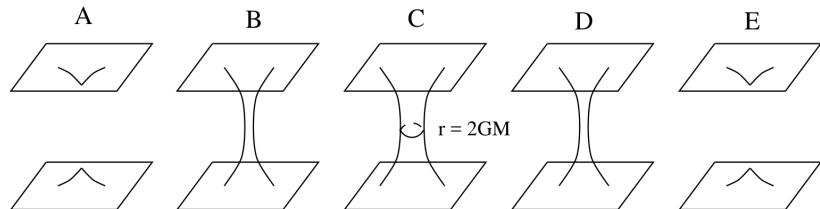


图 9.7: 与A,B,C,D,E五个空间切片相对应的虫洞打开和关闭过程示意图。

了A,B,C,D,E五个固定时间 $T$ 的空间切片，与之相应的，在图(9.7)中，我们

示意性地画出了随着时间演化，虫洞在黑洞视界后面打开最后又关闭的示意图。 $T = -1$ 时虫洞开始打开， $T = 1$ 时虫洞关闭。

### ER=EPR?

首先解释一下黑体字的小标题：ER代表的就是Einstein-Rosen bridge，即刚刚讲述的爱因斯坦-罗森桥，也即时空虫洞。而EPR代表的是Einstein-Podolsky-Rosen paradox，即EPR佯谬也就是通常所谓的量子纠缠。所以，这个标题的字面含义就是，时空虫洞等价于量子纠缠。

为了进一步理解这个小标题，下面我们作一点解释说明。

前面提到过，在施瓦西解的克鲁斯卡延拓中，位于左侧四分之一区域的观察者并不能发送信号给位于右侧四分之一区域的观察者。但是，这两个观察者的确有一种方式通信，那就是两者都跳进黑洞里，然后在各自终结于时空奇性之前在黑洞视界后面相互通信，甚至在黑洞里彼此遇到。

但是，以上这一段话真有物理含义吗？毕竟，我们知道位于克鲁斯卡图底部四分之一的白洞其实很可能只有数学含义，因为并没有什么物理过程可以产生白洞。同样的，假设右侧四分之一的那一片宇宙是物理的话，那克鲁斯卡图左侧四分之一的那一片宇宙也可能只有数学含义，它可能完全源于我们的数学延拓，而不描写任何真正的物理现实。如果真是这样的话，那上一段话当然就没什么真正的物理含义。

然而，的确有一种可能的物理方式实现在黑洞视界后面相互通信。

为了说明这一点，我们不妨设想克鲁斯卡图的左右两侧描写的不是两片相互独立的宇宙，而是近似描写同一个宇宙的两个相距遥远的区域。从而，克鲁斯卡图里的黑洞就可以近似成为分别位于这两个相距遥远区域的两个黑洞，它们在视界后面通过爱因斯坦-罗森桥相互连接。近似来说，爱因斯坦场方程当然允许这样的双黑洞解存在，因为近似描写它们的克鲁斯卡延拓的确是爱因斯坦场方程的解。

现在，位于这两个相距遥远区域的观察者就只要跳进各自区域的黑洞就能实现视界后面的通信了！因为他们的黑洞在视界后面有爱因斯坦-罗森桥相连接。

什么情况下两个相距遥远的黑洞可以通过爱因斯坦-罗森桥相连接呢？近些年来对量子引力的研究暗示了一个答案，那就是，如果这两个黑洞之间有很强的量子纠缠，那么它们的视界后面就可能存在爱因斯坦-罗森桥，这就是小标题所谓的ER=EPR.

ER=EPR在多大程度上成立是远未清楚的一个问题。但如果它能推向极端，那也许意味着任何量子纠缠之间都有时空虫洞相连接，只不过通常这种虫洞是微观上的微型虫洞。当然，这种推论很可能已经走得太远了。

### 9.2.3 Reissner-Nordstrom黑洞的克鲁斯卡延拓

除了施瓦西黑洞以外，类似的处理也可以应用于Reissner-Nordstrom黑洞(RN黑洞)，也就是所谓的带电的球对称黑洞。它的度规也有如下形式

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (9.72)$$

式中 $f(r)$ 为

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{e^2}{r^2}, \quad (9.73)$$

其中 $M$ 为黑洞的质量， $e^2$ 由黑洞所携带的电荷和磁荷决定，并且这里我们假定 $e^2$ 不太大。这是引力场与电磁场耦合系统的一个解，不过具体的求解过程我们推迟到后面的章节中来处理，本章我们只是简单地给出这个解。

很显然(9.73)式给出的函数 $f(r)$ 有两个零点，分别记为 $r_+, r_-$ (设 $r_+ > r_-$ )，它们由下式给出

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{(GM)^2 - e^2}. \quad (9.74)$$

进而可以将函数 $f(r)$ 重写成

$$f(r) = \frac{1}{r^2}(r - r_+)(r - r_-). \quad (9.75)$$

很显然，RN解也有一个基林向量场 $\xi = \partial_t$ ，并且 $r = r_{\pm}$ 的超曲面均为它的基林视界，因为 $\langle \xi, \xi \rangle|_{r_{\pm}} = 0$ ！同样容易看清的是， $r_- < r < r_+$ 的区域发生了时空互换，从而使得这个区域为单向膜区， $r = r_+$ 为单向膜区开始的地方，称作外视界，它也就是RN黑洞的未来事件视界，而 $r = r_-$ 为单向膜区结束的地方，称作内视界，它其实是RN解的柯西视界。关于柯西视界的定义，我们稍后会有一个简单的讨论，更详细的讨论请参阅E. Witten 的综述文章Light Rays, Singularities, and All That，中文译本叫《光线、奇点，以及其他》。

根据上面的讨论，容易得到

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{f(r)} &= \frac{2r^2}{(r - r_+)(r - r_-)} \\ &= \frac{2r_+^2}{(r_+ - r_-)(r - r_+)} + \frac{2r_-^2}{(r_- - r_+)(r - r_-) + 2} \\ &= \frac{1}{\kappa_+(r - r_+)} + \frac{1}{\kappa_-(r - r_-)} + 2, \end{aligned} \quad (9.76)$$

式中  $\kappa_{\pm}$  分别为内外视界上的表面引力，由下式给出

$$\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2r_{\pm}^2}. \quad (9.77)$$

由于现在有两个极点(而不是一个)，所以与(9.49)式比较，在每个极点控制的邻域内都有一个  $g(r)$  函数和相应的  $G(r)$  函数，不妨分别记作  $g_{\pm}(r)$  和  $G_{\pm}(r)$ 。而且，在每个极点所控制的邻域内我们都要引入一组  $(V, U)$  光锥坐标，不妨记作  $(V_{\pm}, U_{\pm})$ 。

为了给出  $V_{\pm}, U_{\pm}$  的具体定义，我们将上一段的讨论与(9.49)式比较，即可知，在  $r_h = r_+$  的邻域内(从而  $r > r_-$ )， $g_+(r) = \frac{1}{\kappa_-(r-r_-)} + 2$ ，积分得出

$$G_+(r) = \frac{1}{\kappa_-} \ln \left( \frac{r - r_-}{r_-} \right) + 2r. \quad (9.78)$$

相应的，有

$$e^{\kappa_+(v-u)} = \left| \left( \frac{r - r_+}{r_+} \right) \right| e^{\kappa_+ G_+(r)}. \quad (9.79)$$

类似的，在  $r_h = r_-$  的邻域内(从而  $r < r_+$ )，有  $g_-(r) = \frac{1}{\kappa_+(r-r_+)} + 2$ ，积分得出

$$G_-(r) = \frac{1}{\kappa_+} \ln \left| \left( \frac{r - r_+}{r_+} \right) \right| + 2r = \frac{1}{\kappa_+} \ln \left( \frac{r_+ - r}{r_+} \right) + 2r. \quad (9.80)$$

从而有

$$e^{\kappa_-(v-u)} = \left| \left( \frac{r - r_-}{r_-} \right) \right| e^{\kappa_- G_-(r)}. \quad (9.81)$$

注意，这两个邻域有一个交叠区，即  $r_- < r < r_+$  的单向膜区。

对于  $r_h = r_+$  的邻域，接下来的一切讨论都和(9.2.1)小节中给出的一样。比如我们可以定义  $V_+, U_+$  以使得

$$U_+ V_+ = - \left( \frac{r - r_+}{r_+} \right) e^{\kappa_+ G_+(r)}. \quad (9.82)$$

与(9.79)比较可知,  $(V_+, U_+)$ 可以分成四片, 对于 $r_- < r < r_+$ , 取

$$V_+ = \pm e^{\kappa+v}, \quad U_+ = \pm e^{-\kappa+u}, \quad (9.83)$$

它覆盖 $(V_+, U_+)$ 坐标系的一、三象限(即上部和下部)。而对于 $r > r_+$ , 则取

$$V_+ = \pm e^{\kappa+v}, \quad U_+ = \mp e^{-\kappa+u}, \quad (9.84)$$

它覆盖 $(V_+, U_+)$ 坐标系的二、四象限(即左侧和右侧)。

但是, 对于 $r_h = r_-$ 的邻域, 接下来的讨论会和(9.2.1)小节在细节上有点出入。这是因为上一段已经把 $r_- < r < r_+$ 的交叠区定义在 $(V_+, U_+)$ 坐标系的一、三象限了, 而 $(V_-, U_-)$ 坐标当然是要和 $(V_+, U_+)$ 坐标拼接成一个整体的, 为了能拼接起来, 则 $r_- < r < r_+$ 的交叠区在 $(V_-, U_-)$ 坐标系中也必须定义在一、三象限。所以, 当 $r_- < r < r_+$ 时, 我们需要定义

$$V_- = \pm e^{\kappa-v}, \quad U_- = \pm e^{-\kappa-u}. \quad (9.85)$$

进而当然,  $0 < r < r_-$ 的区域就只能在 $(V_-, U_-)$ 坐标系的二、四象限。所以, 当 $0 < r < r_-$ 时, 需要定义

$$V_- = \pm e^{\kappa-v}, \quad U_- = \mp e^{-\kappa-u}. \quad (9.86)$$

与(9.81)式比较, 即有

$$U_- V_- = \left(\frac{r - r_-}{r_-}\right) e^{\kappa_- G_-(r)}, \quad (9.87)$$

注意, 前面没有负号!

代入 $\kappa_+/\kappa_- = -r_-^2/r_+^2$ ,  $\kappa_-/\kappa_+ = -r_+^2/r_-^2$ , 以及 $G_\pm(r)$ 的表达式, 即可以将(9.82)式和(9.87)式重新表达成

$$\begin{aligned} U_+ V_+ &= -\left(\frac{r - r_+}{r_+}\right) \left(\frac{r_-}{r - r_-}\right)^{r_-^2/r_+^2} e^{2\kappa_+ r} \\ U_- V_- &= \left(\frac{r - r_-}{r_-}\right) \left(\frac{r_+}{r - r_+}\right)^{r_+^2/r_-^2} e^{2\kappa_- r}. \end{aligned}$$

从这两个式子不难看出, 在单向膜区的边界, 当 $r \rightarrow r_-$ 时,  $U_+ V_+ \rightarrow \infty$ , 所以 $r = r_-$ 在 $(V_+, U_+)$ 坐标系一、三象限的无穷远处。类似的, 当 $r \rightarrow r_+$ 时,  $U_- V_- \rightarrow \infty$ , 所以 $r = r_+$ 也在 $(V_-, U_-)$ 坐标系一、三象限的无穷远处。

另外，从上一段的第二个式子，我们还能得到， $r = 0$ 处的时空奇性满足

$$r = 0 \Leftrightarrow U_- V_- = -1, \quad (9.88)$$

当然，这是位于 $(V_-, U_-)$ 坐标系二、四象限(即左右两侧)的一条双曲线。这说明，与施瓦西黑洞不同，RN黑洞的时空奇性是类时的。

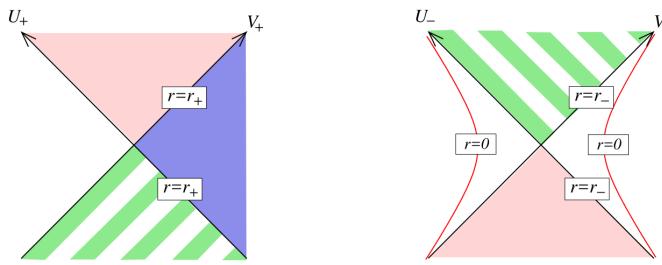


图 9.8: RN黑洞的两种克鲁斯卡坐标卡。

RN解的两种 $(V, U)$ 坐标称作两种坐标卡， $(V_+, U_+)$ 坐标卡如图(9.8)左图，其中位于底部的第三象限是白洞区，而位于上部的第一象限是黑洞区。而 $(V_-, U_-)$ 坐标卡如图(9.8)右图，其中位于底部第三象限的是黑洞区，而位于上部第一象限的是白洞区。注意， $(V_-, U_-)$ 坐标卡的二、四象限(即左右两侧)是有限的，时空奇性的 $U_- V_- = -1$ 是其边界，所以和 $(V_+, U_+)$ 坐标卡不同， $(V_-, U_-)$ 坐标卡的二、四象限不是两个渐近平坦的时空区域。

但是，由于单向膜区是交叠区，同时被两个坐标卡所覆盖，所以这两个坐标卡其实是要拼接起来的，比方说，像图(9.8)所暗示的那样，将右边的 $(V_-, U_-)$ 坐标卡拼接在左边 $(V_+, U_+)$ 坐标卡的下方。但是， $(V_-, U_-)$ 坐标卡同样可以拼接在 $(V_+, U_+)$ 坐标卡的上方。这导致一个结果，即我们可以交错地拼接两种坐标卡，进而将时空无穷地延拓下去。这是RN解与施瓦西解的又一个不同，即它的克鲁斯卡延拓可以无穷无尽地永远进行下去。

#### 9.2.4 Eddington-Finkelstein坐标

实际上，如果仅仅是想消除视界面位置的坐标奇异性，那除了克鲁斯卡坐标以外，还有一种更简单的坐标也能做到这一点，那就是爱丁顿-芬

克斯坦(Eddington-Finkelstein)坐标。下面以施瓦西时空为例来讲述这种坐标。

在通常的坐标系中，施瓦西黑洞的时空间度规为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2.$$

即  $f(r) = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$ , 从而

$$r_* = \int \frac{dr}{f(r)} = r + r_g \ln \left| \left( \frac{r - r_g}{r_g} \right) \right|. \quad (9.89)$$

这个坐标有时候也称作乌龟坐标。正如我们已经知道的，有了  $r_*$  以后，进而就能定义类光坐标  $u = t - r_*$ ,  $v = t + r_*$ , 但是正如前面提过的  $(v, u)$  坐标在视界面处依然是奇异的。

爱丁顿-芬克斯坦的想法是，不同时引入  $u, v$ , 而只引入一半，即只引入  $v$  或者只引入  $u$ , 只引入  $v$  就称作内行爱丁顿-芬克斯坦坐标，只引入  $u$  就称作外行爱丁顿-芬克斯坦坐标。

以内行爱丁顿芬克斯坦坐标为例，它即是将原来的  $(t, r)$  坐标变换为  $(v, r)$  坐标，这时候

$$dt = dv - dr_* = dv - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr, \quad (9.90)$$

消去施瓦西度规中的  $dt^2$  项，即可以得到内行爱丁顿-芬克斯坦坐标下的度规，为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2d\Omega^2. \quad (9.91)$$

特别的，在  $r = r_g$  的视界面上，这个度规变成

$$ds^2|_{r_g} = 2dvdr + r^2d\Omega^2, \quad (9.92)$$

这是一个定义良好的度规，没有任何病态，只是相当于在视界面上  $(v, r)$  变成了类光坐标。所以，内行爱丁顿-芬克斯坦坐标在  $r = r_g$  处没有奇异性！

所以， $(v, r)$  坐标的好处是， $r$  可以从视界外一直延拓到视界内，直到最终碰到  $r = 0$  处的时空奇性。很显然，原来的基林向量场  $\xi = \partial_t$  在  $(v, r)$  坐标中就变成了

$$\xi = \partial_v. \quad (9.93)$$

不妨来分析一下 $(v, r)$ 坐标中的径向类光测地线，根据(9.91)，这时候有

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dv^2 + 2dvdv = 0. \quad (9.94)$$

这个方程的一个解是

$$v = \text{constant}, \quad (9.95)$$

这描述的是内行类光测地线。另一个解由下式描写

$$\frac{dv}{dr} = 2\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr, \quad (9.96)$$

积分即得

$$v = 2r + 2r_g \ln \left| \left( \frac{r - r_g}{r_g} \right) \right| + \text{constant}. \quad (9.97)$$

这描述的是外行类光测地线，注意，由于绝对值的符号问题，它要分成视界外和视界内两部分来讨论。

那么在 $r = r_g$ 的视界面上，径向外行类光测地线是什么呢？很显然，由(9.92)式，这时候径向类光测地线方程变成了

$$ds^2|_{r_g} = 2dvdv = 0, \quad (9.98)$$

因此 $r = r_g$ 本身变成了径向外行类光测地线！这与前面所说的，视界面是一个类光超曲面是吻合的。

我们可以用芬克斯坦图来画出这些径向类光测地线。所谓芬克斯坦图就是以 $(t_*, r)$ 为坐标的图(9.9)，其中纵坐标

$$t_* = v - r. \quad (9.99)$$

在芬克斯坦图中，内行类光测地线由 $t_* + r = v = \text{constant}$ 描述，因此和竖直轴成45度夹角，在图(9.9)中以红线表示。在图中，外行类光测地线以蓝线表示。很显然，外行类光测地线的行为在视界内外有很大不同。在视界外，外行测地线的确是向外行走的。

然而，在视界之内，光锥强烈地向着 $r = 0$ 的奇点方向倾斜了，这导致视界内的外行类光测地线实际上根本不向外行走，而是同样朝向 $r = 0$ 的奇

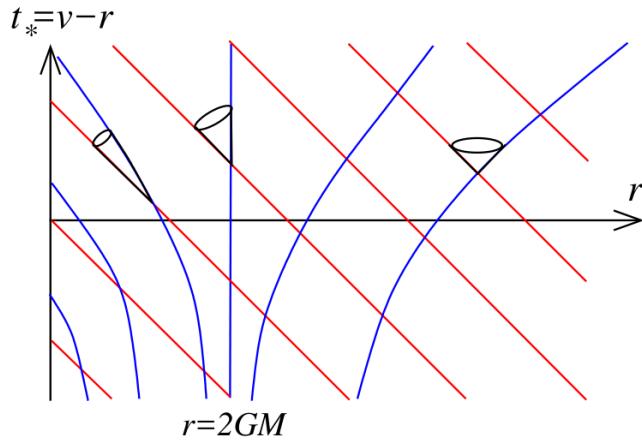


图 9.9: 内行坐标的芬克斯坦图。红线是内行类光测地线，蓝线是外行类光测地线。由于光锥的倾斜，在视界之内，外行测地线实际上并不指向外。

点方向，并在有限时间 $t_*$ 之内撞上奇点。分界线就是 $r = r_g$ 的这条外行类光测地线，它完全沿着视界面，在芬克斯坦图中是竖直蓝线。

图(9.9)中内行类光测地线和外行类光测地线夹角处的小圆锥就是未来光锥，任何有质量粒子的世界线都只能从光锥之内穿过。现在，我们立即就能理解黑洞为什么叫黑洞了：因为从图(9.9)中很清楚地能看到，你只要进入黑洞，就再也出不来了。因为视界之内的未来光锥都是向着奇点倾斜的，你被俘获了！不过，从图(9.9)中也可以看出，在掉进黑洞的人本身看来，视界面并没有什么特殊的地方，这个人在穿过视界时不会感觉到任何异常，只是它向外发送的信号再也到不了无穷远处的观察者了。

当然，也可以引入外行爱丁顿-芬克斯坦坐标，即 $(u, r)$ 坐标，这个坐标系中的度规是

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2. \quad (9.100)$$

除了 $u, v$ 这两个记号的差别之外，更要注意的是，这个度规和前面内行坐标下度规的区别，即现在的 $-2dudr$ 项前面有个负号，而内行坐标下的相应项是 $2dvdr$ ，没有负号。

外行坐标的芬克斯坦图如图(9.10)所示。很显然，这描写的是一个白洞，而不是黑洞，因为粒子只能从视界内出来，而不可能从视界外跑进视界之内。

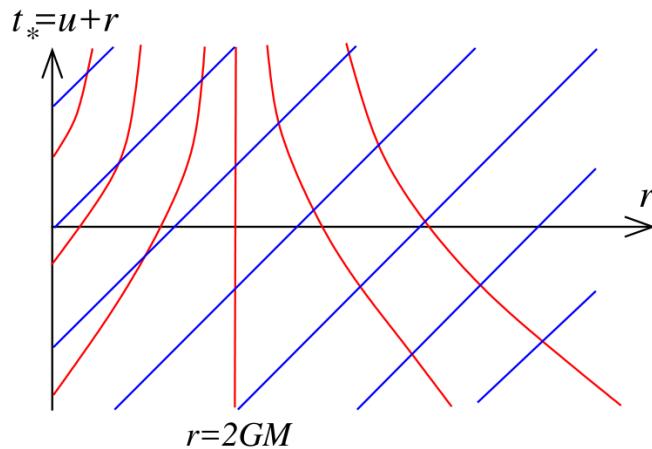


图 9.10: 外行坐标的芬克斯坦图。红线是内行类光测地线，蓝线是外行类光测地线。由于光锥向外倾斜，在视界之内，内行测地线实际上并不指向内。

为什么原来的施瓦西坐标 $(t, r)$ 既可以描述黑洞也可以描述白洞，而爱丁顿-芬克斯坦坐标的 $(v, r)$ 坐标就只能描写黑洞， $(u, r)$ 坐标就只能描写白洞呢？原因在于，原来的施瓦西坐标 $(t, r)$ 是时间反演对称的，即其度规在 $t \rightarrow -t$ 的变换之下是不变的，因此它描述白洞和黑洞都同样成立。而根据 $v, u$ 的定义可知，在 $t \rightarrow -t$ 的时间反演之下，将有 $v \rightarrow -u$ 以及 $u \rightarrow -v$ 。很容易验证， $(v, r)$ 坐标在时间反演之下，其度规并不保持不变，实际上度规(9.91)在时间反演之下就变成了度规(9.100)，所以爱丁顿-芬克尔斯图坐标破坏了时间反演对称性，因此只能分别描述黑洞和白洞，并且黑洞的时间反演就是白洞。

### 9.3 彭罗斯图

如何在保持一个时空因果结构的前提下将整个时空的“地图”画在一个有限的纸张区域上呢？显然，为此就要将时空的无穷远变成有限，结果表明在闵可夫斯基号差的流形上，无穷远比人们想象的要更为有趣一些。这是因为，人们可以沿着空间方向走向无穷，也可以沿着类时方向走向无穷，甚至还可以沿着类光方向走向无穷，而这三种无穷每一种都有不同的结构。如何直观地用“地图”显示这些无穷的结构呢？这就是本节要讨论

的内容。

### 9.3.1 外尔变换

变无穷为有限的一个基本方法是通过所谓的外尔变换，其定义是：给定一个时空 $M$ 和一个度规场 $g_{\mu\nu}(x)$ ，我们可以构建一个新的度规场 $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$ 如下

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x), \quad (9.101)$$

式中 $\Omega(x)$ 是一个非零的光滑函数。上述变换就叫做时空度规的外尔变换，在广义相对论的文献中有时也称之为共形变换，它和共形场论中的共形变换有密切联系但并不完全是一回事。

很明显，外尔变换相当于把时空距离在每一个局部上都做了一个伸缩， $\Omega(x)$ 就是伸缩因子。不过，这种局部伸缩是保角的，具体来说即是，如果有两个切向量场 $X^\mu$ 和 $Y^\mu$ ，记 $\langle X, Y \rangle_g = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu$ ，记 $\langle X, Y \rangle_{\tilde{g}} = \tilde{g}_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu$ ，则

$$\frac{\langle X, Y \rangle_{\tilde{g}}}{\sqrt{\langle X, X \rangle_{\tilde{g}} \langle Y, Y \rangle_{\tilde{g}}}} = \frac{\langle X, Y \rangle_g}{\sqrt{\langle X, X \rangle_g \langle Y, Y \rangle_g}}, \quad (9.102)$$

这很容易直接验证。当然，这个结果默认了切向量场 $X^\mu$ 和 $Y^\mu$ 均不类光。对于类光向量场 $Z^\mu$ ，我们有

$$\langle Z, Z \rangle_g = 0 \Leftrightarrow \langle Z, Z \rangle_{\tilde{g}} = 0. \quad (9.103)$$

即是说，类光向量在外尔变换以后的度规下依然类光。类似的，一个类时向量在变换以后的度规下依然类时，而类空向量在变换以后的度规下也依然类空。所以，外尔变换保持时空的局部光锥结构。换言之，外尔变换保持时空的因果结构。

变无穷为有限的关键技巧就在于通过合适的伸缩因子 $\Omega(x)$ 将无穷收缩到有限。为了将无穷收缩到有限，伸缩因子 $\Omega(\mathbf{x}, t)$ 必须满足如下条件

$$\Omega(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0, \quad \text{当} |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \text{ 和(或)} |t| \rightarrow \infty. \quad (9.104)$$

因此，“无穷”可以等同于这样的时空点 $x = (\mathbf{x}, t)$ ，它使得 $\Omega(\mathbf{x}, t) = 0$ 。这些“无穷”点并不存在于原来的时空之中，但是可以额外添加到时空图上，作为时空的边界(这些边界本身不是时空的一部分)，这样的操作称之为时空的共形紧化。

## 外尔变换和测地线

不仅如此，还可以证明，一条类光测地线在外尔变换后的新度规下依然是一条类光测地线。（由于外尔变换改变了时空距离，所以一条类时测地线在变换之后不一定依然是类时测地线，当然，由于外尔变换保持时空的因果结构，类时曲线在变换之后将依然是类时曲线。）

为了证明上述结论，我们先来计算一下克里斯托夫联络在外尔变换之下的变换关系，

$$\begin{aligned}\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}[\tilde{g}] &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}(\partial_{\rho}\tilde{g}_{\nu\sigma} + \partial_{\sigma}\tilde{g}_{\nu\rho} - \partial_{\nu}\tilde{g}_{\rho\sigma}) \\ &= \frac{1}{2}\Omega^{-2}g^{\mu\nu}(\partial_{\rho}(\Omega^2g_{\nu\sigma}) + \partial_{\sigma}(\Omega^2g_{\nu\rho}) - \partial_{\nu}(\Omega^2g_{\rho\sigma})) \\ &= \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}[g] + \Omega^{-1}(\delta_{\sigma}^{\mu}D_{\rho}\Omega + \delta_{\rho}^{\mu}D_{\sigma}\Omega - g_{\rho\sigma}D^{\mu}\Omega)\end{aligned}\quad (9.105)$$

式中，在最后一行因为 $\Omega$ 是一个标量函数，所以我们可以将普通导数替换成协变导数。

现在，考察一条原度规之下的类光测地线，它满足如下两个方程

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}[g]\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}\frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} &= 0, \\ g_{\rho\sigma}\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}\frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} &= 0.\end{aligned}\quad (9.106)$$

利用第一个方程，我们有，在外尔变换之后的度规下

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}[\tilde{g}]\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}\frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = \Omega^{-1}(\delta_{\sigma}^{\mu}D_{\rho}\Omega + \delta_{\rho}^{\mu}D_{\sigma}\Omega - g_{\rho\sigma}D^{\mu}\Omega)\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}\frac{dx^{\sigma}}{d\lambda}\quad (9.107)$$

但是，对于类光测地线，由于 $g_{\rho\sigma}\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}\frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0$ ，所以上式等号右边的最后一项自动为零。进而可以将上式重写成

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu}[\tilde{g}]\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}\frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 2\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{1}{\Omega}\frac{d\Omega}{d\lambda}.\quad (9.108)$$

但最后的这个方程其实同样是测地线方程，只不过参数 $\lambda$ 不再是仿射参数，可以通过选择一个合适的参数变换 $\lambda(\tilde{\lambda})$ 来抵消掉最后这个方程右边的项，从而得到一个以合适的 $\tilde{\lambda}$ 为仿射参数的标准的测地线方程。

因此，外尔变换的确将一条类光测地线变成一条类光测地线！

## 外尔曲率张量

外尔变换会改变黎曼曲率张量和里奇曲率张量，但是可以证明(计算比较繁琐，这里从略)，可以组合出一个在外尔变换之下保持不变的曲率张量，称作外尔曲率张量，记作 $C_{\rho\sigma\mu\nu}$ ，其定义为

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{2}{D-2}(g_{\rho[\mu}R_{\nu]\sigma} - g_{\sigma[\mu}R_{\nu]\rho}) + \frac{2}{(D-1)(D-2)}Rg_{\rho[\mu}g_{\nu]\sigma}.$$

式中 $D$ 表示时空的维数。由定义，外尔曲率张量其实就是从黎曼曲率张量中去除所有可能的非零收缩，所以，外尔曲率张量所有可能的收缩都为零！另外，外尔曲率张量有和黎曼曲率张量同样的指标对称性！所谓的外尔曲率张量在外尔变换下保持不变，指的是

$$C^{\rho}_{\sigma\mu\nu}[\tilde{g}] = C^{\rho}_{\sigma\mu\nu}[g]. \quad (9.109)$$

如果一个时空的外尔曲率张量等于零，则我们就称之为共形平坦的。

### 9.3.2 阿恩斯托斯基时空的彭罗斯图

下面来考察 $3+1$ 维阿恩斯托斯基时空的共形紧化，并讲述其彭罗斯图。阿恩斯托斯基时空的度规是

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (9.110)$$

下面引入类光坐标 $u, v$

$$u = t - r, \quad v = t + r. \quad (9.111)$$

当然由于 $r \geq 0$ ，所以还要满足

$$v \geq u. \quad (9.112)$$

进而将时空度规写成

$$ds^2 = -dudv + \frac{(u-v)^2}{4}d\Omega^2. \quad (9.113)$$

下面来了关键的一步。注意到以上类光坐标的取值范围都是 $(-\infty, +\infty)$ ，所以我们可以利用 $\tan$ 函数，将坐标的取值范围变成有限，具体来说即是引入新的类光坐标 $\tilde{U}, \tilde{V}$

$$u = \tan(\tilde{U}), \quad v = \tan(\tilde{V}) \quad (9.114)$$

显然  $\tilde{U}, \tilde{V} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , 并且满足

$$\tilde{V} \geq \tilde{U}. \quad (9.115)$$

在这个新的坐标中, 度规为

$$ds^2 = \frac{1}{(2 \cos \tilde{U} \cos \tilde{V})^2} [-4d\tilde{U}d\tilde{V} + \sin^2(\tilde{U} - \tilde{V})d\Omega^2]. \quad (9.116)$$

注意, 当我们趋于闵可夫斯基时空的边界时, 即  $\tilde{U}, \tilde{V} \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$  时, 这个度规是发散的, 反映了时空距离在“无穷”处是发散的。

为了进行共形紧化, 我们选择伸缩因子为

$$\Omega(x) = 2 \cos \tilde{U} \cos \tilde{V}, \quad (9.117)$$

则可以得到外尔变换以后新的度规

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2(x) ds^2 = -4d\tilde{U}d\tilde{V} + \sin^2(\tilde{U} - \tilde{V})d\Omega^2. \quad (9.118)$$

这个新的度规和原来的度规有相同的因果结构, 但是现在, 一切时空距离都是有限的。

彭罗斯图就是这个外尔变换之后新的时空的“地图”(它和原来的时空有相同的因果结构), 图中我们只标示  $\tilde{U}, \tilde{V}$  坐标, 不标示角度部分坐标, 因此彭罗斯图中的每一个点都代表一个半径为  $\sin(\tilde{U} - \tilde{V})$  的二维球面。

为了画出彭罗斯图, 我们取竖直方向为时间方向, 水平方向为空间方向, 当然, 光线都是沿着与竖直方向成45度夹角的方向行进。这意味着  $\tilde{U}, \tilde{V}$  的光锥坐标轴都是与竖直方向成45度夹角的。如果定义  $\tilde{V} = T + R, \tilde{U} = T - R$ ,  $T$  是竖直轴,  $R$  是水平轴, 则  $\tilde{V} \geq \tilde{U}$  意味着整个彭罗斯图只可能占据右侧  $R \geq 0$  的那半边。

如图(9.11)所示, 现在我们将  $\Omega(x) = 0$  的共形边界画到彭罗斯图上, 也就是将闵可夫斯基时空的“无穷”在彭罗斯图上画出来。闵可夫斯基时空有几种不同的无穷:

首先, 类空无穷, 通常记作  $i^0$ 。它即是取  $t$  有限, 取  $r \rightarrow \infty$ 。很显然, 这相当于  $u, v$  坐标的  $u \rightarrow -\infty, v \rightarrow \infty$ , 换成  $\tilde{U}, \tilde{V}$  坐标即是

$$\tilde{U} = -\frac{\pi}{2}, \quad \tilde{V} = \frac{\pi}{2}, \quad (9.119)$$

显然, 这在彭罗斯图上是水平轴上的一个点。

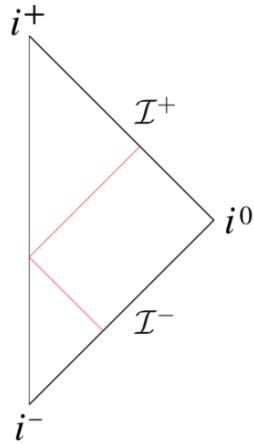


图 9.11: 阁可夫斯基时空的彭罗斯图。

其次, 过去类时无穷  $i^-$ , 以及未来类时无穷  $i^+$ 。它们即是取  $r$  有限, 取  $t \rightarrow \pm\infty$ 。用  $u, v$  坐标即是  $u \rightarrow \pm\infty, v \rightarrow \pm\infty$ 。换成  $\tilde{U}, \tilde{V}$  坐标即是

$$\tilde{U} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \tilde{V} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad (9.120)$$

显然, 这在彭罗斯图上是竖直轴上方的一个点( $i^+$ )和下方的一个点( $i^-$ )。

第三, 过去类光无穷, 记作  $\mathcal{I}^-$ 。它即是取  $t \rightarrow -\infty, r \rightarrow \infty$ , 并让  $t+r$  有限。在  $u, v$  坐标中即是,  $v$  有限,  $u \rightarrow -\infty$ 。换成  $\tilde{U}, \tilde{V}$  坐标即是

$$\tilde{U} = -\frac{\pi}{2}, \quad |\tilde{V}| \neq \frac{\pi}{2}. \quad (9.121)$$

这是彭罗斯图下方的一条斜边。

第四, 未来类光无穷, 记作  $\mathcal{I}^+$ 。它即是取  $t \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty$ , 并让  $t-r$  有限。在  $u, v$  坐标中即是,  $u$  有限,  $v \rightarrow \infty$ 。换成  $\tilde{U}, \tilde{V}$  坐标即是

$$|\tilde{U}| \neq \frac{\pi}{2}, \quad \tilde{V} = \frac{\pi}{2}. \quad (9.122)$$

这是彭罗斯图上方的一条斜边。

在彭罗斯图中, 所有的类时测地线, 如果一直向两端延伸下去, 都会起于  $i^-$ , 终止于  $i^+$ 。所有的类光测地线, 如果一直延伸下去, 都会起于  $\mathcal{I}^-$ , 终止于  $\mathcal{I}^+$ 。注意彭罗斯图左边那条竖直的直线, 它并不是时空的边界, 而仅仅是  $r=0$  的坐标原点, 为了说明这一点, 我们在图(9.11)中用红线画出

了一条类光测地线，它开始于 $\mathcal{I}^-$ ，然后到达 $r = 0$ 的竖直线，之后继续前进，返回 $r > 0$ 处，最终到达 $\mathcal{I}^+$ 。

彭罗斯图是将四维时空用一张两维图来表示，因此会忽略两个维度，人们通常让这未标示的两个维度为球坐标的角度部分，从而使得彭罗斯图上的每一个点代表一个二维球面。这意味着彭罗斯图通常是用来处理球对称时空，或者说有 $SO(3)$ 对称性的时空。这是一些最简单的时空，通常也是最重要的。

正如我们已经看到的，闵可夫斯基时空有两个位于未来类时无穷和过去类时无穷的边界点，尤其是同时还有两个类光边界。在量子场论中，这导致人们自然地问如下关于零质量粒子场(比如引力场)的散射问题：即在 $\mathcal{I}^-$ 上给定渐近态，让它演化，然后在 $\mathcal{I}^+$ 上读出最终的渐近态。这类问题密切地牵涉到散射 $S$ 矩阵的定义。

以上论点也可以推广到渐近平坦时空，所谓渐近平坦是指在类空和类光方向分别渐近趋于 $i^0$ 和 $\mathcal{I}^\pm$ 的时空。 $i^0$ 是一个点因此无法利用，然而由于渐近平坦时空有类光边界 $\mathcal{I}^\pm$ ，所以同样能考察零质量粒子场(比如引力场)的散射问题，同样能定义散射 $S$ 矩阵。尤其是考虑到渐近平坦时空的量子引力，这时候微分同胚不变性将使得理论不存在局域的可观测量，任何可观测量都要用两个渐近边界 $\mathcal{I}^\pm$ 上的渐近态来定义，这就使得渐近平坦时空量子引力的可观测量必定为散射 $S$ 矩阵。

但是正如后面的章节中会讨论的，如果宇宙学常数为负，那时空将不是渐近平坦的而是渐近AdS(Anti de-Sitter)的，这种时空在类时的方向上没有共形边界，而在类光和类空方向上的边界结合在一起了，从而有唯一一个共形的渐近边界 $\mathcal{I}$ (与 $i^0$ 是一个点不同，也与 $\mathcal{I}^\pm$ 分成两片不同)。 $\mathcal{I}$ 本身是类时的(它的法向量类空)，这时候人们就可以在这个渐近边界 $\mathcal{I}$ 上定义共形场论，这个共形场论的关联函数(而不是散射 $S$ 矩阵)才是原来渐近AdS时空的可观测量，这也就是所谓的AdS/CFT对应，CFT就是共形场论(conformal field theory)。

但是如果宇宙学常数为正，那时空将渐近dS(de-Sitter)，这种时空在类空的方向上没有渐近边界，而类光和类时方向上的边界结合在一起了，在这种情况下，这些共形边界本身是类空的(法向量类时)，与AdS/CFT不同，这时候如何定义原来渐近dS时空的可观测量是一件尚没有研究清楚的问题，甚至还能不能定义可观测量都不太清楚。

关于AdS时空和dS时空，以及关于它们的彭罗斯图，我们将在后面的章节中再具体讨论。

### 9.3.3 施瓦西时空的彭罗斯图

#### 克鲁斯卡时空的彭罗斯图

正如前文解释的，最好的展示一个时空因果结构的方式就是画出其彭罗斯图。下面我们来讨论施瓦西时空的彭罗斯图。当然，施瓦西时空的完整结构要用克鲁斯卡延拓来展示，所以我们将要讨论的其实是克鲁斯卡延拓以后的施瓦西时空的彭罗斯图。

首先，我们回忆一下克鲁斯卡坐标 $V, U$ ，它们的取值范围都是 $(-\infty, +\infty)$ 。和前面讨论闵可夫斯基时空时所做的一样，我们可以利用tan函数来将坐标的无穷转换成有限，具体来说即是引入新的坐标，

$$U = \tan \tilde{U}, \quad V = \tan \tilde{V}. \quad (9.123)$$

当然 $\tilde{U}, \tilde{V} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，注意现在并没有 $\tilde{V} \geq \tilde{U}$ 的限制，所以最终的彭罗斯图将同时占据左右两侧，左右对称，而不是只有右侧的部分！有了这个坐标以后，进而就能将克鲁斯卡度规(9.67)重写成

$$ds^2 = \frac{1}{(\cos \tilde{U} \cos \tilde{V})^2} \left[ -\frac{r_g}{\kappa^2 r} e^{-2\kappa r} d\tilde{V} d\tilde{U} + r^2 (\cos \tilde{U} \cos \tilde{V})^2 d\Omega^2 \right]. \quad (9.124)$$

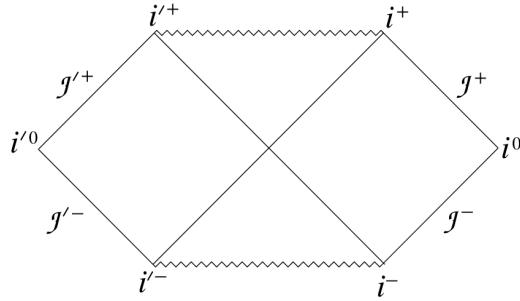


图 9.12: 施瓦西时空的彭罗斯图。上部代表黑洞区域，下部代表白洞区域，上下部两条水平的波浪线代表时空奇性。右侧是黑洞外部的一个渐近平坦区域，左侧是另一个渐近平坦区域。和克鲁斯卡图中一样，过原点的两条45度斜线代表视界。

取共形因子 $\Omega(x) = \cos \tilde{U} \cos \tilde{V}$ ，进而就能将上述度规外尔变换为如下形式

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2(x) ds^2 = -\frac{r_g}{\kappa^2 r} e^{-2\kappa r} d\tilde{V} d\tilde{U} + r^2 (\cos \tilde{U} \cos \tilde{V})^2 d\Omega^2. \quad (9.125)$$

完全类似于闵可夫斯基时空情形，我们也可以讨论这个时空在无穷远处满足 $\Omega(x) = 0$ 的共形边界。但是，除了共形边界以外，克鲁斯卡时空还有两个边界，那就是满足 $UV = 1$ 的时空齐性，很显然

$$UV = 1 \Leftrightarrow \tan \tilde{U} \tan \tilde{V} = 1 \Leftrightarrow \tilde{U} + \tilde{V} = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (9.126)$$

这在以 $\tilde{U}, \tilde{V}$ 为坐标的彭罗斯图上是上部和下部的两条水平线，通常画成波浪线以代表时空奇性。整个彭罗斯图如图(9.12)所示。

彭罗斯图(9.12)有两个渐近平坦区域，因此它有类光边界 $\mathcal{I}^\pm$ 和类光边界 $\mathcal{I}'^\pm$ 。从彭罗斯图中，我们可以给出黑洞的更好定义，所以黑洞区域，就是指无法发送信息到未来类光无穷 $\mathcal{I}^+$ 和 $\mathcal{I}'^+$ 的区域，也就是彭罗斯图的上部。黑洞区域的边界就称作未来事件视界，记为 $\mathcal{H}^+$ 。

类似的，可以定义白洞区域为无法接收到来自过去类光无穷 $\mathcal{I}^-$ 和 $\mathcal{I}'^-$ 的信息的区域，也就是彭罗斯图的下部。白洞区域的边界就是过去事件视界，记作 $\mathcal{H}^-$ 。

重要的是，为了定义黑洞，我们需要知道整个时空的因果结构，尤其是需要利用到未来类光无穷。并没有直接利用时空在某给定时刻的空间截片 $\Sigma$ 来定义黑洞区域的方式，至少任何这样的定义都不是一个良定义。这件事意味着，其实一个观察者无从真正地知道它是否在黑洞区域内，除非他知道时空的整个未来演化。

### 黑洞的形成：弱宇宙监督

卡鲁斯卡延拓以后的施瓦西解包含一些非物理的东西，比如白洞区域就是非物理的，真实的施瓦西时空不是先有一个白洞区域，然后接着一个黑洞区域。真实的黑洞通常是由非常大质量的恒星发生引力坍缩所形成的。所以真实黑洞的因果结构并不由彭罗斯图(9.12)所刻画。

为了得到一个真实黑洞的彭罗斯图，原则上就必须得研究恒星的引力坍缩，这当然比求解施瓦西解要复杂一些，所以我们放到后面的章节中再进行。实际上，为了推导出真实黑洞的彭罗斯图，我们可以考虑如下一个假想的引力坍缩过程：我们假想一个均匀填充满光子的薄层球壳，球壳里面是真空，假设所有的光子都正在以光速朝着 $r = 0$ 的球心飞行，因此这个球壳正在以光速向内坍缩！很显然，在所有的光子都汇聚到 $r = 0$ 点时（甚至在此之前），由于光子能量密度的高度集中，时空会形成一个黑洞。所以这就是一个物质发生引力坍缩进而形成黑洞的假想例子。

但这个假想例子很容易精确描述，首先，根据伯克霍夫定理的推论，虽然球壳本身在以光速运动，但球壳里面所包围的空腔一定保持为平坦的真空，所以空腔里面的时空由图(9.13)中最左边那幅平坦时空彭罗斯图的阴影部分描写(请读者想想为什么空腔里面对应阴影部分？)。其次，根据伯克霍夫定理，球壳外面的时空必定由施瓦西解所描述，所以球壳外部的时空必定由图(9.13)中间那幅施瓦西时空彭罗斯图的阴影部分描写。最后，将这两个阴影部分分别裁剪下来，并在以光速运动的球壳位置拼接起来，就得到了最终的彭罗斯图，也就是图(9.13)中最右边那幅图。

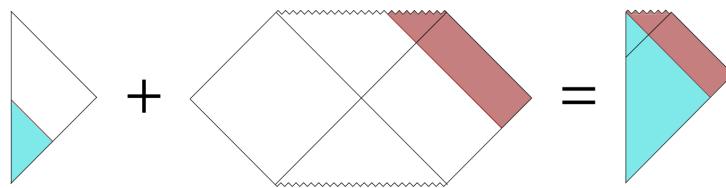


图 9.13：裁剪并拼接两个彭罗斯图的阴影部分，以得到真实黑洞的彭罗斯图。

所以，球对称引力坍缩形成的黑洞必定具有图(9.13)中最右边那幅彭罗斯图，图中与竖直方向成45度角的那条斜线段同样代表黑洞视界。但是现在这个视界是从左边的 $r = 0$ 处开始的，所以视界面积并不是恒定不变的 $4\pi r_g^2$ ，而是从零开始逐渐增加到这个稳定值。

当然，以上是一个假想的例子，对于真实的球对称引力坍缩，坍缩星体的表面必定走的是类时世界线，所以真实的球对称引力坍缩的彭罗斯图大体如图(9.14)所示。注意，从这个彭罗斯图可以看到，真实的黑洞并没有一个白洞区域。

从真实黑洞的彭罗斯图中可以看到，黑洞有一个重要的性质，即它的时空奇性必定被一个未来事件视界所包围。这意味着，黑洞的时空奇性对无穷远处的观察者完全不能产生影响。如果一个时空奇性不被未来事件视界包围，从而能够对无穷远处的观察者产生影响，比如克鲁斯卡时空中白洞里面的时空奇性，那这种时空奇性就称作裸奇性。

爱因斯坦场方程允许存在裸奇性的解，比如克鲁斯卡时空中的白洞，再比如宇宙大爆炸开始时的时空奇性。其实，如果施瓦西解中的质

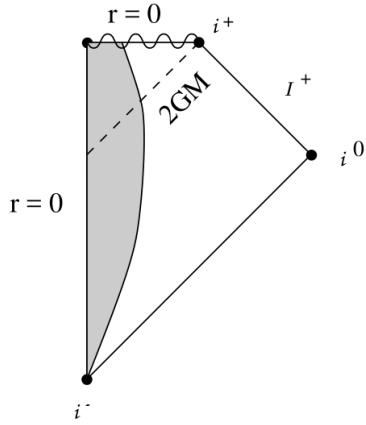
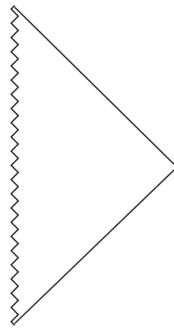


图 9.14: 球对称引力坍缩的彭罗斯图。

量  $M < 0$ , 那就会有裸奇性。这时候, 施瓦西度规可以写成

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2G|M|}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{2G|M|}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (9.127)$$

很明显这时候根本不存在视界! 但是,  $r = 0$  处的时空奇性依然存在。可以按照讨论闵可夫斯基时空类似的方式讨论这个时空的彭罗斯图, 即先引入类光坐标  $v, u$ , 再引入  $\tilde{V}, \tilde{U}$ , 最终得到的彭罗斯图如图(9.15)所示。很显然,

图 9.15:  $M < 0$  的施瓦西解的彭罗斯图。

$r = 0$  处的时空奇性(图中的波浪线)并没有被一个未来事件视界包围, 从而在  $\mathcal{I}^+$  上可以看到这个奇性, 所以称之为裸奇性。

但  $M < 0$  显然是非物理的! 实际上, 人们常常相信广义相对论中的裸

奇性都是非物理的(宇宙大爆炸开始时的时空奇性是一个例外)。实际上，有一个所谓的弱宇宙监督猜测，说的就是这件事情：

**弱宇宙监督猜测：**假设物质满足所谓的主能量条件，并假定度规场和物质场都具有一般性的、光滑的初始条件，那么渐近平坦时空中将不会演化形成裸奇性。

这里所谓的主能量条件是对物质场能量动量张量的一个物理限制，要求物质场能动张量满足某种正定性，具体内容我们也许会在后面的章节中介绍。而所谓的初始条件，就是定义在时空的一个空间截片 $\Sigma$ 上的初始数据，利用场方程我们可以让这些初始数据向着未来不断演化。

假如弱宇宙监督是正确的，那如图(9.16)所示的那种引力坍缩就是不可能的！实际上，这幅图本身也有误导人的地方，因为一旦裸奇性形成，你

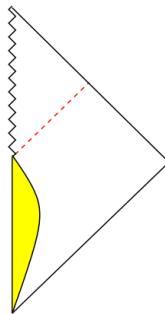


图 9.16：自动形成裸奇性的引力坍缩。

就不知道从奇性中将冒出什么东西，因此这个时候实际上不可能决定场位形在图中虚线所示的光锥内部的演化。这意味着，我们的动力学演化过程必须终止于虚线位置，不能再进一步朝着未来演化了。

弱宇宙监督猜测还没有得到证明，而只有一些数值模拟的支持。并且弱宇宙监督意味着我们没有机会直接观测到时空奇性处发生了什么，因为它们都被未来事件视界包围起来了。而时空奇性的地方正是我们预期量子引力会起重要作用的地方，因此弱宇宙监督也意味着我们很可能失去了一个直接观测量子引力效应的机会。

宇宙大爆炸开始时的时空奇性的确是裸奇性，但是由于它处于时间的开端处，而不是在时空动力学演化的未来自动形成的，所以它并不破坏弱宇宙监督猜测。很可能，我们最终对量子引力的证据要从对宇宙开端的观测中去寻找。

### 9.3.4 RN解的彭罗斯图

对于带电的RN解，我们有两种克鲁斯卡坐标卡 $(V_+, U_+)$ 和 $(V_-, U_-)$ ，应此可以分别引入 $(\tilde{V}_+, \tilde{U}_+)$ 和 $(\tilde{V}_-, \tilde{U}_-)$

$$V_{\pm} = \tan \tilde{V}_{\pm}, \quad U_{\pm} = \tan \tilde{U}_{\pm}. \quad (9.128)$$

$(\tilde{V}_+, \tilde{U}_+)$ 坐标卡的彭罗斯图如图(9.17)左图， $(\tilde{V}_-, \tilde{U}_-)$ 坐标卡如右图。图中字母W用于标示白洞区域，字母B用于标示黑洞区域。注意，图中的时空奇性是类时的。将这两种坐标卡的彭罗斯图沿着重叠区(也就是单向膜

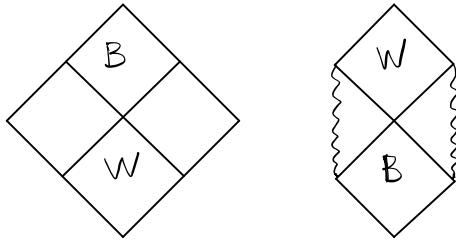


图 9.17: RN解两种坐标卡的彭罗斯图。

区)交替地拼接起来，就得到RN解完整的彭罗斯图，如图(9.18)所示。

RN解的彭罗斯图揭示了内视界 $r = r_-$ 的含义。为此，考虑定义在空间截片 $\Sigma$ 上的初始数据，如图(9.19)所示。 $\Sigma$ 称作一个柯西面。然后，我们利用场方程将柯西面上的初始数据朝前演化。

然而，一旦我们遇到图中的类时时空奇性，这种演化就不再可能了，因为还需要额外知道场在时空奇性处的信息。因此，从图(9.19)中容易看到， $\Sigma$ 上的初始数据不能演化到超出内视界 $r = r_-$ 之外，进而 $r = r_-$ 处的类光超曲面就称作柯西视界。柯西视界之外的时空不能由柯西面上的初始数据完全决定。

柯西视界通常被认为是不稳定的。为了理解这一点，让我们考察两个观察者A和B，如图(9.19)所示，观察者A一直待在黑洞外面，并以恒定的频率向黑洞里面发射信号，观察者B掉进了黑洞里面，在那里他接收A发出的信号。但是，正如图中所示，当B靠近柯西视界时，信号将变得越来越密集。也即是说，信号在柯西视界处无限蓝移了。这意味着，黑洞外面渐近区域的一个小扰动就会在柯西视界上造成一个发散的扰动，从而外面的任何一个小微扰都会使得柯西视界变得不稳定。

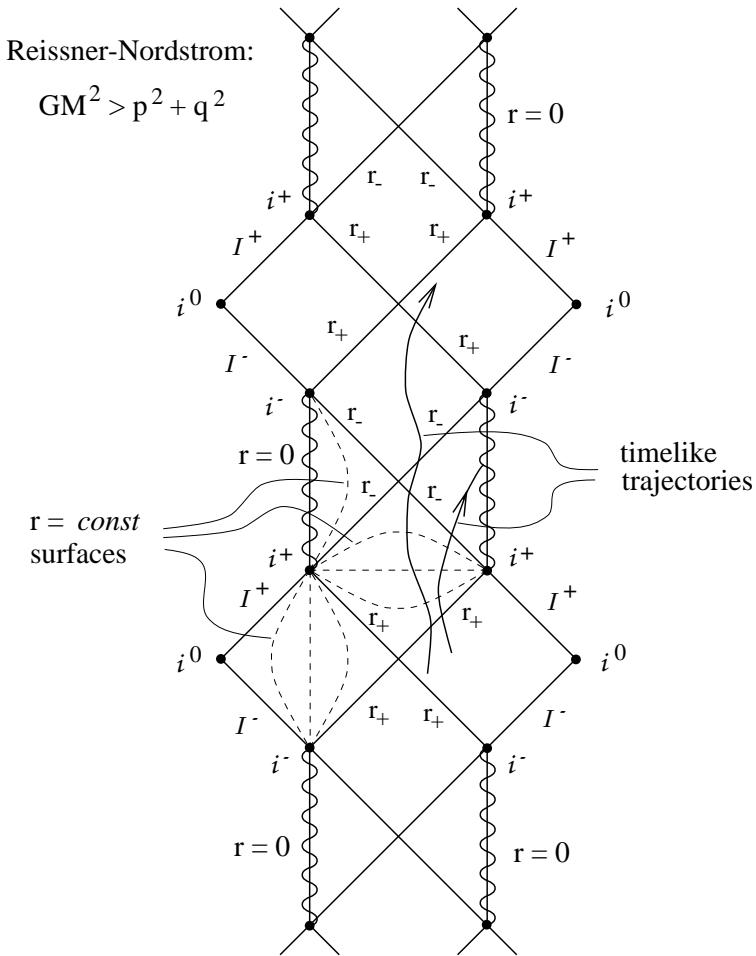


图 9.18: RN解的彭罗斯图。

柯西视界的这种不稳定，意味着上面RN解彭罗斯图的很多部分，包括类时的时空奇性，都是非物理的！一种可能性是，扰动会使得 $r = r_-$ 处的柯西视界变成时空奇性。实际上，柯西视界的不稳定性正是如下强宇宙监督猜测所预言的：

**强宇宙监督猜测：**对于满足适当能量条件的物质，一般的初始条件将不会导致出现柯西视界，与之相关的，类时的时空奇性也不会形成。也就是说，整个时空都可以由柯西面上的初始数据演化决定！这样的时空也称作整体双曲时空。所以强宇宙监督猜测相当于说，物理的时空都是整体双曲的。

注意，强宇宙监督猜测既不弱于但也不强于弱宇宙监督猜测(不要被名

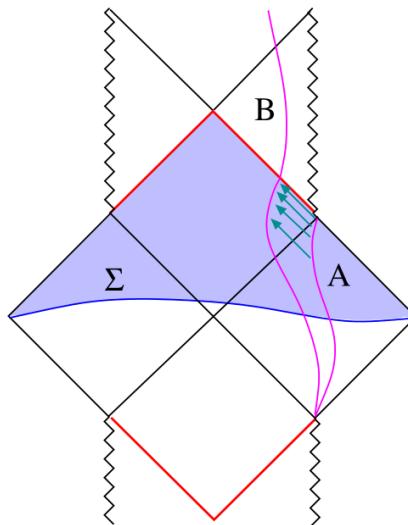


图 9.19: 初始数据定义在空间截片 $\Sigma$ 上, 但是这些数据不能演化超过 $r = r_-$ 位置的柯西视界(图中用红线标示)。当然完整的RN解即有未来柯西视界也有过去柯西视界。

字误导), 两个猜测虽然相关, 但逻辑上是相互独立的。

### 本章参考文献

1. 本章对克鲁斯卡延拓的处理是受知乎@非对称虫洞的专栏文章的启发, 这篇文章叫《从tan函数到彭罗斯图 (Penrose diagram)》, 链接是<https://zhuanlan.zhihu.com/p/188750243>
2. 本章部分内容参考了David Tong的在线讲义, General Relativity. 尤其是本章不少插图是来自于David Tong的这本在线讲义。
3. 关于虫洞打开和关闭的过程讨论来自于Sean Carroll, Spacetime and Geometry.
4. 另外, 也推荐读者阅读L. Susskind理论最小值系列新出的General Relativity。