目录

第四章　广义协变原理与微分同胚不变性

陈童

4.1　广义协变原理

从上一章的知识我们知道，可以用任意的坐标系来描写引力场中的自由粒子，从x坐标系变换到x'坐标系，度规场的变换关系为

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}. \tag{4.1}$$

根据本书第一章可知，引入任意的曲线坐标系，这正是高斯在研究内禀几何时引入的办法，这种办法后来被黎曼推广到了任意维的黎曼几何。等效原理既然告诉我们引力场存在时的时空几何就是黎曼几何，那在广义相对论中引入任意的坐标系就是一件必然的事情。

在物理上，之所以可以引入任意坐标系，原因在于等效原理允许我们引入相对于局部惯性系作任意加速运动的参考系，惯性力就是万有引力。因此在相对论性的引力理论中，一切参考系都是平权的，只不过引力场在不同参考系中的表现不同！在广义相对论的早期文献中，爱因斯坦也称这个结论为广义相对性原理，即将之看成是狭义相对性原理的进一步推广。狭义相对性原理说一切惯性系都平权，而广义相对性原理则进一步说一切参考系都平权！而不同参考系必然使用不同的时空坐标系，一切参考系平权就意味着，在广义相对论中，一切可能的坐标系都是平权的！

这就是所谓的广义协变原理，它告诉我们：广义相对论中的物理方程必须满足广义协变性，即在广义坐标变换$x \to x'$下，方程的形式必须保持不变！

有些书上说，广义协变原理本身没有物理内容，因为任何物理定律都能写成广义协变的形式，即使牛顿定律也可以在任意的坐标系中表达出来。但是，诸如牛顿定律这样的理论写成广义协变形式，其实都只是一种形式上的广义协变，因为在这样的广义协变写法中，度规场和克里斯托夫联络都是纯几何的系数，它们在不同坐标系中的变换关系是一种纯粹数学形式上的变换，的确没有任何物理内容。而广义相对论中的广义协变性却是有物理内容的，因为在广义相对论中，度规场和克里斯托夫联络不再是纯几何系数，它们描写了引力场，因此是有动力学的。要求这样的动力学场在广义坐标变换下协变，其实是对引力场的动力学规律施加了很强的约束！因此广义相对论中的广义协变原理是一条真正的物理原理。

根据高斯内禀几何学的研究，通常来说，任意一个坐标系x都只能覆盖时空的一个局部区域，而无法覆盖时空的整体，就好比球坐标系无法覆盖两维球面的南北极。因此通常又称任意的坐标系为局部坐标系。广义协变原理告诉我们，任何局部坐标系都是平权的。因此在广义相对论中有极大的选择坐标系的自由度，问题是，这些局部坐标是否是物理的呢? 是否有物理含义呢?

对于这个问题，我们的回答是这样的：如果我们把局部坐标系看成是某些局域观察者所采用的坐标系，则只要我们赋予这些局域观察者物理意义，那么其相应的局部坐标系就有一定的物理意义，至少与局部坐标系对应的局部参考系有物理意义。

相反，由于可以进行任意的坐标变换，我们也可以作这样的处理：即不赋予局域观察者物理意义，进而认为任何局部坐标都只是一种数学描述，本身没有任何物理含义，而之所以能进行任意的坐标变换，也纯粹是因为坐标本身完全是对物理规律的描述上的冗余。在量子引力中，人们就是这样处理的！

其实，当我们将广义协变原理与最小作用量原理结合起来的时候，它才真正发挥出最大的威力。根据最小作用量原理，基本的物理方程应该通过要求某个作用量取极值来得出，又由于作用量是一个标量，从而为了使得物理方程广义协变，作用量就应该在广义坐标变换下保持不变。从而，结合最小作用量原理，我们就能把广义协变原理表述成：**在广义相对论中，物理系统的作用量必须在任意的$x \to x'$的坐标变换下保持不变！尤**

其是，引力场本身的作用量必须在任意的$x \to x'$变换下保持不变！

4.2 张量场和微分同胚映射

为了构造满足广义协变原理的物理方程，我们需要让其中涉及的物理量在坐标变换下按照某种简单的规则变换。这样的变换规则就是(4.1)式变换规则的推广，这就需要引入弯曲时空中的张量场概念。

4.2.1 矢量场和张量场

简单来说，弯曲时空中的张量场就是将第二章引入的闵可夫斯基时空中的张量场概念推广到弯曲时空。还是让我们从所谓的$(1,0)$型张量场和$(0,1)$型张量场，也就是所谓的逆变矢量场和协变矢量场开始吧。

首先，在坐标变换$x^\mu \to x'^\mu$之下，我们有如下变换

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad \partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu. \tag{4.2}$$

为书写简单起见，可以引入矩阵$S^\mu{}_\nu$，

$$S^\mu{}_\nu(x) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}, \tag{4.3}$$

特别的，对于闵可夫斯基时空中的洛伦兹变换，我们有$S^\mu{}_\nu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu$，为一个常数矩阵。但是，对于弯曲时空中的一般性坐标变换，矩阵$S^\mu{}_\nu(x)$依赖于x。另外，根据

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\rho} = \delta^\mu_\rho, \tag{4.4}$$

结果为单位矩阵，由此可知

$$(S^{-1})^\mu{}_\nu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}, \tag{4.5}$$

式中S^{-1}表示矩阵S的逆矩阵。利用S和S^{-1}，我们就能将变换关系(4.2)重写为

$$dx'^\mu = S^\mu{}_\nu(x) dx^\nu, \quad \partial'_\mu = (S^{-1})^\nu{}_\mu(x)\partial_\nu. \tag{4.6}$$

而度规场的变换关系(4.1)就能重写成

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\rho\sigma}(x)(S^{-1})^\rho{}_\mu(x)(S^{-1})^\sigma{}_\nu(x). \tag{4.7}$$

将这个方程看作一个矩阵方程，并两边求逆矩阵，就可以得到

$$g'^{\mu\nu}(x') = S^{\mu}{}_{\rho}(x)S^{\nu}{}_{\sigma}(x)g^{\rho\sigma}(x), \tag{4.8}$$

式中$g^{\mu\nu}$为矩阵$g_{\mu\nu}$的逆矩阵。

所谓的$(1,0)$型张量场$A^{\mu}(x)$，或者说逆变矢量场$A^{\mu}(x)$，就是指在坐标变换下和dx^{μ}的变换规则相同的一个场。换言之，$A^{\mu}(x)$在坐标变换下按如下规则变换

$$A'^{\mu}(x') = S^{\mu}{}_{\nu}(x)A^{\nu}(x). \tag{4.9}$$

而所谓的$(0,1)$型张量场$B_{\mu}(x)$，或者说协变矢量场$B_{\mu}(x)$，就是指在坐标变换下与∂_{μ}的变换规则相同的一个场。换言之，$B_{\mu}(x)$在坐标变换下按如下规则变换

$$B'_{\mu}(x') = (S^{-1})^{\nu}{}_{\mu}(x)B_{\nu}(x). \tag{4.10}$$

而$A^{\mu}(x)$与$B_{\mu}(x)$进行指标缩并的结果则是一个标量场，即是说，它的变换规则为

$$A'^{\mu}(x')B'_{\mu}(x') = A^{\mu}(x)B_{\mu}(x). \tag{4.11}$$

更一般的，对于任何标量场$\Phi(x)$，它在坐标变换之下的变换规则均为

$$\Phi'(x') = \Phi(x). \tag{4.12}$$

另外，根据度规场的变换关系(4.7)、(4.8)不难看出，$g_{\mu\nu}(x)A^{\nu}(x)$其实是一个协变矢量场，而$g^{\mu\nu}(x)B_{\nu}(x)$其实是一个逆变矢量场。因此可以引入如下定义

$$A_{\mu}(x) \equiv g_{\mu\nu}(x)A^{\nu}(x), \quad B^{\mu}(x) \equiv g^{\mu\nu}(x)B_{\nu}(x). \tag{4.13}$$

即是说，我们可以利用度规场以及它的逆矩阵来将张量场的指标降下去或者升上来。

更一般地，我们可以引入有k个上指标l个下指标的(k,l)型张量场，记作$T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}(x)$。在坐标变换之下，它的每一个上指标都像$dx^{\mu}$那样变，而每一个下指标都像$\partial_{\mu}$那样变。特别的，度规场$g_{\mu\nu}(x)$就是一个$(0,2)$型张量场，而其逆矩阵场$g^{\mu\nu}(x)$就是一个$(2,0)$型张量场。总之，这里的一切都完

全平行于第二章讲四维闵可夫斯基时空张量时的概念，只是现在用来升降指标的度规张量得是$g_{\mu\nu}$而不是闵可夫斯基时空的$\eta_{\mu\nu}$，另外，张量的每个指标得按照$S^{\mu}{}_{\nu}$或者$(S^{-1})^{\mu}{}_{\nu}$变，而不是按照洛伦兹变换的$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$和$(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu}$变。

特别的，容易验证克龙内克记号δ^{μ}_{ν}是一个$(1,1)$型张量。因为

$$S^{\rho}{}_{\mu}(S^{-1})^{\nu}{}_{\sigma}\delta^{\mu}_{\nu} = S^{\rho}{}_{\mu}(S^{-1})^{\mu}{}_{\sigma} = \delta^{\rho}_{\sigma}. \tag{4.14}$$

很显然，δ^{μ}_{ν}是一个在所有坐标系中分量都相同的张量。

下面举一个初看起来像是张量，但其实不是张量的例子，那就是克里斯托夫联络$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$。它初看起来像是一个$(1,2)$型张量，但是细看其在坐标变换下的变换规则

$$\begin{aligned}\Gamma'^{\rho}_{\mu\nu}(x') &= \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}}\Big(\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\Big)\\ &= S^{\rho}{}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}(S^{-1})^{\alpha}{}_{\mu}(S^{-1})^{\beta}{}_{\nu} + S^{\rho}{}_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}(S^{-1})^{\sigma}{}_{\nu}\\ &= S^{\rho}{}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}(S^{-1})^{\alpha}{}_{\mu}(S^{-1})^{\beta}{}_{\nu} + S^{\rho}{}_{\sigma}(S^{-1})^{\lambda}{}_{\mu}\partial_{\lambda}(S^{-1})^{\sigma}{}_{\nu},\end{aligned} \tag{4.15}$$

不难发现，它比张量的变换规则额外多出了一项，从而不是一个张量！

另外，对$S^{\rho}{}_{\sigma}(S^{-1})^{\sigma}{}_{\nu} = \delta^{\rho}_{\nu}$式求导，可以得到

$$S^{\rho}{}_{\sigma}\partial_{\lambda}(S^{-1})^{\sigma}{}_{\nu} = -(S^{-1})^{\sigma}{}_{\nu}\partial_{\lambda}S^{\rho}{}_{\sigma}. \tag{4.16}$$

将这个结果代入(4.15)式，即可以得到

$$\Gamma'^{\rho}_{\mu\nu}(x') = S^{\rho}{}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}(S^{-1})^{\alpha}{}_{\mu}(S^{-1})^{\beta}{}_{\nu} - (S^{-1})^{\lambda}{}_{\mu}(S^{-1})^{\sigma}{}_{\nu}\partial_{\lambda}S^{\rho}{}_{\sigma}. \tag{4.17}$$

有了张量的概念，我们就很容易构造一大类满足广义协变原理的方程：**任何方程，只要它是两个同样上下指标的张量的等式，则在广义坐标变换下，其形式都将保持不变。**例如，假设$A^{\mu\nu}{}_{\rho}$和$B^{\mu\nu}{}_{\rho}$是两个$(2,1)$型张量，又如果在x^{μ}坐标系里有$A^{\mu\nu}{}_{\rho} = B^{\mu\nu}{}_{\rho}$，那么在$x'^{\mu}$坐标系里，也必定有$A'^{\mu\nu}{}_{\rho} = B'^{\mu\nu}{}_{\rho}$。**特别的，如果在某个坐标系中某张量等于零，那么在所有的坐标系中，这个张量都必定等于零。**

4.2.2　微分同胚映射和李导数

前面我们将$x^{\mu} \to x'^{\mu}$的变换看作是同一个时空点在两组不同坐标下的坐标变换，通常人们称这种看法为**被动的观点**。与之相对应的，所谓的主

动观点则是，将x和x'看成两个不同的时空点，将$x \to x'$的变换看成是时空点x到时空点x'的映射，由于这种映射是一一对映，并且映射本身以及其逆映射均可微，所以也称作微分同胚映射。即是说，**被动观点中的坐标变换，在主动观点中，就是一个局部微分同胚映射**。

无穷小微分同胚映射

特别的，我们可以考察如下无穷小微分同胚映射

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x). \tag{4.18}$$

其中$\epsilon^\mu(x)$是取值为无穷小量的函数。按照微分同胚映射的解释，这个变换将x点映射到了无限靠近的x'点，两点之间相差一个无穷小量ϵ, 所以这是一个无穷小微分同胚映射。很显然，在一阶近似上有

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \partial_\nu \epsilon^\mu, \quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta^\nu_\mu - \partial_\mu \epsilon^\nu. \tag{4.19}$$

下面我们先来看一下度规张量在上述无穷小微分同胚变换下将如何变。很显然

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x') &= g_{\rho\sigma}(x)\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} = g_{\rho\sigma}(x)(\delta^\rho_\mu - \partial_\mu\epsilon^\rho)(\delta^\sigma_\nu - \partial_\nu\epsilon^\sigma) \\ &= g_{\mu\nu}(x) - g_{\rho\nu}\partial_\mu\epsilon^\rho - g_{\mu\sigma}\partial_\nu\epsilon^\sigma = g_{\mu\nu}(x'-\epsilon) - g_{\rho\nu}\partial_\mu\epsilon^\rho - g_{\mu\sigma}\partial_\nu\epsilon^\sigma \\ &= g_{\mu\nu}(x') - \epsilon^\rho\partial_\rho g_{\mu\nu} - g_{\rho\nu}\partial_\mu\epsilon^\rho - g_{\mu\sigma}\partial_\nu\epsilon^\sigma. \end{aligned} \tag{4.20}$$

将上式中的变量x'替换成变量x(式中的$x = x' - \epsilon$则替换成$x - \epsilon$)，从而在一阶无穷小近似上，我们可以将同在x点的两个张量$g'_{\mu\nu}(x)$ 和$g_{\mu\nu}(x)$ 作差，即考察无穷小微分同胚变换前后x点度规场的改变量

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu}(x) &= g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) \\ &= -\big[\epsilon^\rho\partial_\rho g_{\mu\nu}(x) + g_{\rho\nu}\partial_\mu\epsilon^\rho + g_{\mu\rho}\partial_\nu\epsilon^\rho\big]. \end{aligned} \tag{4.21}$$

完全类似的，也可以得到

$$\begin{aligned} \delta g^{\mu\nu}(x) &= g'^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\nu}(x) \\ &= -\big[\epsilon^\rho\partial_\rho g^{\mu\nu}(x) - g^{\rho\nu}\partial_\rho\epsilon^\mu - g^{\mu\rho}\partial_\rho\epsilon^\nu\big]. \end{aligned} \tag{4.22}$$

在广义相对论中，考察度规场在微分同胚变换下的变化当然最为重要，但我们也不能只关心度规场，而是同时也要关心其它一些场(比如标量场和

矢量场)在无穷小微分同胚(4.18)下如何变化。比如对于标量场$\Phi(x)$，由于有

$$\Phi'(x') = \Phi(x) = \Phi(x'-\epsilon) = \Phi(x') - \epsilon^\rho\partial_\rho\Phi, \tag{4.23}$$

所以在一阶无穷小的近似上，很容易得到

$$\delta\Phi(x) = \Phi'(x) - \Phi(x) = -\epsilon^\rho\partial_\rho\Phi. \tag{4.24}$$

再比如对于矢量场$W^\mu(x)$，在无穷小微分同胚(4.18)下，有

$$\begin{aligned} W'^\mu(x') &= W^\rho(x)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} = W^\rho(x)(\delta^\mu_\rho + \partial_\rho\epsilon^\mu) \\ &= W^\mu(x) + W^\rho\partial_\rho\epsilon^\mu = W^\mu(x'-\epsilon) + W^\rho\partial_\rho\epsilon^\mu \\ &= W^\mu(x') - \epsilon^\rho\partial_\rho W^\mu + W^\rho\partial_\rho\epsilon^\mu. \end{aligned} \tag{4.25}$$

从而即有

$$\delta W^\mu(x) = W'^\mu(x) - W^\mu(x) = -\big[\epsilon^\rho\partial_\rho W^\mu - W^\rho\partial_\rho\epsilon^\mu\big]. \tag{4.26}$$

类似的，对于矢量场$U_\mu(x)$，也可以得到

$$\delta U_\mu(x) = U'_\mu(x) - U_\mu(x) = -\big[\epsilon^\rho\partial_\rho U_\mu + U_\rho\partial_\mu\epsilon^\rho\big]. \tag{4.27}$$

完全类似的，对于任意二阶张量场$W^{\mu\nu}(x)$和$U_{\mu\nu}(x)$，我们可以得到

$$\begin{aligned} \delta W^{\mu\nu}(x) &= W'^{\mu\nu}(x) - W^{\mu\nu}(x) = -\big[\epsilon^\rho\partial_\rho W^{\mu\nu} - W^{\rho\nu}\partial_\rho\epsilon^\mu - W^{\mu\rho}\partial_\rho\epsilon^\nu\big] \\ \delta U_{\mu\nu}(x) &= U'_{\mu\nu}(x) - U_{\mu\nu}(x) = -\big[\epsilon^\rho\partial_\rho U_{\mu\nu}(x) + U_{\rho\nu}\partial_\mu\epsilon^\rho + U_{\mu\rho}\partial_\nu\epsilon^\rho\big]. \end{aligned} \tag{4.28}$$

很显然，前面推导的度规场在无穷小微分同胚下的变化规律只是这两个式子的一个应用。再比如，对于二阶张量场$F^\mu{}_\nu(x)$, 可以得到

$$\delta F^\mu{}_\nu(x) = F'^\mu{}_\nu(x) - F^\mu{}_\nu(x) = -\big[\epsilon^\rho\partial_\rho F^\mu{}_\nu - F^\rho{}_\nu\partial_\rho\epsilon^\mu + F^\mu{}_\rho\partial_\nu\epsilon^\rho\big]. \tag{4.29}$$

好了，推导了这么多例子，我想读者应该已经找到规律了，那么当然就能写出下面这个一般性的式子

$$\begin{aligned} &\delta T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}(x) = T'^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}(x) - T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}(x) \\ &= -\Big[\epsilon^\rho\partial_\rho T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} - T^{\rho\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}\partial_\rho\epsilon^{\mu_1} - T^{\mu_1\rho\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}\partial_\rho\epsilon^{\mu_2} - \ldots \\ &\quad + T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\rho\nu_2\ldots\nu_l}\partial_{\nu_1}\epsilon^\rho + T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\rho\ldots\nu_l}\partial_{\nu_2}\epsilon^\rho + \ldots\ldots\Big]. \end{aligned} \tag{4.30}$$

由于按照定义$\delta T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}(x)$ 为同在x点的两个张量之差，所以它也必定为一个张量，这就是**无穷小微分同胚变换的张量性质**。

下面，请读者验证无穷小微分同胚变换的δ运算满足莱布尼兹法则。比方说，$W^\mu U_\mu$缩并的结果是一个标量场，不难验证有

$$\delta(W^\mu U_\mu) = (\delta W^\mu)U_\mu + W^\mu(\delta U_\mu). \tag{4.31}$$

而如果不缩并，那$W^\mu U_\nu$就是一个$(1,1)$型张量场，同样不难验证

$$\delta(W^\mu U_\nu) = (\delta W^\mu)U_\nu + W^\mu(\delta U_\nu). \tag{4.32}$$

类似的，还有比如

$$\delta(W^\mu U^\nu) = (\delta W^\mu)U^\nu + W^\mu(\delta U^\nu). \tag{4.33}$$

这些莱布尼兹法则对于任意阶张量之间的乘法(包括缩并)都成立！

无穷小微分同胚映射与李导数

下面介绍数学家常用的理解无穷小微分同胚变换的方法。给定时空中的一个矢量场$V^\mu(x)$，我们可以把它想象成时空点在“流动”形成的速度场，进而可以通过积分下面方程得到这种时空流体的流线

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = V^\mu(x(\tau)), \tag{4.34}$$

如图(4.1)所示。 进一步，我们可以将这种时空流体的流动过程看成是一种

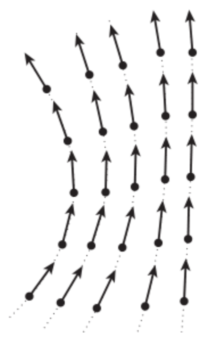

图 4.1: 矢量场形成的流线。

随着参数τ连续进行的微分同胚映射。即是说，经过无穷小“时间”$\delta\tau$之后，x点流到了邻近的x'点，

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta\tau V^{\mu}(x), \tag{4.35}$$

即有无穷小微分同胚

$$\epsilon^{\mu}(x) = \delta\tau V^{\mu}(x). \tag{4.36}$$

因此时空流体的流动就把x点的场$T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}(x)$ ($\cdot\cdot$表示任意的上指标和任意的下指标) 带到了无限邻近的x'点，变成$T'^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}(x')$ (称作将x点的场推前到x'点) 然后就可以和x'点原本的场$T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}(x')$进行比较，也就是可以计算$T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}(x') - T'^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}(x') = -\delta T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}(x')$。这就是数学上所谓李导数的本质，沿着向量场$V^{\mu}$的李导数记为$\mathcal{L}_V$，其具体定义为

$$\mathcal{L}_V T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}(x) = \frac{T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}(x') - T'^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}(x')}{\delta\tau} = -\frac{\delta T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}}{\delta\tau}. \tag{4.37}$$

或者写作

$$\delta T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}(x) = -\delta\tau \mathcal{L}_V T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}(x). \tag{4.38}$$

注意到$\epsilon^{\mu} = \delta\tau V^{\mu}$，因此如果不强调沿着某个特定的矢量场$V^{\mu}$作李导数的话，我们也可以将这个式子写成

$$\delta T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}(x) = -\mathcal{L}_{\epsilon} T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}(x). \tag{4.39}$$

很显然，由于无穷小微分同胚变换的张量性质，所以任何张量场求李导数的结果必定依然是一个张量场，即$\mathcal{L}_V T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}(x)$依然为张量场。

由李导数的这个定义，加上前面关于无穷小微分同胚变换的推导，很容易得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V W^{\mu} &= V^{\rho}\partial_{\rho} W^{\mu} - W^{\rho}\partial_{\rho} V^{\mu}, \\ \mathcal{L}_V U_{\mu} &= V^{\rho}\partial_{\rho} U_{\mu} + U_{\rho}\partial_{\mu} V^{\rho}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

以及比方说对于二阶张量场，有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V W^{\mu\nu}(x) &= V^{\rho}\partial_{\rho} W^{\mu\nu} - W^{\rho\nu}\partial_{\rho} V^{\mu} - W^{\mu\rho}\partial_{\rho} V^{\nu} \\ \mathcal{L}_V U_{\mu\nu}(x) &= V^{\rho}\partial_{\rho} U_{\mu\nu}(x) + U_{\rho\nu}\partial_{\mu} V^{\rho} + U_{\mu\rho}\partial_{\nu} V^{\rho}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

诸如此类等等，总之，前面的所有结果都可以平行地移过来。特别的，李导数满足莱布尼兹法则！

特别的，我们有

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l}(x) = V^\rho\partial_\rho T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l}\\ &-T^{\rho\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l}\partial_\rho V^{\mu_1} - T^{\mu_1\rho\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l}\partial_\rho V^{\mu_2} - \dots\\ &+T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\rho\nu_2\dots\nu_l}\partial_{\nu_1} V^\rho + T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\rho\dots\nu_l}\partial_{\nu_2} V^\rho + \dots\dots\end{aligned} \tag{4.42}$$

由此容易验证

$$\mathcal{L}_{aV+bW}T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot} = a\mathcal{L}_V T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot} + b\mathcal{L}_W T^{\cdot\cdot}{}_{\cdot\cdot}, \tag{4.43}$$

式中V, W为两个矢量场，a, b为两个任意的实常数。

4.3　协变微分

前面引入了张量场的概念，为了满足广义协变原理，我们希望物理方程中的各量都是张量。另一方面，一个物理方程中免不了出现物理量对时空坐标的导数，物理量是张量，然而正如我们将要看到的，一个张量场对时空坐标求导的结果就不再是一个张量场了，因为简单求导的结果是不协变的，因此这就破坏了广义协变原理。为了使广义协变原理始终成立，这一节我们将对时空导数的概念进行修改，引入称之为协变导数的概念。**协变导数依然可以看成是一种导数，它关于被求导量也是线性，并且同样满足求导的莱布尼兹法则。** 引入协变导数的好处就在于，一个张量场的协变导数结果依然是一个张量场，即满足协变性。

为了看清楚张量场对时空坐标的简单导数不满足协变性，我们考察一个$(1,0)$型张量场$W^\mu(x)$，在坐标变换下，它的变换关系为

$$W'^\mu(x') = S^\mu{}_\nu(x)W^\nu(x). \tag{4.44}$$

在坐标变换下$W^\mu(x)$的导数$\partial_\lambda W^\mu(x)$应该变换为$\partial'_\lambda W'^\mu(x')$, 但是

$$\begin{aligned}\partial'_\lambda W'^\mu(x') &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\big(S^\mu{}_\nu(x)W^\nu(x)\big)\\ &= (S^{-1})^\rho{}_\lambda S^\mu{}_\nu\partial_\rho W^\nu + \big((S^{-1})^\rho{}_\lambda\partial_\rho S^\mu{}_\nu\big)W^\nu.\end{aligned} \tag{4.45}$$

显然，这不满足张量在坐标变换下的协变规则，它多出了第二行的第二项。

为了消去坐标变换下多出来的这一项，我们在$\partial_\lambda W^\mu(x)$上添加上一个和$W^\nu$成线性的项$\widetilde{\Gamma}^\mu_{\lambda\nu}W^\nu$($\widetilde{\Gamma}^\mu_{\lambda\nu}$为线性系数)，记结果为$D_\lambda W^\mu$，称为$W^\mu$的协变导数，

$$D_\lambda W^\mu = \partial_\lambda W^\mu + \widetilde{\Gamma}^\mu_{\lambda\nu}W^\nu. \tag{4.46}$$

我们要求$D_\lambda W^\mu$满足张量的协变性，即在坐标变换下按下式变换

$$\begin{aligned} D'_\lambda W'^\mu &= (S^{-1})^\rho{}_\lambda S^\mu{}_\nu D_\rho W^\nu \\ &= (S^{-1})^\rho{}_\lambda S^\mu{}_\nu \partial_\rho W^\nu + (S^{-1})^\rho{}_\lambda S^\mu{}_\nu \widetilde{\Gamma}^\nu_{\rho\sigma} W^\sigma. \end{aligned} \tag{4.47}$$

由于

$$\begin{aligned} D'_\lambda W'^\mu &= \partial'_\lambda W'^\mu + \widetilde{\Gamma}'^\mu_{\lambda\nu} W'^\nu \\ &= (S^{-1})^\rho{}_\lambda S^\mu{}_\nu \partial_\rho W^\nu + \big((S^{-1})^\rho{}_\lambda \partial_\rho S^\mu{}_\nu\big) W^\nu + \widetilde{\Gamma}'^\mu_{\lambda\nu} S^\nu{}_\sigma W^\sigma. \end{aligned} \tag{4.48}$$

因此，为了满足(4.47)式，必有

$$(S^{-1})^\rho{}_\lambda S^\mu{}_\nu \widetilde{\Gamma}^\nu_{\rho\sigma} = (S^{-1})^\rho{}_\lambda \partial_\rho S^\mu{}_\sigma + \widetilde{\Gamma}'^\mu_{\lambda\nu} S^\nu{}_\sigma \tag{4.49}$$

由此易得

$$\widetilde{\Gamma}'^\mu_{\lambda\kappa} = (S^{-1})^\rho{}_\lambda (S^{-1})^\sigma{}_\kappa S^\mu{}_\nu \widetilde{\Gamma}^\nu_{\rho\sigma} - (S^{-1})^\rho{}_\lambda (S^{-1})^\sigma{}_\kappa \partial_\rho S^\mu{}_\sigma. \tag{4.50}$$

人们称满足上式变换关系的线性系数$\widetilde{\Gamma}^\mu_{\lambda\kappa}$为仿射联络。不难发现，上式的变换关系与克里斯托夫联络的变换关系(4.17)完全相同。所以，仿射联络$\widetilde{\Gamma}^\mu_{\lambda\kappa}$是存在的，因为它至少可以取作克里斯托夫联络$\Gamma^\mu_{\lambda\kappa}$。实际上，满足变换关系(4.50)的仿射联络不仅仅存在，而且通常不唯一。仿射联络本身不是张量，因为在坐标变换下它的变换关系中额外多出了一项。但是，不难证明，**两个不同仿射联络的差却是一个$(1,2)$型张量**，因为在坐标变换下两者变换关系中额外多出的项相互抵消了！

注意，克里斯托夫联络关于两个下指标是对称的，但是更一般的仿射联络可没有这个性质。

下面我们把协变导数推广到更一般的张量场。在这里关键是要利用协变导数满足莱布尼兹法则的性质。另外，我们还要注意到，对于一个标量场的协变导数就等于普通导数(因为标量场的普通导数本身已经是协变的了)，即

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi, \tag{4.51}$$

其中Φ为标量场。

比方说，为了得到一个下指标矢量场U_μ的协变导数，我们只要注意到$U_\mu W^\mu$是一个标量场，从而

$$D_\rho\big(U_\mu W^\mu\big)=\partial_\rho\big(U_\mu W^\mu\big). \tag{4.52}$$

另一方面，利用协变导数的莱布尼兹法则，有$D_\rho\big(U_\mu W^\mu\big)=\big(D_\rho U_\mu\big)W^\mu+U_\mu\big(D_\rho W^\mu\big)$。由此不难验证，仅当$D_\rho U_\mu$取如下形式时，(4.52)式才能得以满足，

$$D_\rho U_\mu=\partial_\rho U_\mu-\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\rho\mu}U_\sigma. \tag{4.53}$$

注意，与(4.46)式不同，这里等式右边的第二项是一个减号。

为了得到更一般的张量，比方说$T^{\mu\nu}_\rho$的协变导数，我们只需注意到$T^{\mu\nu}_\rho W^\rho U_\mu V_\nu$是一个标量场，从而不难验证为了满足

$$D_\lambda\big(T^{\mu\nu}_\rho W^\rho U_\mu V_\nu\big)=\partial_\lambda\big(T^{\mu\nu}_\rho W^\rho U_\mu V_\nu\big), \tag{4.54}$$

而且同时满足协变导数的莱布尼兹法则，人们就必须取

$$D_\lambda T^{\mu\nu}_\rho=\partial_\lambda T^{\mu\nu}_\rho+\widetilde{\Gamma}^\mu_{\lambda\sigma}T^{\sigma\nu}_\rho+\widetilde{\Gamma}^\nu_{\lambda\sigma}T^{\mu\sigma}_\rho-\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\lambda\rho}T^{\mu\nu}_\sigma. \tag{4.55}$$

按照类似的办法，人们不难得到任意一个张量场的协变导数公式。

联络和协变导数也是规范场论中的基本概念，不过那里的联络和协变导数通常都是作用在取值于内部空间的向量场上，而广义相对论中的则是作用在取时空指标的张量场上。用数学家的话来说即是，规范场论的联络和协变导数通常定义在一般的向量丛上，而广义相对论中的联络和协变导数则是定义在切丛、余切丛以及它们的各种张量积上。

下面我们讨论沿着时空中一条曲线$x^\mu(\tau)$的协变微分。假设时空中有矢量场$A^\mu(x)$，我们将它限制在曲线$x^\mu(\tau)$上，得到沿着曲线定义的矢量$A^\mu(\tau)$，我们定义矢量$A^\mu(\tau)$沿着曲线的协变微分$\frac{DA^\mu}{D\tau}$为

$$\begin{aligned}\frac{DA^\mu}{D\tau}&=\frac{dx^\nu}{d\tau}D_\nu A^\mu=\frac{dx^\nu}{d\tau}\big(\partial_\nu A^\mu+\widetilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho}A^\rho\big)\\&=\frac{dA^\mu}{d\tau}+\widetilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}A^\rho.\end{aligned} \tag{4.56}$$

显然，最后的结果并不需要A^μ在整个时空上有定义，只需要它沿着曲线$x^\mu(\tau)$有定义就行。因此，对于任意沿着曲线$x^\mu(\tau)$有定义的矢量$A^\mu(\tau)$，

我们可以直接定义它沿着曲线的协变微分为

$$\frac{DA^{\mu}}{D\tau} \equiv \frac{dA^{\mu}}{d\tau} + \widetilde{\Gamma}^{\mu}_{\nu\rho}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}A^{\rho}. \tag{4.57}$$

从引入这个定义的过程不难看出，$\frac{DA^{\mu}}{D\tau}$依然是一个矢量，也即是说在坐标变换下，它像一个矢量那样变换，

$$\frac{DA'^{\mu}}{D\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{DA^{\nu}}{D\tau}. \tag{4.58}$$

类似的，可以将协变矢量$B_{\mu}(\tau)$沿着曲线$x^{\mu}(\tau)$的协变微分定义成

$$\frac{DB_{\mu}}{D\tau} \equiv \frac{dB_{\mu}}{d\tau} - \widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\nu\mu}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}B_{\rho}. \tag{4.59}$$

当然，$\frac{DB_{\mu}}{D\tau}$依然是一个协变矢量。同样的，也可以定义任意张量T沿着曲线$x^{\mu}(\tau)$的协变微分，比如对于$(1,1)$张量$T^{\mu}{}_{\nu}(\tau)$，可以定义

$$\frac{DT^{\mu}{}_{\nu}}{D\tau} \equiv \frac{dT^{\mu}{}_{\nu}}{d\tau} + \widetilde{\Gamma}^{\mu}_{\rho\lambda}\frac{dx^{\rho}}{d\tau}T^{\lambda}{}_{\nu} - \widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\nu}\frac{dx^{\rho}}{d\tau}T^{\mu}{}_{\lambda}. \tag{4.60}$$

当然，$\frac{DT^{\mu}{}_{\nu}}{D\tau}$依然是一个$(1,1)$张量。

特别的，

$$\frac{DA^{\mu}}{D\tau} = 0, \tag{4.61}$$

是一个协变方程，因此它只要在一个坐标系中成立，则在任意坐标系中均成立。通常称满足上述方程的$A^{\mu}(\tau)$为矢量A^{μ} 沿着曲线$x^{\mu}(\tau)$的**平行移动**。上述方程也就称作矢量A^{μ}沿着曲线的平行移动方程，很显然，只要$A^{\mu}(\tau)$在某个初始$\tau = 0$的值给定，则通过求解平行移动方程，$A^{\mu}(\tau)$沿着整根曲线$x^{\mu}(\tau)$的值就都给定了。完全类似的，任何张量都可以用平行移动在一条曲线上定义，只要这个张量沿着该曲线的协变微分等于零。

4.4　等效原理和微分同胚不变性

前面说过，广义坐标变换在主动观点中可以看成是局部微分同胚映射。因此根据这个主动的观点，我们也可以把**结合最小作用量原理的广义协变原理表述成：在广义相对论中，物理系统的作用量必须在任意$x \to x'$的微分同胚映射下保持不变，称之为微分同胚不变性。尤其是，引力场本身的作用量必须具有微分同胚不变性。**

4.4.1 最小耦合原理

为了满足微分同胚不变性，物理系统的作用量就只能由各种张量场以及它们的协变导数来构造。换言之，物理系统的拉格朗日密度$\mathcal{L}$必然是由各种张量场以及它们的协变导数所构造出来的一个标量函数。这些张量场中既包括与引力耦合的物质场，当然也包括刻画引力场的度规场$g_{\mu\nu}(x)$。除了度规场以外，协变导数本身还额外引入了一个场，即仿射联络场$\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$，当然这个场本身并不是张量场。平直的闵可夫斯基时空当然不需要仿射联络场，所以看起来似乎是，仿射联络场$\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$和度规场一样都是刻画引力场的。

但是，如果在微分同胚不变性的基础上进一步应用等效原理，就可以得出，**广义相对论中的仿射联络必须取克里斯托夫联络，即必有**$\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}=\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$。换言之，广义相对论中的仿射联络完全由度规场决定，从而刻画引力的唯一只有度规场。

具体的推理过程如下：首先，根据等效原理，在局部惯性系中，引力场被惯性力抵消了，从而在局部惯性系中，必有仿射联络等于零，即$\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}=0$。换言之，在局部惯性系中，协变导数$D_\mu$就退化成通常的导数$\partial_\mu$。另一方面，在局部惯性系中，$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$，根据克里斯托夫联络的表达式易知，这时也必有克里斯托夫联络等于零，即$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}=0$。从而可知，在局部惯性系中$T^{\rho}_{\mu\nu}=\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}-\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}=0$。但是，前面说过，两个不同联络的差是一个张量，从而$T^{\rho}_{\mu\nu}$是一个张量。而一个张量在某个坐标系中等于零，则在任何坐标系中都等于零，从而可知$T^{\rho}_{\mu\nu}$恒等于零。也即是说，在任意坐标系中，恒有$\widetilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}=\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$。

因此，在广义相对论中的平行移动方程是

$$\frac{DA^\mu}{D\tau}=\frac{dA^\mu}{d\tau}+\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}A^\rho=0. \tag{4.62}$$

另一方面，当把参数τ取作固有时我们就可以定义四维速度u^μ

$$u^\mu=\frac{dx^\mu}{d\tau}, \tag{4.63}$$

根据固有时间的方程$-d\tau^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, 我们有

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=-1\Rightarrow u^\mu u_\mu=-1. \tag{4.64}$$

进而当曲线参数τ是固有时时，我们就可以把平行移动方程重写为

$$\frac{DA^\mu}{D\tau}=\frac{dA^\mu}{d\tau}+\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}u^\nu A^\rho=0. \tag{4.65}$$

特别的，四维速度本身的平行移动方程是，

$$\frac{Du^\mu}{D\tau} = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} u^\nu u^\rho = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{Du^\mu}{D\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0. \tag{4.66}$$

结果正是引力场中自由下落粒子的测地线方程。所以，测地线方程其实就是粒子四维速度的平行移动方程。

从本书第三章的相关结论我们知道，克里斯托夫联络满足如下等式

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - g_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu} - g_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\mu} = 0. \tag{4.67}$$

在广义相对论中，结合协变导数的定义可知，上式可以重写成

$$D_\rho g_{\mu\nu} = 0. \tag{4.68}$$

通常称这个结果为协变导数与度规场的相容性条件。不是任何协变导数都满足这个相容性条件，但是广义相对论中的协变导数自动满足这个相容性条件。实际上，根据第三章的相关讨论也不难知道，相容性条件再加上联络是对称联络的要求，反过来也唯一决定了广义相对论中的联络为克里斯托夫联络。

另一种得到协变导数与度规场相容性条件的方法是，先取局部惯性系，注意在局部惯性系的原点，联络为零，从而即有$D_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho \eta_{\mu\nu} = 0$。但是$D_\rho g_{\mu\nu}$是协变的，它在局部惯性系中为零，则在任何坐标系中都恒为零，从而即有相容性条件。完全类似于这个推理，我们也不难得到

$$D_\rho g^{\mu\nu} = 0, \quad D_\rho \delta^\mu_\nu = 0. \tag{4.69}$$

等效原理加上广义协变原理就基本上决定了物质场(即除引力场之外其他一切产生引力的物质的场)与引力场的相互作用形式，或者说决定了物质场与引力场耦合的形式。为了看清楚这一点，我们首先可以选取一个局部惯性系，由于在局部惯性系的原点引力场完全被抵消了，因此可知，物质场的拉格朗日密度在这一点上必定与平直的闵可夫斯基时空中的形式完全相同，特别的，这时候拉格朗日密度中物质场对时空的导数必定就是普通的偏导∂_μ。然后，我们从局部惯性系坐标变换到任意坐标系，根据广义协变性，这时候物质场作用量中的时空度规$\eta_{\mu\nu}$就应该替换成更一般的$g_{\mu\nu}$, 同样，为了满足广义协变性，物质场作用量中的偏导∂_μ 就应该替换成协变导

数D_μ。另一方面，上文我们已经看到，广义相对论中的协变导数取决于克里斯托夫联络，而它完全由度规场$g_{\mu\nu}$决定，因此这种替换手续就决定了物质场与描写引力的度规场$g_{\mu\nu}$的耦合形式。人们通常称这种由平直的闵可夫斯基时空过渡到弯曲时空的替换手续为物质场与引力场的**最小耦合原理**。很显然，最小耦合原理基本上可以看作是等效原理和广义协变原理的一个推论。

4.4.2　微分同胚不变性与能量动量张量

无穷小微分同胚再研究

前面已经看到，在无穷小局域微分同胚$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$之下，张量场$T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}(x)$的改变量为

$$\begin{aligned}&\delta T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}(x)\\ =&-\Big[\epsilon^\rho\partial_\rho T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} - T^{\rho\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}\partial_\rho\epsilon^{\mu_1} - T^{\mu_1\rho\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}\partial_\rho\epsilon^{\mu_2} - \ldots\\ &+ T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\rho\nu_2\ldots\nu_l}\partial_{\nu_1}\epsilon^\rho + T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\rho\ldots\nu_l}\partial_{\nu_2}\epsilon^\rho + \ldots..\Big].\end{aligned} \tag{4.70}$$

但是由于广义相对论中的联络为克里斯托夫联络，而克里斯托夫联络是一个对称联络，满足$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$，由此不难直接证明，可以将上面$\delta T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}(x)$ 中的普通导数通通改成协变导数，即有

$$\begin{aligned}&\delta T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}(x)\\ =&-\Big[\epsilon^\rho D_\rho T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} - T^{\rho\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}D_\rho\epsilon^{\mu_1} - T^{\mu_1\rho\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}D_\rho\epsilon^{\mu_2} - \ldots\\ &+ T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\rho\nu_2\ldots\nu_l}D_{\nu_1}\epsilon^\rho + T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\rho\ldots\nu_l}D_{\nu_2}\epsilon^\rho + \ldots..\Big].\end{aligned} \tag{4.71}$$

同样的，对于李导数，我们也有

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}(x) = V^\rho D_\rho T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}\\ &-T^{\rho\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}D_\rho V^{\mu_1} - T^{\mu_1\rho\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}D_\rho V^{\mu_2} - \ldots\\ &+T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\rho\nu_2\ldots\nu_l}D_{\nu_1}V^\rho + T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\rho\ldots\nu_l}D_{\nu_2}V^\rho + \ldots\ldots\end{aligned} \tag{4.72}$$

特别的，我们可以将度规场在无穷小微分同胚下的改变量$\delta g_{\mu\nu}$重写成

$$\delta g_{\mu\nu} = -[\epsilon^\rho D_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu}D_\mu\epsilon^\rho + g_{\mu\rho}D_\nu\epsilon^\rho]. \tag{4.73}$$

进一步利用度规场与协变导数的相容性条件，即有

$$\delta g_{\mu\nu} = -[D_\mu\epsilon_\nu + D_\nu\epsilon_\mu]. \tag{4.74}$$

完全类似的，也有

$$\delta g^{\mu\nu} = D^\mu \epsilon^\nu + D^\nu \epsilon^\mu. \tag{4.75}$$

同样，我们也可以将度规场的李导数重写成

$$\mathcal{L}_\epsilon g_{\mu\nu} = D_\mu \epsilon_\nu + D_\nu \epsilon_\mu. \tag{4.76}$$

能量动量张量

下面我们来考察最小耦合原理和微分同胚不变性的一个重要推论。为此，我们先回顾一下本书第二章讲述诺特定理和能量-动量张量时的一个结论。在第二章中，我们说过，在平直的闵可夫斯基时空中，在如下无穷小局域时空变换下，

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x), \tag{4.77}$$

任何物质系统作用量S_m的改变量必定可以写成

$$\delta S_m = \int dv T^{\mu\nu}(\eta)\partial_\mu \epsilon_\nu(x) = \frac{1}{2}\int dv T^{\mu\nu}(\eta)\big(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu\big). \tag{4.78}$$

其中$T^{\mu\nu}(\eta)$是一个对称张量，称之为能量-动量张量, η表示闵可夫斯基时空的度规张量$\eta_{\mu\nu}$, $T^{\mu\nu}(\eta)$的完整含义是定义在闵可夫斯基时空的能量动量张量，这是我们在第二章中引入的。式中dv为四维时空体积元，对于闵可夫斯基时空$dv = d^4x$。因此，根据最小耦合原理的替换规则，可以得到：在任意弯曲时空中，在无穷小局域微分同胚$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$之下，如果**不考虑**度规场$g_{\mu\nu}$在微分同胚下的改变，而仅仅只考虑物质场的微分同胚变换，则任何物质系统作用量S_m的改变量必定可以写成

$$\delta S_m = \frac{1}{2}\int dv T^{\mu\nu}(g)\big(D_\mu \epsilon_\nu + D_\nu \epsilon_\mu\big), \tag{4.79}$$

其中$T^{\mu\nu}(g)$是$T^{\mu\nu}(\eta)$经过最小耦合原理的替换规则后得到的弯曲时空能量动量张量。式中dv表示弯曲时空的四维体积元，它和平直时空的体积元d^4x有所差别，dv的具体形式我们稍后给出。当然，平直时空中的能动量守恒方程，现在就应该替换成

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow D_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{4.80}$$

另一方面，由于和引力场耦合，所以弯曲时空中的物质场作用量S_m当然与度规场$g_{\mu\nu}$有关，不妨将物质场作用量对$g_{\mu\nu}$的变分记为如下形式

$$\delta S_m = \frac{1}{2}\int dv \Theta^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \tag{4.81}$$

式中$\Theta^{\mu\nu}$为某个对称的二阶张量。下面我们将会证明，$\Theta^{\mu\nu}$其实就等于物质场的能量动量张量$T^{\mu\nu}$，即

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \tag{4.82}$$

为了证明这一点，我们需要用到物质场作用量的微分同胚不变性。为此，考察无穷小微分同胚$x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu(x)$, 由于在此微分同胚下**物质场和度规场都要发生改变**，从而物质场作用量的改变量必为

$$\begin{aligned}\delta S_m &= \frac{1}{2}\int dv \Theta^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\int dv T^{\mu\nu}\big(D_\mu\epsilon_\nu + D_\nu\epsilon_\mu\big)\\ &= \frac{1}{2}\int dv\big[(-\Theta^{\mu\nu} + T^{\mu\nu})\big(D_\mu\epsilon_\nu + D_\nu\epsilon_\mu\big)\big],\end{aligned} \tag{4.83}$$

式中我们已经代入了(4.74)式的结果。进一步根据物质场作用量的微分同胚不变性，必有$\delta S_m = 0$，从而必有

$$\delta S_m = 0 \Rightarrow \Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}. \tag{4.84}$$

综上，我们即得到物质场能量动量张量的一个等价定义，即：物质场能动量张量等于弯曲时空中物质场作用量对度规张量$g_{\mu\nu}$的泛函导数，即

$$\delta S_m = \frac{1}{2}\int dv T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \tag{4.85}$$

值得强调的是，物质场作用量的微分同胚不变性并不要求场位形满足场的运动微分方程(场方程)，但是，能动量张量的守恒方程$D_\mu T^{\mu\nu} = 0$要求其中的物质场满足场方程。当一个场位形满足场方程时，人们也称之为在壳的(On Shell), 而对于不满足场方程的场位形，人们就称之为离壳的(Off Shell)。微分同胚不变性并不要求物质场在壳，但是能动量守恒要求物质场在壳。

物质场的微分同胚不变性即使场离壳也成立！但是，**当物质场在壳时，微分同胚不变性本身就能推论出能动量张量的守恒方程**。为了看清楚这一点，我们不妨将物质场抽象地记作Φ，将它在无穷小微分同胚下的

改变量记作$\delta\Phi$。在无穷小微分同胚之下，由于物质场和度规场都要变换，所以物质场作用量的改变量为

$$\begin{aligned}\delta S_m &= \frac{1}{2}\int dv T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \int d^4x \frac{\delta S_m}{\delta\Phi}\delta\Phi(x)\\ &= -\frac{1}{2}\int dv T^{\mu\nu}\big(D_\mu\epsilon_\nu + D_\nu\epsilon_\mu\big) + \int d^4x\frac{\delta S_m}{\delta\Phi}\delta\Phi(x).\end{aligned} \tag{4.86}$$

下面假设物质场在壳，从而根据最小作用量原理，必有场方程

$$\frac{\delta S_m}{\delta\Phi} = 0. \tag{4.87}$$

因此，这时候物质场作用量在无穷小微分同胚之下的改变量就等于

$$\delta S_m = -\frac{1}{2}\int dv T^{\mu\nu}\big(D_\mu\epsilon_\nu + D_\nu\epsilon_\mu\big) = -\int dv T^{\mu\nu} D_\mu\epsilon_\nu. \tag{4.88}$$

利用$D_\mu\big(T^{\mu\nu}\epsilon_\nu\big) = (D_\mu T^{\mu\nu})\epsilon_\nu + T^{\mu\nu}D_\mu\epsilon_\nu$进行分部积分，再利用高斯定理$\int dv D_\mu A^\mu = \int_\infty dS_\mu A^\mu$, 并假设在无穷远边界上$\epsilon_\nu = 0$, 从而即有

$$\delta S_m = \int dv (D_\mu T^{\mu\nu})\epsilon_\nu. \tag{4.89}$$

当然，物质场在壳时，作用量同样会有微分同胚不变性，也即$\delta S_m = 0$, 由此就可以得出

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{4.90}$$

正是能动量张量守恒方程。

四维时空体积元

下面我们给出四维时空体积元dv的具体形式。首先，我们注意到四维体积元一定是不依赖于特定坐标系的，即是说dv的表达式得在广义坐标变换之下保持不变。

其次，根据多元微积分知识可以知道，在广义坐标变换$x^\mu \to x'^\mu$之下，

$$d^4x' = |\frac{\partial x'}{\partial x}| d^4x, \tag{4.91}$$

式中$|\frac{\partial x'}{\partial x}|$为坐标变换的雅可比行列式，即$|\frac{\partial x'}{\partial x}|$为$4\times 4$矩阵$S^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$的行列式。即是说，$d^4x$在广义坐标变换之下并不能保持不变，从而它并不能作为

四维弯曲时空的体积元。当然，如果我们考察的是平直的闵可夫斯基时空，那由于洛伦兹变换的行列式等于1，所以这时候d^4x就是洛伦兹不变的，从而就可以作为平直时空的体积元。

为了找到一个广义坐标变换不变的四维体积元，我们注意到度规场在广义坐标变换之下按照下式变换，

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}g_{\rho\sigma}. \tag{4.92}$$

从而不难看到，4×4度规矩阵的行列式$g = \det(g_{\mu\nu})$在坐标变换之下将按如下规则变换

$$g'(x') = |\frac{\partial x'}{\partial x}|^{-2}g(x). \tag{4.93}$$

再注意到度规矩阵$g_{\mu\nu}$为闵氏符号的，即它有三个正本征值，一个负本征值，从而不难知道行列式g必为负数。进而根据(4.91)式和(4.93)式不难看出，$\sqrt{-g}d^4x$是广义坐标变换不变的，即有

$$\sqrt{-g'}d^4x' = \sqrt{-g}d^4x. \tag{4.94}$$

从而四维弯曲时空的体积元就可以定义为$\sqrt{-g}d^4x$, 即

$$dv = \sqrt{-g}d^4x. \tag{4.95}$$

特别的，对于闵可夫斯基时空，则有$g = -1$，从而即有$dv = d^4x$，正好和通常的体积元定义一致。

能动量张量举例

下面列举几个物质系统的能动量张量。

例1，引力场中的多粒子体系

第一个例子是引力场中的多粒子体系。这个物质系统的作用量为

$$S_m = -\sum_n m_n\int d\tau_n = -\sum_n m_n\int d\tau_n\sqrt{-g_{\mu\nu}(x_n)\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}}. \tag{4.96}$$

式中x_n^μ为粒子n的时空坐标，τ_n为它的固有时。

不难计算S_m对度规张量的变分，为

$$\begin{aligned}\delta S_m &= -\sum_n m_n \int d\tau_n \delta\sqrt{-g_{\mu\nu}(x_n)\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}} \\ &= \sum_n m_n \int d\tau_n \frac{1}{2}\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}\delta g_{\mu\nu}(x_n) \\ &= \frac{1}{2}\int\sqrt{-g}d^4x\Big[\frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_n m_n\int d\tau_n\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}\delta^4\big(x-x_n(\tau_n)\big)\Big]\delta g_{\mu\nu}(x).\end{aligned}$$

式中第二行我们利用了$\sqrt{-g_{\mu\nu}(x_n)\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}}=1$。将上面的结果与能动量张量的定义式(4.85)进行比较，不难得到

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_n m_n\int d\tau_n\frac{dx_n^\mu}{d\tau_n}\frac{dx_n^\nu}{d\tau_n}\delta^4\big(x-x_n(\tau_n)\big). \tag{4.97}$$

与第二章中的相关结果比较不难发现，这正是弯曲时空中多粒子体系的能动量张量。

例2，弯曲时空中的标量场

我们要考察的第二个例子是弯曲时空中的标量场。作为场论系统，这个物质系统的作用量必定可以写成如下形式

$$S_m = \int dv\mathcal{L} = \int\sqrt{-g}d^4x\mathcal{L}, \tag{4.98}$$

式中$\mathcal{L}$表示拉格朗日密度。对于弯曲时空中的标量场ϕ，根据最小耦合原理，我们可以将相应的拉格朗日密度取成

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \mathcal{U}(\phi). \tag{4.99}$$

为了计算物质场作用量对度规张量的变分，我们需要用到如下引理。

引理： 对于任何矩阵M, 总有

$$\mathrm{Tr}\big(M^{-1}\delta M\big) = \delta\ln\det M. \tag{4.100}$$

式中$\det M$表示矩阵M的行列式，Tr代表矩阵求迹，即对角元之和。

上面引理的证明非常直接了当，

$$\begin{aligned}\delta\ln\det M &= \ln\det(M+\delta M) - \ln\det M \\ &= \ln\frac{\det(M+\delta M)}{\det M} = \ln\det\big(M^{-1}(M+\delta M)\big) \\ &= \ln\det(1+M^{-1}\delta M) \\ &= \ln\big(1+\mathrm{Tr}(M^{-1}\delta M)\big) = \mathrm{Tr}\big(M^{-1}\delta M\big).\end{aligned} \tag{4.101}$$

后面两行的等号都是表示在忽略高阶无穷小的意义上相等。

取引理中的矩阵M为度规矩阵$g_{\mu\nu}$，则根据引理不难得到

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \tag{4.102}$$

另外，将矩阵方程$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^{\mu}_{\rho}$两边微分，不难得到$(\delta g^{\mu\nu}) g_{\nu\rho} + g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\rho} = 0$，由此即得

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} \delta g_{\rho\sigma} g^{\sigma\nu}. \tag{4.103}$$

当然，这实际上就是如下矩阵方程的一个简单例子

$$\delta M^{-1} = -M^{-1} (\delta M) M^{-1}, \tag{4.104}$$

式中M表示任何可逆矩阵。

利用上一段的两个结果，不难计算物质场作用量S_m对度规场的变分

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \int d^4x (\delta \sqrt{-g}) \mathcal{L} + \int \sqrt{-g} d^4x \delta \mathcal{L} \\ &= \int \sqrt{-g} d^4x \big(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \delta g_{\mu\nu} + \delta \mathcal{L} \big). \end{aligned} \tag{4.105}$$

对于前面给出的标量场拉格朗日密度，不难算得它对度规场的变分为

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^{\mu} \phi \partial^{\nu} \phi \delta g_{\mu\nu}. \tag{4.106}$$

综上，即得

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int dv \big(g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \partial^{\mu} \phi \partial^{\nu} \phi \big) \delta g_{\mu\nu}. \tag{4.107}$$

从而可知标量场的能量动量张量为

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \partial^{\mu} \phi \partial^{\nu} \phi + g^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \partial^{\mu} \phi \partial^{\nu} \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\rho} \phi \partial^{\rho} \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{U}(\phi). \end{aligned} \tag{4.108}$$

与第二章中的相关结果比较，不难发现，这正是弯曲时空中标量场的能量动量张量。

注记：三种能量动量张量

实际上，在理论物理学中，有三种定义不相同的能量动量张量。首先，时空平移对称性所对应的守恒流称之为正则能量动量张量，正则能量动量张量不一定是对称张量。不过，对于每一个正则能量动量张量，人们都可以构造一个相应的对称守恒张量，称之为Belinfante-Rosenfeld张量。Belinfante-Rosenfeld张量当然也是能量动量张量，所以这就有了两种能量动量张量。

第三种能量动量张量是所谓的希尔伯特能量动量张量，它也就是前面我们引入的对称张量$\Theta^{\mu\nu}$，它的定义就是物质场作用量对度规场的泛函导数。

在本书第二章以及本章(第四章)的相关讨论中，我们实际上是澄清了这三种能量动量张量之间的关系。首先，在第二章中，通过所谓的诺特技巧(Noether's trick), 我们可以利用无穷小局域洛伦兹变换引入对称的Belinfante-Rosenfeld张量，这样就以诺特定理的形式统一了正则能量动量张量和Belinfante-Rosenfeld张量。

而在本章中，通过利用微分同胚不变性，我们又进一步证明了，只要物质场与引力场之间的耦合是最小耦合，那么弯曲时空中的Belinfante-Rosenfeld张量就严格等于希尔伯特能量动量张量。这样我们就彻底澄清了三种能量动量张量之间的关系。

4.5　弯曲时空中的高斯定理

前面的相关讨论中我们用到了弯曲时空中的高斯定理，而且后面的章节中也会用到这个定理。本节我们对此进行一个详细的讨论和证明。

引理： 首先我们讨论一个引理，即克里斯托夫联络的指标收缩能够写成如下形式

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\nu\sqrt{|g|}, \tag{4.109}$$

式中$g = \det g_{\mu\nu}$。

证明： 首先，根据克里斯托夫联络的定义式，我们有

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\partial_\nu g_{\mu\rho} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(g^{-1}\partial_\nu g\big). \tag{4.110}$$

式中g代表矩阵$(g_{\mu\nu})$。利用$\mathrm{Tr}(M^{-1}\delta M)=\delta\ln\det M$, 可以进一步得到

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}_{\mu\nu}&=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(g^{-1}\partial_\nu g\big)=\frac{1}{2}\partial_\nu\ln|\det g|\\&=\frac{1}{2}\partial_\nu\ln|g|=\partial_\nu\ln(\sqrt{|g|})=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\nu\sqrt{|g|}.\end{aligned}\tag{4.111}$$

式中第二行和第一行有所不同，其中的$g=\det(g_{\mu\nu})$。

弯曲时空的高斯定理： 假设M是一个$D=n$维的弯曲时空，假设它有一个边界∂M。将∂M的指向时空外侧的法向量记作n^ν, n^ν为一个单位向量，满足$g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu=1$。则对于M上的任何向量场A^μ, 我们有

$$\int_M d^nx\sqrt{|g|}D_\mu A^\mu=\int_{\partial M}d^{n-1}x\sqrt{|h|}n_\mu A^\mu=\int_{\partial M}dS_\mu A^\mu.\tag{4.112}$$

式中h_{ij}是边界∂M上的诱导度规，$h=\det(h_{ij})$，$dS_\mu\equiv d^{n-1}x\sqrt{|h|}\cdot n_\mu$表示边界上的面积元矢量。

证明： 引用上面的引理，即有

$$\begin{aligned}\sqrt{|g|}D_\mu A^\mu&=\sqrt{|g|}\big(\partial_\mu A^\mu+\Gamma^\mu_{\mu\nu}A^\nu\big)=\sqrt{|g|}\big(\partial_\mu A^\mu+X^\nu\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\nu\sqrt{|g|}\big)\\&=\partial_\mu\big(\sqrt{|g|}A^\mu\big).\end{aligned}\tag{4.113}$$

也即是说，一个向量场的协变散度可以重新表达成普通散度的形式！因此

$$\int_M d^nx\sqrt{|g|}D_\mu A^\mu=\int_M d^nx\partial_\mu\big(\sqrt{|g|}A^\mu\big).\tag{4.114}$$

然后我们当然就可以用普通的高斯定理。

为了看得更清楚，我们不妨假设∂M可以局部地由$x^n=$ 常数的超曲面刻画，进而可以将度规写成如下形式

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}h_{ij}&0\\0&N^2\end{pmatrix},\tag{4.115}$$

式中h_{ij}即为边界∂M上的诱导度规，N为某函数。从而局部地有法向量$n^\mu=(0,0,...,1/N)$, 满足$g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu=1$. 当然也有$n_\mu=g_{\mu\nu}n^\mu=(0,0,...,N)$.

利用上一段的结果即有

$$\int_M d^nx\partial_\mu\big(\sqrt{|g|}A^\mu\big)=\int_{\partial M}d^{n-1}x\big(\sqrt{|h|N^2}A^n\big)=\int_{\partial M}d^{n-1}x\sqrt{|h|}n_\mu A^\mu.$$

式中第一个等号就是在∂M由$x^n =$ 常数刻画的局部坐标中应用了普通的高斯定理。结合上面这个结果和(4.114)式，即有

$$\int_M d^n x\sqrt{|g|}D_\mu A^\mu = \int_{\partial M} d^{n-1}x\sqrt{|h|}n_\mu A^\mu. \tag{4.116}$$

定理得证。

拉普拉斯算符： 上述证明过程有一个副产品，即对于一个标量场Φ, 拉普拉斯算符对其作用为

$$D_\mu D^\mu \Phi = D_\mu\big(\partial^\mu \Phi\big) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\big(\sqrt{|g|}\partial^\mu\Phi\big) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\big(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi\big) \tag{4.117}$$

举个例子，比如平坦的三维欧几里德空间，这时候在三维直角坐标中，协变导数当然就是普通的导数，所以上面协变形式的拉普拉斯算符实际上就是普通的三维空间的拉普拉斯算符！但是，协变的形式不止适用于直角坐标，而是可以适用于任何坐标。下面，转入到球坐标，这时候度规为

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2. \tag{4.118}$$

度规张量的行列式为$|g| = r^4\sin^2\theta$, 度规张量的逆也是显然的

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix}. \tag{4.119}$$

从而根据上一段的公式，容易求得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\big(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi\big)\\ =&\big[\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\big(\sin\theta\partial_\theta\big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\big]\Phi.\end{aligned} \tag{4.120}$$

这正是球坐标中拉普拉斯算符的表达式。