关于经典力学若干问题的讨论

陈童

Contents

趁着放假有点时间，系统地翻了翻几本经典力学的教材。这里想讨论一下分析力学中几个常常引起初学者困惑的问题。

1 为什么拉格朗日量是$T-V$

关于为什么拉格朗日量是$T-V$，老旧一点的理论力学教材是这样解释的：首先有牛顿定律，然后有达朗贝尔原理，由达朗贝尔原理可以导出拉格朗日方程，其中的出现L就是$T-V$，称作拉格朗日量。最后由拉格朗日方程再反推出哈密顿原理，也就是最小作用量原理，因此最小作用量原理中的拉格朗日量自然就是$T-V$。这种解释是把牛顿定理作为出发点，把最小作用量原理作为推论，它的缺陷就是，不够现代，不是现代人们在物理学研究中采用的方式。另外，最小作用量原理本身比牛顿定律更加简洁，尤其是比牛顿定律适用范围更广，因此将它作为牛顿定律的推论，从建立物理学理论体系的结构方式来说，也是不太合适的。

用数学家的话来说即是，最小作用量原理更适合作为经典物理体系的第一公理，采用最小作用量原理的公理体系比直接采用牛顿定律的公理体系要更优雅也更优越一些。从实际的角度来说，假设你什么都不知道，要直

接猜物理学定律，那可远比根据对称性猜作用量远为困难。这也正是朗道《力学》的意义，它告诉人们如何用一种更现代的方式，**从零开始**建构起经典力学。实际上，要真正领悟朗道《力学》的精妙，你就得先忘记以前学过的关于物理学的一切理论，忘记牛顿定律，忘记高中学过的力学知识，忘记大学物理的知识，一切从零开始。

于是有些更现代一点的经典力学书直接从最小作用量原理开始。那么这些书是如何解释拉格朗日量$L = T - V$的呢？一种解释是，只有这样由最小作用量原理所导出的运动微分方程才能等价于$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$! 这种解释是正确的，不过它依然假设了你事先知道牛顿定律。这和朗道的逻辑还是有所不同的，朗道是导出了牛顿定律，不用你事先知道它成立。当然，你可能会问题，那朗道是如何知道他导出的牛顿定律成立的呢？朗道的回答是这样的，只要最小作用量原理对，只要伽利略相对性原理对，那他导出的定律就不可能不成立。所以你可以拿朗道导出的定律去和实验比较，如果发现有偏差，那就说明要么最小作用量原理有问题，要么伽利略相对性原理需要修正。

那朗道是如何解释为什么$L = T - V$的呢？回答是，朗道首先用伽利略相对性原理导出了动能项T, 然后说（在中文版p7页），为了反映相互作用，在拉格朗日量中增加某一个坐标的函数，并将这个函数记为$-V$, 所以就得到$T - V$。也就是说，减号其实只是一种约定，你当然可以用正号，这样你导出的牛顿定律就是$m\mathbf{a} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$, 或者说力$\mathbf{F} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}$(右边没有负号), 而根据诺特定理导出来的机械能表达式就是$T - V$。注意，在朗道的框架中，力和机械能都是一个导出概念，作用量和拉格朗日量才是第一概念，所以依赖于拉格朗日量的约定，机械能当然也可以成为$T - V$，但是如果你因此把$-V$称作势能，那倒回拉格朗日量的$L = T + V$, 将同样得到的是拉格朗日量等于动能减去势能。朗道这样处理在我看来是非常好的，只是，为了认识朗道的论证，你需要抛弃高中的物理知识，跟着朗道，一切从头开始。

我的《经典力学新讲》对为什么$L = T - V$也是有解释的，因为我的讲义是先介绍哈密顿力学，先作为能量的衡量而引入了哈密顿量，拉格朗日量是自动作为哈密顿量的勒让德变换出现的，这样一变换自动出现的就是$T - V$。请注意，勒让德变换本身在我的书中也不是强加的，而是自然

出现的，具体的内容请参阅《经典力学新讲》的前两章。

刘川老师和高显老师（我最近才读到高显老师的讲义，但真不错，很有特色）对为什么$L=T-V$也有解释。他们得到$T-V$的办法都是求助于相对论，刘川老师求助于狭义相对论，高显老师求助于广义相对论。但是，我个人并不太认同他们的这种处理方式。因为，分析力学的理论框架自身是完备的，这也是经典物理的基本框架，甚至在经典场论中都是适用的，但这个框架并不依赖于相对论，并不需要建立在相对论的基础之上，它自身就是自成一体的。相对论只是理论的一种对称性而已，这个对称性是洛伦兹群可以确定拉格朗日量，是伽利略群同样也能决定拉格朗日量，就像朗道的处理那样。而分析力学的理论框架并不依赖于具体是哪种对称性。

最近又在潘海俊老师的《理论力学导论》上看到对$L=T-V$的一种很巧妙的引入方式，在书的第65页，这里也照搬上来。首先，潘海俊老师说明了，自由粒子作匀速直线运动是使得$S=\int_{t_1}^{t_2}dtT$取极小值，也就是说，自由粒子的拉格朗日量可以取为动能T。

然后，潘老师考虑了地球表面重力场中的一个竖直上抛运动。假设取x轴为竖直向上轴，设粒子抛出后t时刻的位置为$x(t)$。下面关键点来了，假设我们是在一个从坐标原点开始自由下落的电梯中观察这个粒子，设粒子在电梯参考系中的坐标为x'，很显然

$$x'=x+\frac{1}{2}gt^2. \tag{1}$$

进而

$$\dot{x}'=\dot{x}+gt. \tag{2}$$

关键是，在自由下落的电梯里，粒子是失重的，惯性力和重力抵消了，这也就是所谓的等效原理。所以，在电梯参考系里，粒子是自由的，从而其运动是使得$S=\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{1}{2}m\dot{x}'^2$取极小值。变换到地面参考系，则有

$$S=\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{1}{2}m\dot{x}'^2=\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\int_{t_1}^{t_2}mg\dot{x}tdt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}mg^2t^2dt. \tag{3}$$

最后一项很容易积分出来，为$(mg^2t^3/6)|_{t_1}^{t_2}$, 而利用分部积分，中间那项可以写成

$$\int_{t_1}^{t_2}mg\dot{x}tdt=(mgxt)|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}mgxdt. \tag{4}$$

因此就有

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\big(\frac{1}{2}m\dot{x}^2-mgx\big)dt+\big(mgxt+\frac{1}{6}mg^2t^3\big)|_{t_1}^{t_2}. \tag{5}$$

而，完全积出来的最后那一项根本不影响变分！所以这也就是说，在地面参考系里，上抛粒子的运动是使得如下作用量取极小值

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\big(\frac{1}{2}m\dot{x}^2-mgx\big)dt. \tag{6}$$

很显然，这里的拉格朗日量$L=T-V$, 这提示我们，在一般情形中都应该取$L=T-V$！

2 真实路径的作用量是否取极小值？

我要讨论的第二个问题是，所谓的最小作用量之说是否真有其事，换言之，是否真实路径的作用量是取极小值？

回答是否定的。真实路径的作用量只是作用量的极值，不一定是极小值，也不一定是极大值，实际上在所有可能路径所构成的无穷维空间中，真实路径的作用量通常只是作用量泛函的稳定值，或者说驻定值。

下面我要给出的论证其实是照搬李德明和陈昌民老师那本很好的《经典力学》书，具体的讨论见这本书的第48和第49页，我这里只照搬这书上给出的一个例子。在我看来，这例子足够清楚地说明问题了。

考虑一维谐振子，其作用量是

$$S=\int_1^2\frac{m}{2}\big(\dot{x}^2-\omega^2x^2\big)dt. \tag{7}$$

将这个作用量在真实路径附近进行二阶变分，根据最小作用量原理，一阶变分等于零，而二阶变分很容易算出来是

$$\delta^2S=\int_1^2\frac{m}{2}\big[(\delta\dot{x})^2-\omega^2(\delta x)^2\big]dt. \tag{8}$$

式中δx在路径的两端(即t_1、t_2时刻)等于零。作用量是否取极小值就看二阶变分是否大于零，如果二阶变分大于零，那作用量就是极小值。

由于δx在t_1、t_2时刻等于零, 所以可以作正弦级数展开:

$$\delta x(t) = \epsilon \sum_n a_n \sin(\omega_n (t - t_1)), \text{式中} \omega_n = \frac{n\pi}{t_2 - t_1}. \tag{9}$$

进而可以算得

$$\delta \dot{x}(t) = \epsilon \sum_n a_n \omega_n \cos(\omega_n (t - t_1)). \tag{10}$$

代入$\delta^2 S$的表达式，利用三角函数的正交性，不难得到

$$\delta^2 S = \epsilon^2 \frac{m}{4} (t_2 - t_1) \sum_n a_n^2 (\omega_n^2 - \omega^2). \tag{11}$$

此式当$\omega_1 > \omega$从而所有$\omega_n > \omega$,即$\frac{\pi}{t_2 - t_1} > \frac{2\pi}{T}$, 即$t_2 - t_1 < \frac{T}{2}$(原书此处出错了)时为正，即作用量取极小值。而当此条件不满足时，$\omega_n^2 - \omega^2$就会有些为负，从而使得$\delta^2 S$依赖于展开系数a_n的选择而可正可负，从而作用量就不是取极小值，而是取鞍点值，Saddle point value。

上面的例子清楚地说明了，对于任何多粒子系统，当$t_2 - t_1$足够小(在上例中是$t_2 - t_1 < \frac{T}{2}$)，从而真实路径足够短时，作用量的确是取极小值。但是，对于比较长的真实路径，作用量通常只是取鞍点值。

最后，我想推荐一下李德明老师和陈昌民老师这本书，它用来初学也许不很合适，太难了点，对初学者也不够友好，但学过之后看一看却非常能提高。是一本好书。

3 为什么有相空间最小作用量原理成立

也许最早是从吴大猷先生开始，而后来又尤其以沈惠川老师为代表，他们有一个观点，就是认为只有坐标空间的最小作用量原理，而不承认有相空间最小作用量原理。因为他们认为导出哈密顿力学的最好方式就是先从拉格朗日力学开始，再勒让德变换到哈密顿力学。他们尤其批评了通过相空间最小作用量原理得到哈密顿正则方程的讲述方式，认为不能将广义动量看成一个独立变量进行变分，因为广义动量是勒让德变换定义的一部分。对于他们的具体观点，读者可以参考沈惠川老师自己的那本《经典力学》

书，或者参考沈惠川老师纪念吴大猷先生的一篇题目叫做《吴大猷先生点评《经典力学》》的文章，网上可以搜到。

很明显，吴大猷先生和沈惠川老师之所以有这样的观点，原因在于他们认为一切的出发点是拉格朗日力学，而哈密顿力学不过是拉格朗日力学勒让德变换来的。从这个角度出发，他们对相空间最小作用量原理的批评当然是很有意义的，甚至国外的书、教材和讲义也存在类似的讨论。

那么，哈密顿力学能不能脱离拉格朗日力学独立存在呢？对此，传统的经典力学教材并没有给出回答，朗道的《力学》也没有给出明确的回答，但是朗道在《力学》里明确地使用了相空间最小作用量原理（朗道《力学》中文版的146页），虽然不是将之作为一个重点。也即是说，朗道是认可相空间最小作用量原理的。

在我的《经典力学新讲》中，我进一步将相空间最小作用量原理作为整个分析力学体系的出发点，不但说明了哈密顿力学可以独立于拉格朗日力学而存在，而且说明了从相空间最小作用量原理出发，如何能自然地过渡到位形空间最小作用量原理，进而导出拉格朗日力学。尤其是，在我的处理中，勒让德变换不再是一个人为强加的东西，而是自然而然出现的。

然而，由于吴大猷先生和沈惠川老师的批评，有些学生仍然认为相空间最小作用量原理是否成立依然是一个没有定论的问题。我写这一节的目的之一，就是要给它一个定论，不但有定论，而且从某种意义上说是一个人们早就熟知的定论。只不过人们通常受到传统经典力学教材的影响而没有把这个熟知的定论和经典力学的教学联系起来。

下面我将严格地证明，为什么相空间最小作用量原理是成立的（即为什么广义动量可以独立变分）！以及为什么从相空间最小作用量原理出发再过渡到坐标空间最小作用量原理才是更合理的！ 证明的出发点就是假设经典力学是量子力学在普朗克常数$\hbar \to 0$时的经典极限。

让我们从量子力学出发。下面我们以$\hat{x}$表示一个粒子的正则坐标算符，以$\hat{p}$表示相应的正则动量算符。我们关心坐标表象下时间演化算符的计算公式，因为时间演化算符是量子动力学的核心，在经典极限下它必然能给出经典粒子的演化规律。假设粒子从0时刻的$|x_i\rangle$位置演化到T时刻的$|x_f\rangle$位置，则我们关心的就是如下概率幅，

$$\langle x_f| \exp\big(-iHT/\hbar\big)|x_i\rangle. \tag{12}$$

下面引入海森堡绘景，对于算符$\mathcal{O}$，其相应海森堡绘景中的算符$\mathcal{O}(t)$为

$$\mathcal{O}(t) = \exp(iHt/\hbar)\mathcal{O}\exp(-iHt/\hbar). \tag{13}$$

另外，引入海森堡绘景的位置本征态$|x,t\rangle$对于我们来说是方便的，其定义是

$$|x,t\rangle = \exp(iHt/\hbar)|x\rangle. \tag{14}$$

很容易验证，$|x,t\rangle$满足$\widehat{x}(t)|x,t\rangle = x|x,t\rangle$，式中$\widehat{x}(t)$为海森堡绘景中的位置算符。很显然，我们所关心的坐标表象时间演化算符(12)又可以写成

$$\langle x_f, T|x_i, 0\rangle. \tag{15}$$

通过在中间t时刻插入位置本征态的完备集，我们可以把路径积分关心的概率幅改写成

$$\langle x_f, T|x_i, 0\rangle = \int dx \langle x_f, T|x,t\rangle\langle x,t|x_i,0\rangle. \tag{16}$$

现在，我们如图(1)中所示的那样，将整个时间区间T等分成N个间距

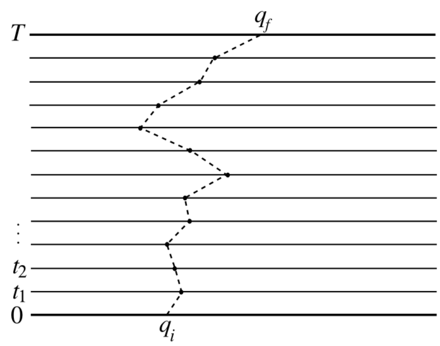

Figure 1: 图片来自于Polchinski的书，图中的q_i, q_f在我们这里分别是x_i, x_f。

为$\epsilon = T/N$的小区间，其中各分割时刻分别为

$$t_m = m\epsilon. \tag{17}$$

则通过在每一个中间分割时刻都插入相应位置本征态的完备集，我们有

$$\langle x_f,T|x_i,0\rangle=\int dx_{N-1}...dx_1\prod_{m=0}^{N-1}\langle x_{m+1},t_{m+1}|x_m,t_m\rangle. \tag{18}$$

式中$x_0=x_i$, $x_N=x_f$。

根据我们的定义，有

$$\begin{aligned}\langle x_{m+1},t_{m+1}|x_m,t_m\rangle&=\langle x_{m+1}|\exp\big(-iH\epsilon/\hbar\big)|x_m\rangle\\&=\int dp_m\langle x_{m+1}|p_m\rangle\langle p_m|\exp\big(-iH\epsilon/\hbar\big)|x_m\rangle. \end{aligned}\tag{19}$$

式中哈密顿算符H是一个关于坐标算符和动量算符的函数，$H(\widehat{p},\widehat{x})$。通过算符对易关系我们总是可以将所有的$\widehat{p}$都放到$H$表达式的左边，而将所有的$\widehat{x}$都对易到右边，从而有

$$\langle p_m|H(\widehat{p},\widehat{x})|x_m\rangle=H(p_m,x_m)\langle p_m|x_m\rangle. \tag{20}$$

从而根据(19)式我们有(精确到ϵ的一次方阶)

$$\begin{aligned}\langle x_{m+1},t_{m+1}|x_m,t_m\rangle&=\int dp_m\exp\big[-iH(p_m,x_m)\epsilon/\hbar\big]\langle x_{m+1}|p_m\rangle\langle p_m|x_m\rangle\\=\int\frac{dp_m}{2\pi\hbar}\exp\Big\{-i\big[H(p_m,x_m)\epsilon-p_m(x_{m+1}-x_m)\big]/\hbar+O(\epsilon^2)\Big\}.\end{aligned}\tag{21}$$

将(21)式代入(18)式，就可以得到

$$\begin{aligned}\langle x_f,T|x_i,0\rangle=&\int\frac{dp_{N-1}dx_{N-1}}{2\pi\hbar}...\frac{dp_1dx_1}{2\pi\hbar}\frac{dp_0}{2\pi\hbar}\\&\times\exp\Big\{-i\sum_{m=0}^{N-1}\big[H(p_m,x_m)\epsilon-p_m(x_{m+1}-x_m)\big]/\hbar+O(\epsilon^2)\Big\}\\&\to\int[dpdx]\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\big[p\dot{x}-H(p,x)\big]\Big\}.\end{aligned}\tag{22}$$

在上式的最后一行中，我们取了$N\to+\infty$，即$\epsilon\to0$的极限。在这个极限下，上式中的复杂多重积分相当于对所有以$x(0)=x_i,x(T)=x_f$为端点的相空间路径$x(t),p(t)$进行积分，上式最后表达式中的$\int[dpdx]$是对这个积分测度的简记符号。

而(22)式指数上的式子正是相空间作用量

$$S[x(t),p(t)]=\int_0^T dt\big[p\dot{x}-H(p,x)\big]. \tag{23}$$

所以，(22)式又可以写成

$$\langle x_f,T|x_i,0\rangle=\int[dpdx]\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}S[x(t),p(t)]\Big\}. \tag{24}$$

很显然，**这里我们最后得到的就是所谓的相空间路径积分，特别的，其中的正则坐标和正则动量是相互独立的变量！**

我们可以利用(24)式这个相空间路径积分公式讨论量子力学与经典力学间的对应关系。由于两条邻近相空间路径的作用量之差近似为一阶变分δS，而从(24)式的最后结果可以看出，当$\hbar\to 0$时, 一般来说相邻相空间路径的相位差$\frac{\delta S}{\hbar}$是随着路径的微小变动快速振荡的，因此在$\hbar\to 0$时，相邻相空间路径总是干涉相消的，除非我们考虑的是满足$\delta S[x(t),p(t)]=0$的这条相空间路径的邻近路径。对于这条$\delta S=0$的相空间路径，它和邻近路径的相位差近似为0，从而是干涉加强的。很显然，**这就是相空间最小作用量原理**，这条干涉加强的相空间路径就是所谓的经典相空间路径，它满足的就是哈密顿正则方程。

到此我们就已经严格证明了广义动量可以独立变分，从而相空间最小作用量原理是成立的了。

那么，相空间是怎么过渡到位形空间的呢？为此我们可以把(22)式中关于$p(t)$的积分先积掉，由于通常来说，哈密顿量$H(p,x)$关于正则动量p是一个正定二次型，所以可以利用求Saddle point 的办法来计算这个高斯型积分，此时积掉$p(t)$首先是要将指数因子中的p替换成满足下式的p，

$$0=\frac{\partial}{\partial p}[p\dot{x}-H(p,x)]=\dot{x}-\frac{\partial}{\partial p}H(p,x), \tag{25}$$

这样消去p以后，$p\dot{x}-H$的结果实际上就是拉格朗日量$L(x,\dot{x})$, **这个过程其实就是所谓的勒让德变换**。因此，由(22)式我们就可以进一步得到

$$\langle x_f,T|x_i,0\rangle=\int[dx]\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\int_0^T dtL(x,\dot{x})\Big\}. \tag{26}$$

这就是位形空间的路径积分公式。当然，上面在对$p(t)$进行积分时我们会得到一些积分值，在写出(26)式这个结果时，我们已经把所有这些$p(t)$的积

分值都吸收到积分测度$[dx]$的定义中去了。类似的，对(26)式取$\hbar \to 0$的经典极限，我们就能得到位形空间的最小作用量原理。

上面这一段说明，从量子力学的经典极限的角度来说，**从相空间过渡到位形空间才是最自然的事情**。这也正是我的《经典力学新讲》中的处理方式。

4 伽利略对称性如何决定哈密顿量

所以，相空间最小作用量原理可以作为整个经典力学的出发点，其中相空间作用量取如下形式

$$S[x(t), p(t)] = \int_0^T dt \big[p\dot{x} - H(p, x)\big]. \tag{27}$$

其中哈密顿量$H(p, x)$的含义就是系统的能量。

在利用相空间最小作用量原理时，坐标变量x在路径的两个端点是固定的，从而在两端必有$\delta x = 0$。对于p我们作这样的处理，首先，p在两端并不固定[1]，但是，对于每一条试探性的相空间路径，我们都要求它附近的路径变分满足δp在端点处等于零（虽然其它试探路径可以取不同的p端点）。即是说，虽然p端点不固定，但同样有

$$\delta x|_{\text{端点}} = \delta p|_{\text{端点}} = 0. \tag{28}$$

由此很容易看出，作用量中的$p\dot{x} - H$并不唯一，而是可以相差一个全微分项，即是说，它可以替换成

$$p\dot{x} - H(p, x) + \frac{dF}{dt}, \tag{29}$$

式中$F(p, x)$是x, p的任意函数。实际上，这个式子是很多教材讨论正则变换的出发点（虽然我的《经典力学新讲》并不是从这里出发来讨论正则变换），但是，真正讨论清楚了如何处理p端点问题的教材却很少。

从相空间最小作用量原理出发的确不错，问题是，给定一个系统，我们如何写出其哈密顿量呢？特别是，假设预先并不知道牛顿定律、不知道动

[1]注意, p在端点处不能固定，否则相空间变分问题通常是无解的，具体的讨论可以参见我《经典力学新讲》第二章的相关内容。

量和速度之间的关系，不知道机械能的表达式，如何决定非相对论粒子系统的哈密顿量呢？回答是，可以根据对称性！空间平移、空间旋转以及伽利略对称性足以决定非相对论粒子系统的哈密顿量，下面我们就来说明这一点。

单个自由粒子

首先，让我们从单个粒子开始，假设没有外场(否则通常会破坏空间平移对称性)，因此是一个自由粒子。记粒子的坐标为$\mathbf{x}$, 记动量为$\mathbf{p}$。由于没有外场，所以粒子的能量只有动能，从而哈密顿量仅仅依赖于动量$\mathbf{p}$，又由于空间旋转不变性，哈密顿量H应该不依赖于$\mathbf{p}$的方向，即是说，H应该是$\mathbf{p}^2$的函数，记为$H(\mathbf{p}^2)$。从而自由粒子的相空间作用量就是

$$S[\mathbf{x}(t),\mathbf{p}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\big[\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{p}^2)\big]. \tag{30}$$

下面我们另外再考虑一个惯性参考系，K'系，它相对于原来的参考系以$\mathbf{V}$的速度匀速运动。两个参考系的时间当然是一样的，这也就是牛顿的绝对时间假设。但是，两个参考系的坐标按下式变换

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{V}t, \tag{31}$$

同时，两个参考系的动量显然依赖于两者的相对速度$\mathbf{V}$，另外，动量还与粒子的惯性有关，因此可以假设它如下变换

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + m\mathbf{V}, \tag{32}$$

式中m是一个反映粒子惯性的比例常数，按照通常的概念，我们称之为粒子的质量。以上两个变换关系，就是所谓的伽利略变换。

伽利略相对性原理，或者说伽利略对称性，可以表述为，粒子的运动方程不依赖于特定参考系，换言之，在伽利略变换之下，作用量最多只能相差一个全微分项的积分。

不妨考察一个无穷小伽利略变换，即取$\mathbf{V}=\epsilon$为无穷小量。从而(下面的

推导全都忽略高阶无穷小量)

$$
\begin{aligned}
S[\mathbf{x}'(t),\mathbf{p}'(t)] &= \int_{t_1}^{t_2} dt\big[\mathbf{p}'\cdot\dot{\mathbf{x}}' - H(\mathbf{p}'^2)\big] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\big[\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{x}} + m\dot{\mathbf{x}}\cdot\vec{\epsilon} + \mathbf{p}\cdot\vec{\epsilon} - H(\mathbf{p}^2 + 2m\mathbf{p}\cdot\vec{\epsilon} + m^2\vec{\epsilon}^2)\big] \\
&= S[\mathbf{x}(t),\mathbf{p}(t)] + \int_{t_1}^{t_2} dt\Big[m\dot{\mathbf{x}}\cdot\vec{\epsilon} + \mathbf{p}\cdot\vec{\epsilon} - 2m\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}^2}(\mathbf{p}\cdot\vec{\epsilon})\Big] \quad (33)
\end{aligned}
$$

式中$m\dot{\mathbf{x}}\cdot\vec{\epsilon} = \frac{d}{dt}\big(m\mathbf{x}\cdot\vec{\epsilon}\big)$的确为一个全微分项，因此为了使得作用量只差全微分项的积分，式中的非全微分项$\mathbf{p}\cdot\vec{\epsilon} - 2m\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}^2}(\mathbf{p}\cdot\vec{\epsilon})$应该相互抵消。从而即有

$$\mathbf{p}\cdot\vec{\epsilon} = 2m\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}^2}(\mathbf{p}\cdot\vec{\epsilon}) \Leftrightarrow 1 = 2m\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}^2}, \quad (34)$$

从而即可以得到自由粒子的哈密顿量

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (35)$$

相互作用的多粒子系统

根据能量的可加性，容易将上述结果推广到n个自由粒子，相应的哈密顿量为

$$\sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i}. \quad (36)$$

如果粒子间有相互作用，那为了反映相互作用能，我们可以引入一个依赖于粒子坐标的函数$V(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_n)$。

由于平移对称性，$V(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_n)$应该只依赖于相对坐标之差，从而可以重写为$V(...,\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j,...)(i\neq j)$，如果进一步考虑空间旋转对称性，甚至可以重写成$V(...,|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|,...)(i\neq j)$。从而相互作用粒子体系的哈密顿量必定可以写成

$$H = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + V(...,|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|,...). \quad (37)$$

完全类似于单个粒子情形，不难验证，由上述哈密顿量描述的多粒子体系同时也满足伽利略对称性！对(37)式给出的哈密顿量进行勒让德变换，即可以得到多粒子体系的拉格朗日量，为

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 - V(..., |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|, ...) = T - V. \tag{38}$$

至于为什么要对哈密顿量进行勒让德变换，可以参看我的《经典力学新讲》第二章。

致谢

感谢南京大学鞠国兴老师、北师大涂展春老师、川大孙铮老师、江西师大黄亦斌老师、中国农业大学陈奎孚老师、杭师大陈驰一老师等全国理论力学课程交流群里各位老师的热烈讨论，使我获益良多。更要感谢中山大学高显老师在知乎上的交流，同样使我获益很多。