# 目录

# 第三章　对称性与对称性自发破缺

陈童

上一章中我们已经看到洛伦兹不变性如何限制经典场论的作用量，更一般的，场论系统的任何对称性都限制着它的作用量，这种限制通过要求作用量在对称变换之下保持不变来完成。在现代物理中有一条构造作用量的基本原则，即首先猜测出场论系统的对称性，然后再写出这些对称性所允许的作用量的一般形式。物理学家杨振宁先生称这条原则为："对称性决定相互作用"。

在现代物理中，对称性的重要性再怎么强调都不为过。比方说，对称性和守恒定律密切相关。每一种连续对称性都对应着一条守恒定律，这就是所谓的诺特定理。在《经典力学新讲》中，我们对于粒子系统证明过这条定理，现在，我们要将这个证明推广到场论系统。

在基本规律的层次上，我们的世界也许有很高的对称性，但是我们所生活的低能世界却没有那么高的对称性，它反而展现出千奇百怪的多样性。如何从基本层次的对称性到现实的多样性呢？回答是通过对称性的破缺，尤其是通过对称性的自发破缺。所谓对称性的自发破缺，指的就是作用量是对称的，但是运动微分方程的解没有那么高的对称性，作用量的对称性在解的层次上破缺了，特别的，场方程的真空解没有那么高的对称性，真空破缺了作用量的对称性，这就是对称性自发破缺。本章我们还将研究这种自发破缺是如何发生的。

为了简单起见，本章将限于考察标量场系统。

## 3.1 对称性与守恒定律

### 3.1.1 诺特定理

为了让读者看清楚诺特定理证明的关键思想，我们先限于考察不改变时空坐标的对称变换，后文在考察时空平移对称性和洛伦兹对称性时再推广到时空坐标跟着变换的对称性。

假设我们的场论系统由$n$个标量场组成，记为$\phi^a(x)$, $a=1,2,...,n$，相应的作用量泛函记为$S[\phi]=\int d^4x\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$。假设$S[\phi]$在某簇连续对称变换$g(\theta)$的作用下保持不变，这里$\theta$为这簇连续对称变换所依赖的连续参数，特别的，$\theta=0$对应恒等变换(即不进行任何变换操作)。为了证明诺特定理，下面考察无穷小对称变换，即$\theta=\epsilon$的对称变换, $\epsilon$为无穷小量。假设在此变换之下，时空坐标保持不变，但是场位形$\phi^a(x)$变换为$\widetilde{\phi}^a(x)$,

$$\phi^a(x)\to\widetilde{\phi}^a(x)=\phi^a(x)+\epsilon F^a(\phi(x)), \tag{3.1}$$

$F^a(\phi(x))$为场$\phi$的某个函数，其具体形式取决于对称变换的定义。作用量的变换不变意味着，在此无穷小变换前后，作用量的改变量为零，即

$$\delta S=S[\widetilde{\phi}]-S[\phi]=\int d^4x\Big(\mathcal{L}(\widetilde{\phi},\partial_\mu\widetilde{\phi})-\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\Big)=0. \tag{3.2}$$

前面的无穷小量$\epsilon$是一个常数，下面我们将它变成一个关于时空坐标$x$的任意函数$\epsilon(x)$, 同时要求$\epsilon(x)$在时空的无穷远处趋于零，则原来的无穷小对称变换就变成如下无穷小变换，

$$\phi^a(x)\to\widetilde{\phi}^a(x)=\phi^a(x)+\epsilon(x)F^a(\phi(x)), \tag{3.3}$$

它在时空无穷远处保持$\phi$不变。现在这个变换就不再是对称变换了，从而变换前后的作用量一定会发生改变。注意到拉格朗日密度里只含一阶偏导，从而容易知道变换前后作用量的改变量必定为

$$\delta S=\int d^4xJ^\mu\partial_\mu\epsilon, \tag{3.4}$$

式中$J^\mu$为$\phi$和$\partial_\nu\phi$的某个函数。特别的，作用量的改变量只能依赖于$\partial_\mu\epsilon$而不能依赖于$\epsilon$，这是因为，当我们将$\epsilon(x)$恢复为无穷小对称变换的常数$\epsilon$时，作用量的改变量必须要恢复为零。

下面我们将表达式(3.4)分部积分，并丢掉无穷远处的边界项(因为$\epsilon(x)$在无穷远处趋于零)，即有

$$\delta S = -\int d^4x \partial_\mu J^\mu \epsilon(x). \tag{3.5}$$

下面，假设我们的无穷小变换是作用在满足运动微分方程的真实场位形上，则由于真实场位形必定满足最小作用量原理$\delta S = 0$，从而有

$$\delta S = -\int d^4x \partial_\mu J^\mu \epsilon(x) = 0. \tag{3.6}$$

注意到$\epsilon(x)$的任意性，从而必有

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0. \tag{3.7}$$

这就是四维时空的流守恒方程。从而任何连续对称性都意味着存在一个守恒流$J^\mu$，这就是场论系统的诺特定理。

记$J^0(x) = \rho(x)$, $\mathbf{J} = (J^1, J^2, J^3)$, 则上面的流守恒方程可以重写成，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{3.8}$$

将上式对三维空间积分，并记$\int d^3\mathbf{x}\rho(\mathbf{x}, t) = Q$, 则有

$$\frac{dQ}{dt} = -\int d^3\mathbf{x}\nabla \cdot \mathbf{J} = -\int_\infty d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J} = 0, \tag{3.9}$$

上式最后我们假定了在空间无穷远处$\mathbf{J}$趋于零。因此，$Q = \int d^3\mathbf{x}\rho(\mathbf{x}, t)$是一个守恒量，称之为守恒荷，而$\rho(x)$就称作荷密度，$\mathbf{J}(x)$就是流密度。根据《经典力学新讲》第五章的相关知识可以知道，守恒荷$Q$作为场论相空间上的函数，它就是对称变换的生成元，即有如下泊松括号关系

$$\epsilon[\phi^a, Q] = \delta\phi^a = \epsilon F^a(\phi(x)). \tag{3.10}$$

现在，恢复光速$c$，则(3.8)式就变成

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial(ct)} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{3.11}$$

这意味着恢复量纲以后，实际上$J^0 = \rho c$，从而守恒流四矢量为$J^\mu = (\rho c, \mathbf{J})$。

### 3.1.2 内部对称性

其实，保持时空坐标不变的对称性就是所谓的内部对称性，现在让我们来考察两个具体的内部对称性。

#### $U(1)$对称性

我们将要考察的第一个内部对称性是所谓的相位不变性，也称作$U(1)$不变性。具体来说，假设我们考察的场论系统由一个复标量场组成，并具有如下作用量

$$S[\phi] = -\int d^4x \big[\partial_\mu \overline{\phi} \partial^\mu \phi + \mathcal{U}(|\phi|^2)\big]. \tag{3.12}$$

显然，这个作用量在如下复标量场的相位变换(也称作$U(1)$变换)下保持不变，

$$\phi(x) \to e^{i\theta}\phi(x), \quad \overline{\phi}(x) \to e^{-i\theta}\overline{\phi}(x). \tag{3.13}$$

取$\theta$为无穷小量$\theta = \epsilon$, 则$U(1)$变换前后场的改变量为

$$\delta\phi = i\epsilon\phi, \quad \delta\overline{\phi} = -i\epsilon\overline{\phi}. \tag{3.14}$$

现在，将上面无穷小参数$\epsilon$变成依赖于时空坐标的$\epsilon(x)$，则变换前后作用量的改变量为

$$\begin{aligned} \delta S &= -\int d^4x \big[\partial^\mu \overline{\phi} \partial_\mu(\delta\phi) + \partial_\mu(\delta\overline{\phi})\partial^\mu\phi\big] \\ &= -i\int d^4x \big[\partial^\mu\overline{\phi}\phi - \overline{\phi}\partial^\mu\phi\big]\partial_\mu\epsilon. \end{aligned} \tag{3.15}$$

根据诺特定理的证明过程可知，相应的守恒流$J^\mu$为

$$J^\mu = i\big[\overline{\phi}\partial^\mu\phi - \partial^\mu\overline{\phi}\phi\big]. \tag{3.16}$$

特别的，现实世界的电荷守恒就对应于这样一个$U(1)$守恒流。

#### $U(N)$对称性

$U(1)$对称性的一种简单推广是所谓的$U(N)$对称性。这时候我们的场论系统有$N$个复标量场$\phi^i$, $i = 1, 2, ..., N$，它们组成列矢量$\Phi$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \cdots \\ \phi^N \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

所谓的$U(N)$变换就是用一个$N \times N$可逆复矩阵$U$作用在场$\Phi$上，即是说场$\Phi$变换为

$$\Phi(x) \to U\Phi(x), \quad \Phi^\dagger(x) \to \Phi^\dagger(x)U^\dagger. \tag{3.18}$$

式中符号$\dagger$表示共轭转置，即将每一个矩阵元取复数共轭同时将整个矩阵转置，$\dagger$也称作厄密共轭。只不过，在上面变换中我们同时要求可逆矩阵$U$满足

$$U^\dagger U = 1 \Leftrightarrow U^{-1} = U^\dagger. \tag{3.19}$$

这样的矩阵也称之为幺正矩阵。

考虑到$N \times N$复矩阵一共有$N^2$个复数矩阵元，对应$2N^2$个实参数，而幺正性$U^\dagger U = 1$施加了$N^2$个限制，所以独立的实参数个数为$N^2$个。即是说，所有$N \times N$幺正矩阵的集合可以由$N^2$个实参数刻画。实际上，任何幺正矩阵必定可以写成如下形式，

$$U = \exp(i\theta^a T_a), \tag{3.20}$$

式中$\theta^a, a = 1, 2, ..., N$为刻画幺正矩阵的$N^2$个实参数，$T_a$为矩阵，式中要对重复指标$a$求和，从1求到$N^2$。幺正性的$U^{-1} = U^\dagger$意味着

$$\exp\big(-i\theta^a T_a\big) = \exp\big(-i\theta^a T_a^\dagger\big), \tag{3.21}$$

即

$$T_a^\dagger = T_a, \tag{3.22}$$

这样的矩阵称作厄密矩阵。

从而场$\Phi$的$U(N)$变换即如下变换，

$$\Phi(x) \to \exp(i\theta^a T_a)\Phi(x), \quad \Phi^\dagger(x) \to \Phi^\dagger(x)\exp(-i\theta^a T_a). \tag{3.23}$$

很明显，如下作用量$S[\Phi]$在这种$U(N)$变换下是不变的，

$$S[\Phi] = -\int d^4x \Big[\partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi + \mathcal{U}(\Phi^\dagger\Phi)\Big], \tag{3.24}$$

我们称这样的场论具有$U(N)$对称性。

为了导出上述具$U(N)$对称性场论系统的守恒流，我们令(3.23)变换中的参数$\theta^a$为无穷小量$\epsilon^a$，并进而将$\epsilon^a$改变成依赖于时空坐标的$\epsilon^a(x)$，则在这种改变后的无穷小变换之下，场的改变量为

$$\delta\Phi(x) = i\epsilon^a(x)T_a\Phi(x), \quad \delta\Phi^\dagger(x) = -i\epsilon^a(x)\Phi^\dagger(x)T_a. \tag{3.25}$$

相应的作用量$S[\Phi]$的改变量为

$$\begin{aligned}\delta S &= -\int d^4x\Big[\partial_\mu(\delta\Phi^\dagger)\partial^\mu\Phi + \partial_\mu\Phi^\dagger\partial^\mu(\delta\Phi)\Big] \\ &= i\int d^4x\Big[\Phi^\dagger T_a\partial^\mu\Phi - \partial^\mu\Phi^\dagger T_a\Phi\Big]\partial_\mu\epsilon^a.\end{aligned} \tag{3.26}$$

从而$U(N)$对称性的相应守恒流为

$$J_a^\mu = i\Big[\Phi^\dagger T_a\partial^\mu\Phi - \partial^\mu\Phi^\dagger T_a\Phi\Big]. \tag{3.27}$$

### 3.1.3　时空对称性

前面我们考察的是保持时空坐标不变的内部对称性，下面我们来考察时空本身的对称性。为了简单起见，本节假定所考察的场论系统由一个实标量场组成。

#### 时空平移对称性与能动量张量

首先我们考察时空平移对称性，假定在某个时空平移操作之下$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu$, 其中$a^\mu$为某常数四矢量，即假定整个场论系统反向(向后)平移了$a^\mu$, 从而使得其时空坐标增加了$a^\mu$。在此平移之下，场$\phi(x)$变换为$\phi(x) \to \phi(x')$。很容易验证作用量$S[\phi] = \int d^4x\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$在此平移之下保持不变，具体验证过程如下

$$\begin{aligned}S[\phi] = &\int d^4x\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) \to \\ &\int d^4x\mathcal{L}(\phi(x'), \partial_\mu\phi(x')) = \int d^4x'\mathcal{L}(\phi(x'), \partial'_\mu\phi(x')) \\ = &\int d^4x\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) = S[\phi]\end{aligned} \tag{3.28}$$

式中倒数第二个等号只是将$x'$重记成了$x$。

下面考察无穷小时空平移，即将$a^\mu$取成无穷小量$\epsilon^\mu$。进一步，根据诺特定理的证明过程，我们将$\epsilon^\mu$变成依赖于时空坐标$x$的无穷小量$\epsilon^\mu(x)$, 即考察如下无穷小时空变换

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x). \tag{3.29}$$

记坐标变换的雅可比行列式为$|\frac{\partial x'}{\partial x}|$, 利用矩阵恒等式$\det(A) = e^{\mathrm{Tr}(\ln A)}$, 易得在一阶近似上有

$$|\frac{\partial x'}{\partial x}| = 1 + \partial_\mu \epsilon^\mu(x) \Rightarrow |\frac{\partial x}{\partial x'}| = 1 - \partial_\mu \epsilon^\mu. \tag{3.30}$$

从而变换以后的作用量$S[\phi(x')]$为

$$\begin{aligned}
S[\phi(x')] &= \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x'), \partial_\nu \phi(x')) = \int d^4x' |\frac{\partial x}{\partial x'}| \mathcal{L}(\phi(x'), \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \partial'_\mu \phi(x')) \\
&= \int d^4x' (1 - \partial_\mu \epsilon^\mu) \mathcal{L}\big(\phi(x'), \partial'_\nu \phi(x') + \partial_\nu \epsilon^\mu \partial'_\mu \phi(x')\big) \\
&= \int d^4x' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\big(\partial'_\nu \phi(x')\big)} \partial'_\mu \phi(x') \partial_\nu \epsilon^\mu - \int d^4x' \partial_\mu \epsilon^\mu \mathcal{L}\big(\phi(x'), \partial'_\nu \phi(x')\big) \\
&\quad + \int d^4x' \mathcal{L}\big(\phi(x'), \partial'_\nu \phi(x')\big) \\
&= \int d^4x \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \phi(x) - \delta^\nu_\mu \mathcal{L}\big(\phi(x), \partial_\rho \phi(x)\big)\Big] \partial_\nu \epsilon^\mu \\
&\quad + \int d^4x \mathcal{L}\big(\phi(x), \partial_\nu \phi(x)\big).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

式中最后一个等号是将时空坐标$x'$重记成了$x$。由上面的推导易知，变换前后作用量的改变量为

$$\begin{aligned}
\delta S &= S[\phi(x')] - S[\phi(x)] \\
&= \int d^4x \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \phi(x) - \delta^\nu_\mu \mathcal{L}\Big] \partial_\nu \epsilon^\mu.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

完全类似于前面诺特定理证明过程的论证可知，时空平移对称性对应的守恒流为

$$T^\nu{}_\mu = -\Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \phi(x) - \delta^\nu_\mu \mathcal{L}\Big]. \tag{3.33}$$

相应的流守恒方程为

$$\partial_\nu T^\nu{}_\mu = 0. \tag{3.34}$$

注意到$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\dot{\phi}(x) - \mathcal{L} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}$正好是哈密顿密度，即能量密度，从而可知时间平移对称性对应的守恒荷正是系统的总能量，即

$$H = P^0 = \int d^3\mathbf{x} T^{00}(x). \tag{3.35}$$

进而易知空间平移对称性对应的守恒荷是系统的总动量，即对于$i = 1,2,3$有，

$$P^i = \int d^3\mathbf{x} T^{0i}(x) = -\int d^3\mathbf{x} \pi(x)\partial^i\phi(x). \tag{3.36}$$

能量和动量一起构成了四矢量$P^\mu = (H, \mathbf{P})$, 通常称$P^\mu$为四动量。人们通常称$T^{\mu\nu}$为能动量张量，其中$T^{00}$为能量密度，$T^{i0}$为能量流密度，$T^{0j}$为动量密度，$T^{ij}$为动量流密度。

假设我们考虑$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \mathcal{U}(\phi)$的场论模型，则容易算得，

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi + \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \\ &= \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{U}(\phi). \end{aligned} \tag{3.37}$$

很明显，这个$T^{\mu\nu}$的两个指标是对称的。实际上，可以证明，对于任何洛伦兹不变的标量场论，其$T^{\mu\nu}$都必定是对称张量。但是当我们的考察范围超出标量场论时，其按照诺特定理求出来的$T^{\mu\nu}$就不一定为对称张量了，比方说对于矢量场，它的$T^{\mu\nu}$就不是对称张量。不过，$T^{\mu\nu}$的流守恒方程$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$告诉我们，$T^{\mu\nu}$的定义不是唯一的，实际上人们很容易看出，对于任何$X^{\rho\mu\nu}$，只要$X^{\rho\mu\nu} = -X^{\mu\rho\nu}$，则$T^{\mu\nu} + \partial_\rho X^{\rho\mu\nu}$同样满足流守恒方程，因此可以定义为新的能动量张量。从而只要我们合适地选取$X^{\rho\mu\nu}$, 我们总可以让重新定义以后的能动量张量为一个对称张量。在广义相对论中，物质系统总是通过能动量张量和引力场相耦合，由于引力场由一个对称的度规场描述，因此相应的能动量张量必定是对称张量。因此，以后我们常常假定守恒的能动量张量$T^{\mu\nu}$为对称张量。

### 洛伦兹对称性

上一章考察相对性原理时说过，我们考察的经典场论都是具有洛伦兹不变性的场论，即拉格朗日密度为洛伦兹标量的理论，具体来说即是拉氏密度在如下坐标变换下保持不变的理论，

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{3.38}$$

$\Lambda^\mu_{\ \nu}$就是所谓的洛伦兹变换。

为了利用诺特定理，我们需要考察无穷小洛伦兹变换，即取

$$\Lambda^\mu_{\ \nu} = \delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu_{\ \nu}, \tag{3.39}$$

式中$\epsilon^\mu_{\ \nu}$为无穷小量。很显然，无穷小洛伦兹变换由于可以和恒等变换连续过渡，从而必定是正洛伦兹变换，即满足[1]

$$\det(\Lambda) = 1 \Rightarrow \epsilon^\mu_{\ \mu} = 0. \tag{3.40}$$

进一步，利用洛伦兹变换的定义$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_{\ \alpha}\Lambda^\nu_{\ \beta} = \eta_{\alpha\beta}$, 易得

$$\eta_{\mu\nu}(\delta^\mu_\alpha + \epsilon^\mu_{\ \alpha})(\delta^\nu_\beta + \epsilon^\nu_{\ \beta}) = \eta_{\alpha\beta} \Rightarrow \epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{\beta\alpha} = 0. \tag{3.41}$$

即$\epsilon^{\mu\nu}$是一个二阶反对称张量。

为了利用诺特定理，我们将无穷小参数$\epsilon^\mu_{\ \nu}$变成依赖于时空坐标的$\epsilon^\mu_{\ \nu}(x)$，进而考察如下无穷小时空坐标变换，

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = \epsilon^\mu_{\ \nu}(x)x^\nu. \tag{3.42}$$

则完全类似于前面从(3.31)式到(3.32)式的推导，可知在此时空变换之下作用量的改变量为

$$\begin{aligned}\delta S &= S[\phi(x')] - S[\phi(x)] \\ &= \int d^4x \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)}\partial_\mu \phi(x) - \delta^\nu_\mu \mathcal{L}\Big]\partial_\nu(\delta x^\mu) \\ &= -\int d^4x T^\nu_{\ \mu}\big(\epsilon^\mu_{\ \nu} + x^\rho \partial_\nu \epsilon^\mu_{\ \rho}\big).\end{aligned} \tag{3.43}$$

注意到$\epsilon_{\mu\nu}$关于指标反对称，从而有

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{2}\int d^4x \Big[(T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu})\epsilon_{\mu\nu} + (x^\rho T^{\nu\mu} - x^\mu T^{\nu\rho})\partial_\nu \epsilon_{\mu\rho}\Big] \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x \Big[(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu})\epsilon_{\mu\nu}\Big] + \frac{1}{2}\int d^4x \Big[(x^\mu T^{\rho\nu} - x^\nu T^{\rho\mu})\partial_\rho \epsilon_{\mu\nu}\Big].\end{aligned} \tag{3.44}$$

如果我们将$\epsilon_{\mu\nu}$取回常数则$\partial_\nu \epsilon_{\mu\rho} = 0$, 从而上式最后一行只剩下前面那项，但是洛伦兹不变性告诉我们，当$\epsilon_{\mu\nu}$为常数时作用量应该不变，即这时候必有$\delta S = 0$，由此可知

$$T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = 0, \tag{3.45}$$

[1]利用矩阵恒等式$\det(A) = e^{\mathrm{Tr}(\ln A)}$.

即能动量张量必定是对称张量(当然，这是因为我们考察的是标量场论)。在(3.44)式中代入$T^{\mu\nu}=T^{\nu\mu}$，即有

$$\delta S=\frac{1}{2}\int d^4x\Big[(x^{\mu}T^{\rho\nu}-x^{\nu}T^{\rho\mu})\partial_{\rho}\epsilon_{\mu\nu}\Big]. \tag{3.46}$$

根据诺特定理的证明，这意味着$M^{\rho\mu\nu}=x^{\mu}T^{\rho\nu}-x^{\nu}T^{\rho\mu}$为守恒流，满足守恒方程

$$\partial_{\rho}M^{\rho\mu\nu}=0. \tag{3.47}$$

以上我们证明了，对于标量场理论，按照诺特定理求出来的能动量张量必定是对称张量。但是，如果我们考察的不是标量场，而是比方说矢量场，那这个证明是不成立的。不过，仿照这个证明的思路人们可以证明，总能够选取到合适的$X^{\rho\mu\nu}$, 使得可以将能动量张量重定义成一个对称张量。具体的证明过程参见Weinberg 量子场论第一卷7.4节。有些时候人们也称这种对称的能动量张量为Belinfante(贝林凡特)张量。一旦人们将能动量张量取成对称张量，则$M^{\rho\mu\nu}=x^{\mu}T^{\rho\nu}-x^{\nu}T^{\rho\mu}$就一定是守恒流(即使我们不限于标量场论)，这是因为

$$\partial_{\rho}M^{\rho\mu\nu}=T^{\mu\nu}-T^{\nu\mu}=0. \tag{3.48}$$

通常记$M^{\rho\mu\nu}$相应的守恒荷为$J^{\mu\nu}$,

$$J^{\mu\nu}=\int d^3\mathbf{x}M^{0\mu\nu}. \tag{3.49}$$

根据诺特定理，$J^{\mu\nu}$当然是洛伦兹变换的生成元。实际上，当取$i,j=1,2,3$时，相应的

$$J^{ij}=\int d^3\mathbf{x}\big[x^iT^{0j}-x^jT^{0i}\big], \tag{3.50}$$

就是角动量，它和通常角动量矢量的关系是$J_k=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J^{ij}$。而$K_i=J^{i0}$称作洛伦兹推动(boost)的生成元，

$$K_i=\int d^3\mathbf{x}\big[x^iT^{00}-x^0T^{0i}\big]. \tag{3.51}$$

或者写得更清楚一点，

$$\mathbf{K}=-t\mathbf{P}+\int d^3\mathbf{x}\big[\mathbf{x}T^{00}(\mathbf{x},t)\big]. \tag{3.52}$$

## 3.2 对称性自发破缺

自然界中常常发生的是，基本物理规律具有某种对称性，但是它描述物理系统的某个特定解却没有那么高的对称性，这就是对称性自发破缺。特别的，对称性自发破缺尤其指场论系统的能量最低解(即真空解)没有那么高的对称性，仅管作用量的对称性比较高。

为了说清楚对称性自发破缺的机制，本节我们着重考察如下复标量场模型

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu\bar{\phi}\partial^\mu\phi - \mathcal{U}(\phi), \quad \mathcal{U}(\phi) = \frac{g}{4}\big(|\phi|^2 - u\big)^2. \tag{3.53}$$

其中$\phi = \phi_1 + i\phi_2$为一个由两实标量场$\phi_1, \phi_2$所组成的复标量场，式中$u$为一个实常数。显然，这样的场论系统具有如下$U(1)$对称性，

$$\phi \to e^{i\alpha}\phi, \quad \bar{\phi} \to e^{-i\alpha}\bar{\phi}. \tag{3.54}$$

我们可以画出势函数$\mathcal{U}(\phi)$的样子，当$u < 0$时，很显然$\mathcal{U}(\phi)$为一个倒放的钟形曲面，这时候它的最小值位置只有一个，即在$\phi = 0$处。而当$u > 0$时，$\mathcal{U}(\phi)$如图(3.1)所示，形如一个墨西哥帽，这时候$\mathcal{U}(\phi)$的最小值位置有无穷多个，分布在$\phi$复平面上$|\phi| = \sqrt{u}$的圆周上。

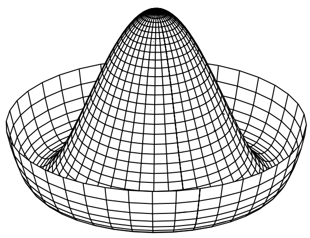

图 3.1: $u > 0$时的$\mathcal{U}(\phi)$，它的最小值有无穷多个，分布在$|\phi| = \sqrt{u}$的圆周上。

容易求出上述复标量场系统的能动量张量，进而可得其总能量为

$$H = \int d^3\mathbf{x}\big[|\partial_t\phi|^2 + |\nabla\phi|^2 + \mathcal{U}(\phi)\big]. \tag{3.55}$$

所谓真空，即使指系统能量最低的场位形，显然，这样的场位形必然满足

$$\partial_t\phi = \nabla\phi = 0, \tag{3.56}$$

从而是一种常数场位形。其次，真空场位形还要使得势函数$\mathcal{U}(\phi)$取最小值。因此，当$u<0$时，系统的真空是唯一的，即$\phi=0$，很显然这时候真空位形本身具有$U(1)$对称性。但是，当$u>0$时，真空场位形有无穷多个，分布在$|\phi|=\sqrt{u}$的圆周上，换言之，这时候对于任何实数$\alpha$，下面的场位形均为真空位形，

$$\phi=\sqrt{u}e^{i\alpha}. \tag{3.57}$$

但是物理系统只可能处于这无穷多个真空中的某一个，比方说处于$\phi=\sqrt{u}$，相应于在图(3.1)中那个最低能圆周上选定了一点，很显然，任何这样选定的点本身都不再具有$U(1)$的相位不变性。因此，当$u>0$时，虽然理论具有$U(1)$对称性，但是系统的物理真空会自发破缺这种对称性，这就是所谓的对称性自发破缺！

假设最初时我们所考察的这个系统$u<0$，因此其真空也具有$U(1)$对称性，我们称这时候的系统处在对称相。设想随着某些物理条件的改变，参数$u$从小于零变成了大于零，那么系统的真空将会自发破缺$U(1)$对称性，我们称这时候的系统处于对称破缺相。而从对称相到对称破缺相的转变过程就是相变。

Nambu和Goldstone发现，对于发生了某种连续对称性(比如这里的$U(1)$对称性)自发破缺的系统，其对称破缺相具有某种特殊的性质，具体来说就是系统中必定存在某种以光速传播的波动，在量子化以后这种光速传播的波动会给出一种零质量的粒子(和光波量子化以后给出的光子质量为零类似)，通常称作Nambu-Goldstone 玻色子。

下面回到本节的例子，我们将用它来说明这种光速传播的波动是如何出现的。为此假设处于对称破缺相的系统的真空位形$\phi_0$如下

$$\phi_0=\sqrt{u}. \tag{3.58}$$

下面我们将复标量场重新写成两个实标量场$\rho(x)$和$\theta(x)$，即定义

$$\phi=(\sqrt{u}+\rho)e^{i\theta}. \tag{3.59}$$

这样定义的目的是使得真空对应于$\rho=\theta=0$。将上式代入原来的拉格朗日密度(3.53), 可得

$$\mathcal{L}=-(\sqrt{u}+\rho)^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta-\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho-gu\rho^2(x)-g\sqrt{u}\rho^3(x)-\frac{g}{4}\rho^4(x). \tag{3.60}$$

设想$\theta(x)$场在真空上传播，从而可以取$\rho = 0$(它一定满足$\rho(x)$场的运动微分方程)，这时候$\theta$场的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = -u\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta. \tag{3.61}$$

从而很容易求出场$\theta(x)$的运动微分方程，为

$$\partial_\mu\partial^\mu\theta = 0 \Leftrightarrow (\partial_t^2 - \nabla^2)\theta(\mathbf{x}, t) = 0. \tag{3.62}$$

很显然，这正是一个以光速自由传播的波动方程。从而这就证明了对称破缺相的系统中存在一种以光速传播的波动。

对称性自发破缺对于粒子物理非常重要，比方说，同样是由夸克所组成，但相对于重子，$\pi$介子之所以这么轻(近似于无质量)，就是因为它是一种所谓手征对称性的连续对称性自发破缺所产生的Nambu-Goldstone 玻色子。只不过由于手征对称性是一种近似对称性，而不是精确对称性，所以$\pi$介子才有很小的质量。

对称性自发破缺不仅对于粒子物理很重要，在非相对论性的凝聚态物理中它同样很重要。比方说，晶体的晶格结构自发破缺了空间平移(指任意平移)对称性，由此导致的波动就是声波，即以声速传播的一种波动(在固体物理中声速就相当于相对论物理中的光速。)，声波量子化以后就是声子，所以声子就是一种平移对称性自发破缺所对应的Nambu-Goldstone 玻色子。