目录

第十章　杨-米尔斯理论与t'Hooft-Polyakov 磁单极

陈童

本章讨论杨-米尔斯理论，也就是非阿贝尔规范场论。同时我们也将讨论磁单极子如何可以作为一类非阿贝尔规范场的孤立子解而自动出现，这就是所谓的t'Hooft-Polyakov磁单极。

10.1　杨-米尔斯理论

前面的章节中，我们通过将$U(1)$整体对称性局域化得到了电磁场理论，而在第三章中也讨论过更一般的$U(N)$整体对称性，将之局域化得到的理论就是所谓的非阿贝尔规范场论，因为是杨振宁和米尔斯首先作了这样的推广，所以也称作杨-米尔斯理论。将$U(1)$规范对称性推广到$U(N)$规范对称性是一件高度非平凡的事情，因为$U(1)$规范理论是一个满足线性叠加原理的线性理论，但是正如我们将要看到的，杨-米尔斯理论是非线性的！这种非线性甚至使得杨-米尔斯理论在量子层次上可以和电磁场有根本性的不同，导致出诸如夸克禁闭之类神奇的量子效应。

杨-米尔斯理论在整个现代物理中都举足轻重，它是描写强相互作用的量子色动力学的基础，也是整个粒子物理标准模型的基础。甚至通过全息对偶，它还可以用来非微扰地定义渐近AdS时空的量子引力理论。

10.1.1　$SU(N)$群

不过，由于一些群论的细节因素，人们讨论得更多的是$SU(N)$规范理论而不是$U(N)$规范理论。$SU(N)$和$U(N)$一样都是群的名字，只不过$U(N)$是所有$N\times N$幺正矩阵的集合，而$SU(N)$还额外要求这些幺正矩阵的行列式等于1。

即是说，$SU(N)$里的元素U除了可以写成如下形式以外，

$$U=\exp(i\theta^a T_a). \tag{10.1}$$

还要求其中的厄密矩阵T_a满足

$$\mathrm{tr}(T_a)=0. \tag{10.2}$$

这是因为

$$1=\det(U)=\exp\big(i\theta^a\mathrm{tr}(T_a)\big)\Leftrightarrow \mathrm{tr}(T_a)=0. \tag{10.3}$$

独立的$N\times N$厄密矩阵共有N^2个，加上额外的(10.2)式的要求，最后符合条件的独立$N\times N$厄密矩阵就共有N^2-1个，记作T_a, $a=1,2,...,N^2-1$，称之为$SU(N)$群的生成元。为了具体确定这些生成元T_a，我们还要求它们满足如下归一化条件

$$\mathrm{tr}(T_aT_b)=\frac{1}{2}\delta_{ab}. \tag{10.4}$$

记$[A,B]=AB-BA$，称作矩阵A,B的对易子。不难验证$-i[T_a,T_b]$结果依然是一个迹为零的厄密矩阵，从而必定可以写成不同T_c的线性组合。即是说，我们必定有

$$[T_a,T_b]=iC_{abc}T_c\Leftrightarrow[-iT_a,-iT_b]=C_{abc}(-iT_c). \tag{10.5}$$

这个式子称为$SU(N)$群的李代数，式中

$$C_{abc}=-2i\mathrm{tr}\big([T_a,T_b]T_c\big). \tag{10.6}$$

利用$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$不难证明，$C_{abc}$关于3个指标$a,b,c$是全反对称的。

以$SU(2)$群为例，它有3个独立的生成元，可以取为$T_a=\frac{1}{2}\sigma_a$, $a=1,2,3$，式中σ_a为3个泡利矩阵，分别为

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}. \tag{10.7}$$

由此不难验证，

$$[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}T_c \Leftrightarrow [-iT_a, -iT_b] = \epsilon_{abc}(-iT_c). \tag{10.8}$$

式中ϵ_{abc}为列维-西维塔符号。

10.1.2 协变导数与规范场强

在第四章中我们看到，为了将复标量场ϕ的$U(1)$整体对称性变成一个局域规范对称性，我们引入了协变导数

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu, \tag{10.9}$$

并要求$D_\mu\phi$在如下局域$U(1)$变换下协变

$$\phi \to \phi' = e^{i\epsilon(x)}\phi, \tag{10.10}$$

即要求$D_\mu\phi$也和ϕ一样变换

$$D_\mu\phi \to D'_\mu\phi' = e^{i\epsilon(x)}D_\mu\phi. \tag{10.11}$$

从而可知协变导数在规范变换下的变换规则为

$$\begin{aligned} D_\mu \to D'_\mu &= \partial_\mu - iA'_\mu = e^{i\epsilon(x)} \cdot D_\mu \cdot e^{-i\epsilon(x)} \\ \Rightarrow A_\mu \to A'_\mu &= A_\mu + \partial_\mu\epsilon(x). \end{aligned} \tag{10.12}$$

并且不难发现，$U(1)$规范场强$F_{\mu\nu}$可以由下式给出，

$$-iF_{\mu\nu}\phi = [D_\mu, D_\nu]\phi. \tag{10.13}$$

[注意：和上一段不同，后文中的A_μ代表杨-米尔斯理论中的规范势，$F_{\mu\nu}$代表杨-米尔斯理论中的规范场强，它们均另有定义。]

为了将以上$U(1)$规范理论的结果推广到$SU(N)$规范理论，我们引入N维复标量场Φ，它的N个分量一起构成一个N维列矢量。类似的，我们引入协变导数

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu, \quad 这里 \quad A_\mu = -iT_aA^a_\mu. \tag{10.14}$$

式中T_a为$SU(N)$群的生成元，A_μ^a是实的规范场，类似于$U(1)$规范理论中的A_μ, 因此也和$A_\mu = -iT_aA_\mu^a$一样都称作规范势。类似的，我们要求$D_\mu\Phi$在如下局域$SU(N)$规范变换下协变

$$\Phi \to \Phi' = U(x)\Phi, \quad \text{这里} \quad U(x) = \exp\big(i\epsilon_a(x)T_a\big). \tag{10.15}$$

即是说，在这样的规范变换下，

$$D_\mu\Phi \to D'_\mu\Phi' = U(x)D_\mu\Phi. \tag{10.16}$$

从而即知协变导数在$SU(N)$规范变换下的变换规则为

$$D_\mu \to D'_\mu = \partial_\mu + A'_\mu = U(x)\cdot D_\mu \cdot U^{-1}(x). \tag{10.17}$$

进而可知规范势A_μ的变换规则为

$$A_\mu \to A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1}. \tag{10.18}$$

特别的，当规范变换参数$\epsilon_a(x)$为无穷小量时，我们将变换矩阵U按照$\epsilon_a(x)$展开，可得

$$\delta A_\mu = A'_\mu - A_\mu = \partial_\mu\epsilon + [A_\mu, \epsilon]. \tag{10.19}$$

式中$\epsilon = -iT_a\epsilon_a(x)$。

仿照$U(1)$情形，我们可以定义规范场强$F_{\mu\nu} = -iT_aF_{\mu\nu}^a$ (常常也将$F_{\mu\nu}^a$称作规范场强)，

$$F_{\mu\nu}\Phi = -iT_aF_{\mu\nu}^a\Phi = [D_\mu, D_\nu]\Phi. \tag{10.20}$$

通常也将这个式子简写成

$$[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu}. \tag{10.21}$$

根据协变导数的定义即有

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \tag{10.22}$$

我们发现，相比于$U(1)$规范理论，现在的规范场强多了一个非线性项$[A_\mu, A_\nu]$。正是这一项使得杨-米尔斯理论成为一个非线性理论，而$U(1)$规范理论没有

这样的项从而是一个线性理论。当然，我们也可以写出$F^a_{\mu\nu}$的表达式，利用$SU(N)$群的李代数，不难得到

$$F^c_{\mu\nu} = \partial_\mu A^c_\nu - \partial_\nu A^c_\mu + C_{abc} A^a_\mu A^b_\nu. \tag{10.23}$$

完全类似于$U(1)$情形，我们也可以引入规范场1-形式$A = A_\mu dx^\mu$, 以及场强2-形式$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$。则根据(10.22)式不难得到，

$$F = dA + A \wedge A. \tag{10.24}$$

式中矩阵按照矩阵乘法相乘，而外微分形式则按照外代数乘法相乘。

但是，与$U(1)$情形不同，在非阿贝尔的杨-米尔斯理论中，场强张量$F_{\mu\nu}$不再是规范不变的了，根据(10.18)式，不难得到它在规范变换下的变换规则为

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1}. \tag{10.25}$$

所以，为了得到规范不变的量，我们不能仅仅考虑$F_{\mu\nu}$，而是需要考虑诸如$\mathrm{tr}\big(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\big)$ 这样的量！(注意，由于$\mathrm{tr}(T_a) = 0$，所以$\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}) = 0$) 当然，如果加入物质场$\Phi$，那我们就可以构造更多规范不变量，比如有$\Phi^\dagger\Phi$、$\Phi^\dagger D_\mu \Phi$、$(D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu \Phi$、$\Phi^\dagger F_{\mu\nu}\Phi$等等。

以上我们是将物质场Φ取为N维列矢量，它在规范变换下按照(10.15)式变换。我们称这样的物质场取$SU(N)$规范群的基础表示。但是，如果物质场本身是一个$N \times N$的矩阵，记为ϕ

$$\phi(x) = -iT_a \phi^a(x), \tag{10.26}$$

而它在规范变换的作用下变换为

$$\phi(x) \to U(x)\phi(x)U^{-1}(x), \tag{10.27}$$

那这时候我们就称物质场取$SU(N)$规范群的伴随表示。这时候，协变导数在物质场ϕ上的作用关系应该定义成

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + [A_\mu, \phi] \tag{10.28}$$

容易验证这正好使得$D_\mu\phi$协变，即在(10.18)式和(10.27)式的规范变换下，$D_\mu\phi$也按照ϕ同样的规则变换

$$D_\mu \phi \to U(x) D_\mu \phi U^{-1}(x). \tag{10.29}$$

特别的，根据这种定义，我们可以将规范势A_μ的无穷小规范变换式((10.19)式)写成

$$\delta A_\mu = D_\mu \epsilon. \tag{10.30}$$

另外，利用如下雅可比恒等式

$$[D_\mu,[D_\nu,D_\rho]]+[D_\nu,[D_\rho,D_\mu]]+[D_\rho,[D_\mu,D_\nu]]=0, \tag{10.31}$$

并结合$F_{\mu\nu}$的定义式(10.21), 即可得到

$$D_\mu F_{\nu\rho}+D_\nu F_{\rho\mu}+D_\rho F_{\mu\nu}=0, \tag{10.32}$$

通常称这为杨-米尔斯场的Bianchi 恒等式。

用规范场A_μ和取伴随表示的物质场ϕ，我们可以构造诸如$\mathrm{tr}(\phi^2)$、$\mathrm{tr}\big(\phi D_\mu\phi\big)$、$\mathrm{tr}\big(D_\mu\phi D^\mu\phi\big)$等等这样的规范不变量。特别的，$\phi^a\phi^a=-2\mathrm{tr}(\phi^2)$是规范不变的。

值得注意的是，在数学文献中，通常称A_μ为$SU(N)$向量丛上的联络，而称$F_{\mu\nu}$为$SU(N)$向量丛的曲率。相应的，1-形式A就是联络1-形式，而2-形式F就是曲率2-形式。

10.1.3　杨-米尔斯作用量

为了构造杨-米尔斯理论的作用量，我们只需要求它在上文所讨论的$SU(N)$规范变换下是不变的！

最简单的规范不变且洛伦兹不变的规范场作用量S_g取如下形式，

$$\begin{aligned} S_g &= a\int d^4x\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big)+b\int\mathrm{tr}\big(F\wedge F\big) \\ &= -a\int d^4x\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}+b\int\mathrm{tr}\big(F\wedge F\big). \end{aligned} \tag{10.33}$$

和第四章中对$U(1)$规范场的讨论一样，为了使得规范场的动能项为正，必有系数$a>0$。通常将a写成$a=\frac{1}{e^2}$，其中e就是所谓的规范场耦合常数。另外，对于S_g表达式中的第2项，注意到[1]

$$\mathrm{tr}\big(F\wedge F\big)=d\mathrm{tr}\big(A\wedge dA+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\big), \tag{10.34}$$

[1]这个式子可以直接证明，但是为了证明它，你需要同时用到矩阵求迹的轮换性质以及外代数的反交换性质。比如你可以先证明$\mathrm{tr}\big(dA\wedge A\wedge A\big)=-\mathrm{tr}\big(A\wedge dA\wedge A\big)=\mathrm{tr}\big(A\wedge A\wedge dA\big)$, 以及$\mathrm{tr}(A\wedge A\wedge A\wedge A)=-\mathrm{tr}(A\wedge A\wedge A\wedge A)=0$。

所以这是一个全微分项，它只在时空边界上对作用量有贡献，从而对规范场的场方程没有任何贡献。因此在经典场论的层次上常常可以将这一项忽略，就和第四章中忽略$U(1)$规范场作用量中的相应项一样。因此，最终我们可以将规范场的作用量S_g写成

$$S_g = \int d^4x \frac{1}{2e^2}\mathrm{tr}\big(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big) = -\int d^4x \frac{1}{4e^2}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}. \tag{10.35}$$

为了以后求规范场的场方程，我们需要将作用量S_g对A_μ进行变分。为了进行这样的变分，下面两个结果是很有用的(请读者先证明它们)：第一个结果是

$$\delta F_{\mu\nu} = D_\mu\delta A_\nu - D_\nu\delta A_\mu, \tag{10.36}$$

式中$D_\mu\delta A_\nu = \partial_\mu\delta A_\nu + [A_\mu, \delta A_\nu]$; 第二个有用的结果是，对于任何两个取伴随表示的场$\mathcal{O}_1$以及$\mathcal{O}_2$，有

$$\partial_\mu\mathrm{tr}\big(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\big) = \mathrm{tr}\big(D_\mu\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\big) + \mathrm{tr}\big(\mathcal{O}_1 D_\mu\mathcal{O}_2\big), \tag{10.37}$$

这个结果常常可以用来进行分部积分。利用这两个结果，我们不难得到

$$\delta S_g = \frac{2}{e^2}\int d^4x\mathrm{tr}\big(-D_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu\big) = \frac{1}{e^2}\int d^4x (D_\mu F^{\mu\nu})^a\delta A^a_\nu. \tag{10.38}$$

式中$D_\mu F^{\mu\nu} = -iT_a(D_\mu F^{\mu\nu})^a$。

下面考察物质场的作用量。对于物质场取$SU(N)$基础表示Φ的情形，通过将第三章中所讨论的具有$SU(N)$整体对称性的Φ场作用量中的偏导∂_μ替换成协变导数D_μ，我们可以得到Φ与$SU(N)$规范场的耦合作用量S_m为

$$S_m = -\int d^4x\Big[(D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi + \mathcal{U}(\Phi^\dagger\Phi)\Big]. \tag{10.39}$$

将S_m对A^a_μ变分，易得

$$\delta S_m = i\int d^4x\big[(D^\mu\Phi)^\dagger T_a\Phi - \Phi^\dagger T_a D^\mu\Phi\big]\delta A^a_\mu. \tag{10.40}$$

由于系统完整的作用量为$S = S_g + S_m$，所以结合(10.38)式和(10.40)式容易得到规范场的场方程

$$-\frac{1}{e^2}(D_\mu F^{\mu\nu})^a = i\big[(D^\mu\Phi)^\dagger T_a\Phi - \Phi^\dagger T_a D^\mu\Phi\big]. \tag{10.41}$$

为了得到场Φ的运动方程，我们需要将S_m分别对Φ和$\Phi^\dagger$变分。为了进行这样的变分，我们需要用到下面的结果来进行分部积分：对于任何两个取基础表示的场Φ_1和Φ_2，有

$$\partial_\mu(\Phi_1^\dagger\Phi_2) = (D_\mu\Phi_1)^\dagger\Phi_2 + \Phi_1^\dagger D_\mu\Phi_2. \tag{10.42}$$

结果不难得到，

$$D_\mu D^\mu\Phi = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\Phi^\dagger}, \tag{10.43}$$

以及这个方程的厄密共轭方程。

而如果物质场ϕ取$SU(N)$的伴随表示。则物质场作用量S_m可以取成诸如下面这样，

$$S_m = \int d^4x\Big[\frac{1}{e^2}\mathrm{tr}(D_\mu\phi D^\mu\phi) - \mathcal{U}(\phi^a\phi^a)\Big], \tag{10.44}$$

式中我们已经合适地标度化ϕ场，以使得前面出现的系数为$\frac{1}{e^2}$。注意到$\mathrm{tr}\big(A[B,C]\big) = \mathrm{tr}\big([A,B]C\big)$, 由此不难得到

$$\delta S_m = \frac{2}{e^2}\int d^4x\mathrm{tr}\big([\phi, D^\mu\phi]\delta A_\mu\big). \tag{10.45}$$

结合(10.38)式，就可以得到这时候的规范场场方程

$$D_\mu F^{\mu\nu} = [\phi, D^\nu\phi]. \tag{10.46}$$

另外，将这时候的S_m对ϕ^a变分，就能得到ϕ场的场方程

$$\frac{1}{e^2}\big(D_\mu D^\mu\phi\big)^a = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\phi^a}. \tag{10.47}$$

10.1.4 规范对称性是一种冗余

规范对称性实际上并不是一种真正的对称性，而是我们描述物理系统的方式中的冗余！这是因为，在规范场论中，我们要求所有的物理可观测量都是规范不变的！而在真正的对称性情形中，我们并不会要求所有的物理可观测量都在对称变换下保持不变，我们只是利用对称变换来将物理可观测量进行分类而已。由于要求所有的物理可观测量都规范不变，所以规范对称性只是我们用并非规范不变的量(诸如A_μ)来描述物理系统时，蕴含在这样的描述方式中的冗余。

为什么要求所有的物理可观测量都规范不变呢？在量子层次上，这是因为只有这样我们才能去除系统的一些非物理的量子态(诸如归一化模长为负数的态)，使得量子力学幺正性得以保持。在经典的层次上，这是因为：从上一小节的各种场方程可以看到，它们在规范变换下都是协变的，也即是在规范变换下都保持形式不变。因此我们每次求出场方程的一个解，就可以得到它的整个一类由规范变换相联系的解。要求物理可观测量规范不变就相当于说，这些解并不是物理上不同的解，而是解的一个等价类，规范场的场方程可以理解为是这样的规范等价类所满足的方程。

那么，为什么不直接用规范不变的量来描述物理系统呢？或者说，引入诸如规范场A_μ这样含有冗余的量来描述物理系统有什么好处呢？回答是，好处就在于这样的描述方式可以使得场论的局域性和量子力学幺正性都很明显，也可以使得理论的洛伦兹协变性很明显，而代价就是引入了冗余。为了去除这种描述方式上的冗余，我们就要求所有物理上可观测的量都规范不变。比方说对于电磁场情形，我们知道在物理上，电磁波只有两个横向偏振模式，那为什么不用一个两分量的场描写电磁场，而要用一个四分量的A_μ场描写电磁场呢？答案就是，只有这样才能使得理论的洛伦兹协变性变得明显。当然，这样的代价就是多了两个非物理的分量，而它们可以通过要求物理可观测量为规范不变的来进行去除。

10.2　t'Hooft-Polyakov磁单极

Dirac磁单极需要手动地放入电磁场理论中，特别的，狄拉克磁单极的场在原点处是奇异的。但是1974年t'Hooft 和Polyakov各自独立发现，在一类$SU(2)$规范场论中，磁单极子可以作为系统场位形的处处非奇异的孤立子解而自动出现！他们的这一发现经由Goddard, Nuyts 和Olive的重要推广，进而促成了电磁对偶观念在现代物理中的最终确立[2]。

[电磁对偶将一个以带电荷的场为基本物质场的“电”理论对偶到一个以带磁荷的场为基本物质场的“磁”理论，由于“电”理论的耦合常数e和“磁”理论的耦合常数g之间满足狄拉克量子化条件$eg = 2\pi\hbar$，当电耦合常数e很大时，磁耦合常数g就很小，因此电磁对偶可以将一个强耦合的规范理论对偶到一个弱耦合的规范理论，从而是一种研究强耦合规范理论的利

[2]值得注明的是，在现代物理中精确的电磁对偶是C. Montonen and D. Olive, Phys. Lett. 72B (1977) 117.提出的，但第1个在量子层次上实现这种对偶的例子要等到所谓的$\mathcal{N} = 4$的超对称杨-米尔斯理论。

器。]

10.2.1　有限能量场位形的拓扑分类

下面我们来介绍t'Hooft-Polyakov 磁单极解。为此我们考虑一个具有$SU(2)$规范对称性的场论系统，它的作用量为

$$S=\int d^4x\Big[\frac{1}{2e^2}\mathrm{tr}\big(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big)+\frac{1}{e^2}\mathrm{tr}(D_\mu\phi D^\mu\phi)-\frac{\lambda}{4}\big(|\phi|^2-v^2\big)^2\Big], \quad (10.48)$$

式中$|\phi|^2=\phi^a\phi^a$，$a=1,2,3$。通常称这个系统中的标量场ϕ为**希格斯场**。所以这是一个$SU(2)$规范场与取伴随表示的希格斯场耦合的系统。

仿照第四章中求规范场系统能动量张量的办法，我们可以得到这个系统的能动量张量

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu}=&\frac{1}{e^2}\big[F^{a\mu}{}_{\rho}F^{a\nu\rho}-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{a}{}_{\rho\sigma}F^{a\rho\sigma}\big]\\&+\frac{1}{e^2}(D^\mu\phi)^a(D^\nu\phi)^a+\eta^{\mu\nu}\big[\frac{1}{e^2}\mathrm{tr}(D_\mu\phi D^\mu\phi)-\frac{\lambda}{4}\big(|\phi|^2-v^2\big)^2\big].\end{aligned} \quad (10.49)$$

从而可得系统的能量密度$\mathcal{H}=T^{00}$，为

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2e^2}\big[\mathbf{E}^a\cdot\mathbf{E}^a+\mathbf{B}^a\cdot\mathbf{B}^a+(D_0\phi)^a(D_0\phi)^a+(D_i\phi)^a(D_i\phi)^a\big]+\mathcal{U}(|\phi|), \quad (10.50)$$

式中$\mathcal{U}(|\phi|)=\frac{\lambda}{4}\big(|\phi|^2-v^2\big)^2$，而“电”场$\mathbf{E}^a$与“磁”场$\mathbf{B}^a$的定义分别为

$$E^a_i=F^{a0i},\quad B^a_i=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{ajk}. \quad (10.51)$$

很显然，$\mathcal{H}\geq 0$，等号当且仅当$F^{a\mu\nu}=D^\mu\phi=\mathcal{U}(|\phi|)=0$时才成立。由于使得$\mathcal{H}=0$的场位形具有最低的能量，所以也称之为真空，或者真空场位形。因此这个系统的真空具有取零值的规范场和一个满足$|\phi|^2=v^2$的常数希格斯场。不难看出，这种ϕ取常数的真空解在完整的$SU(2)$规范变换下通常不能保持不变，而是要形成一个解的等价类。然而，由于

$$e^{-\alpha\frac{\phi}{v}}\phi e^{\alpha\frac{\phi}{v}}=\phi, \quad (10.52)$$

所以不难看出，对于取真空解的ϕ，整个真空解在$e^{-\alpha(x)\frac{\phi}{v}}$这种$U(1)$规范变换下都保持不变！传统上人们称这种现象为发生了规范对称性的自发破缺，称真空解将规范对称性从$SU(2)$破缺到了$U(1)$[3]。

[3]这种传统说法虽然有其方便之处，但也有误导之处，因为规范对称性并不是一种真的对称性，而是一种描述上的冗余，它本身并不会破缺！无非是要多考虑一个真空解的规范等价类而已。严格来说，所谓的规范对称性从$SU(2)$破缺到了$U(1)$，是指系统发生了相变，规范对称性依然是$SU(2)$，不过它在“破缺”前后是处在两个不同的相。

下面我们考察这个系统的有限能量的解。为此先把注意力集中在希格斯场ϕ上，很显然，为了使得系统的能量尽可能低，我们需要让$\mathcal{U}(|\phi|)=0$。由此可以定义所谓的希格斯真空$\mathcal{M}_H$(请和上一段讨论的真空区分开来)

$$\mathcal{M}_H=\big\{\phi:\mathcal{U}(|\phi|)=0\big\}. \tag{10.53}$$

很显然，$\mathcal{M}_H$其实就是由$\phi^a\phi^a=v^2$定义的两维球面，记为$\mathcal{M}_H=S^2$。

很明显，对于系统的有限能量场位形来说，虽然不需要它处处都处在希格斯真空上，但在空间无穷远处的场位形必须趋于希格斯真空，否则空间无穷远处$\mathcal{U}(|\phi|)$的积分就会趋于无穷大，从而使得总能量发散。三维空间的无穷远为一个两维球面，记为S^2_∞，因此对于有限能量场位形，其希格斯场在空间无穷远处就定义了一个从S^2_∞到希格斯真空的映射

$$\phi:S^2_\infty\to\mathcal{M}_H=S^2. \tag{10.54}$$

根据覆盖S^2的次数，我们可以将这个映射进行拓扑学分类，每一个拓扑类里的映射都无法连续地变化成另一个不同拓扑类里的映射，因为它们覆盖S^2的次数不同。在拓扑学中有一个专门的概念描述这种拓扑分类，称为S^2的第二同伦群，记为$\pi_2(S^2)$，根据不同的覆盖次数可知

$$\pi_2(S^2)=\mathbb{Z}. \tag{10.55}$$

给定一个到S^2的映射ϕ，其覆盖S^2的次数ν可以由下式计算，

$$\nu=\frac{1}{8\pi v^3}\int_{S^2_\infty}\epsilon_{abc}\phi^a d\phi^b\wedge d\phi^c. \tag{10.56}$$

因此，有限能量场位形可以用$\pi_2(S^2)$来进行拓扑分类！并且和真空场位形的对称性自发破缺类似，在无穷远处的希格斯真空上，规范对称性都从$SU(2)$破缺到了$U(1)$，这个$U(1)$同样可以记为

$$U(1)=e^{-\alpha(x)\frac{\phi}{v}}, \tag{10.57}$$

与真空场位形的唯一不同是，这里的ϕ不是常数，而是到希格斯真空的映射。

另一方面，我们需要注意到，当希格斯场的覆盖次数$\nu\neq 0$时，为了使得总能量有限，规范场A_μ必须取非零的场位形。这是因为，否则，假设$A_\mu=0$，则这时候协变导数就是普通导数，从而$(D_i\phi)^2=(\partial_i\phi)^2\sim$

$(\partial_\theta\phi)^2/r^2$，然而由于$\nu\neq 0$，因此这时候球坐标极角方向的导数$\partial_\theta\phi$在$S^2_\infty$上必定不为零。如此一来，场位形的总能量中必有如下项

$$\frac{1}{2e^2}\int d^3\mathbf{x}(\partial_i\phi^a)^2 \sim \frac{1}{2e^2}\int_{S^2_\infty} d^2\Omega\int drr^2\frac{(\partial_\theta\phi^a)^2}{r^2}, \tag{10.58}$$

这个积分是线性发散的，从而会使得场的总能量发散。

其实，从能量密度$\mathcal{H}$的表达式可以看出，为了使得总能量有限，我们必须在空间无穷远处打开一个非零的规范场A_μ，以抵消$D_\theta\phi$中按$1/r$降低的项，从而使得在空间无穷远处有

$$(D_\mu\phi)^a = \partial_\mu\phi^a + \epsilon_{abc}A^b_\mu\phi^c \sim 0, \tag{10.59}$$

符号$\sim$表示在空间无穷远处渐近地趋于。利用在空间无穷远处$\phi^a\phi^a \sim v^2$，从而$\phi^a\partial_\mu\phi^a\sim 0$，不难验证上面这个方程的一般解为

$$A^a_\mu \sim \frac{1}{v^2}\epsilon_{abc}\phi^b\partial_\mu\phi^c + \frac{1}{v}\phi^a a_\mu(x), \tag{10.60}$$

式中场$a_\mu(x)$是任意的。

我们可以利用上面A^a_μ场的渐近表达式计算规范场强的渐近行为，并得到其中未破缺的$U(1)$部分的规范场强为

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{\phi^a}{v}F^a_{\mu\nu} \sim f_{\mu\nu} + \frac{1}{v^3}\epsilon_{abc}\phi^a\partial_\mu\phi^b\partial_\nu\phi^c, \tag{10.61}$$

这里$f_{\mu\nu}=\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$正是我们天真地期望的$U(1)$规范场强。但是上面的结果表明，真正的未破缺$U(1)$规范对称性的场强是$\mathcal{F}_{\mu\nu}$。相比于$f_{\mu\nu}$，它多了一个非平凡的额外项。正是这个额外项使得我们的解带上了$U(1)$磁荷

$$g = \int_{S^2_\infty}\mathcal{F} = \frac{1}{2v^3}\int_{S^2_\infty}\epsilon_{abc}\phi^a d\phi^b\wedge d\phi^c = 4\pi\nu, \tag{10.62}$$

这里ν正是希格斯场在空间无穷远处覆盖希格斯真空S^2的次数。

上面的分析告诉我们，任何拓扑非平凡的有限能量场位形都要携带非零的磁荷，因此从空间无穷远处的未破缺$U(1)$规范对称性来看，这样的解就是一个磁单极子！因此通常称这样的解为t'Hooft-Polyakov 磁单极。而且，利用$SU(2)$规范场在空间无穷远处满足的方程$D_\mu F^{\mu\nu}\sim 0$, 不难证明$\mathcal{F}_{\mu\nu}$正好满足无源电磁场的麦克斯韦方程，即满足$\partial_\mu\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu(*\mathcal{F}^{\mu\nu}) = 0$，这正是一个狄拉克磁单极子在源点之外所要满足的电磁场方程。所

以t'Hooft-Polyakov 磁单极在空间足够远处看来，就像是一个狄拉克磁单极子。

我们发现，上面的磁单极子的磁荷满足量子化条件

$$\int \frac{\mathcal{F}}{2\pi} = 2\nu, \tag{10.63}$$

即，它使得$U(1)$规范场的第1陈类取偶数，而不是简单地取整数。这是因为，上述理论还允许引入取$SU(2)$群基础表示的物质场，而这种物质场的电荷$q = \frac{1}{2}$，这样正好满足$\frac{1}{2} \cdot 2\nu = \nu \in \mathbb{Z}$，正如狄拉克量子化条件所要求的那样。

10.2.2 磁单极解

到现在为止，我们还没有真正求解杨-米尔斯场以及希格斯场的场方程，并得到带磁荷的单极子解。实际上，当覆盖次数$\nu > 1$时，人们并不能期望找到相应的静态场位形解，这是因为，$\nu > 1$对应有多个磁单极，而这些磁单极之间通常都存在排斥力，从而整个系统不能保持静止。因此，为了将注意力集中在较为简单的静态解上，本小节我们将限于考虑$\nu = 1$情形。

我们可以选取$A_0 = 0$的规范，从而对于静态场位形，进一步有$D_0\phi = \partial_t\phi = 0$，以及$E_i^a = F^{a0i} = -\partial_t A_i^a = 0$。因此静态场位形的总动能为零，总能量密度完全由势能提供

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2e^2}\left[\mathbf{B}^a \cdot \mathbf{B}^a + (D_i\phi)^a(D_i\phi)^a\right] + \mathcal{U}(|\phi|). \tag{10.64}$$

下面，我们假设$\nu = 1$磁单极解的希格斯场取如下形式

$$\phi^a = \frac{x^a}{r^2}h(r), \quad 这里h(r) = \begin{cases} 0, & r \to 0 \\ vr, & r \to \infty \end{cases}. \tag{10.65}$$

其中$h(r)$在$r \to 0$处的渐近形式是为了使得能量密度中的$(D_i\phi)^a(D_i\phi)^a$项在$r \to 0$处的积分有限。而$h(r)$在无穷远处的渐近形式由$\phi^a\phi^a \sim v^2$确定，并且代入覆盖次数ν的计算公式(10.56)不难验证的确有$\nu = 1$。

相应的，我们假设规范场A_i^a取如下形式

$$A_i^a = -\epsilon_{aij}\frac{x^j}{r^2}[1 - k(r)], \quad 这里k(r) = \begin{cases} 1, & r \to 0 \\ 0, & r \to \infty \end{cases}. \tag{10.66}$$

这里$k(r)$在$r \to 0$处的渐近形式是为了使得在原点附近规范场能量密度的积分有限。而$k(r)$在$r \to \infty$处的渐近形式是通过上一小节的(10.60)式得到的。

现在，我们将上述假设代入下面的场方程

$$D_\mu F^{\mu\nu} = [\phi, D^\nu \phi], \quad \frac{1}{e^2}\big(D_\mu D^\mu \phi\big)^a = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \phi^a}, \tag{10.67}$$

结果就能得到一组有关于$h(r)$和$k(r)$的微分方程。这组微分方程通常没有解析解，但是人们不难求出它们的数值解。

10.2.3 Bogomolnyi能限以及BPS磁单极

下面我们为每一个拓扑类的有限能量场位形推导一个能量下限，称之为Bogomolnyi能限。

首先，注意到能量密度的表达式可以写成

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2e^2}\big[(\mathbf{E}^a)^2 + (\mathbf{B}^a)^2 + (D_0\phi^a)^2 + (D_i\phi^a)^2\big] + \mathcal{U}(|\phi|)\\ &= \frac{1}{2e^2}\big[(E_i^a - D_i\phi^a \sin\theta)^2 + (B_i^a - D_i\phi^a\cos\theta)^2 + (D_0\phi^a)^2\big] + \mathcal{U}(|\phi|)\\ &+ \frac{1}{e^2}\big[E_i^a D_i\phi^a \sin\theta + B_i^a D_i \phi^a \cos\theta\big].\end{aligned} \tag{10.68}$$

其次，注意到$D_iB_i = 0$(Bianchi恒等式)。从而

$$\frac{1}{v}\int d^3\mathbf{x} B_i^a D_i\phi^a = \frac{1}{v}\int d^3\mathbf{x}\partial_i(B_i^a\phi^a) = \frac{1}{v}\int_{S^2_\infty}(\mathbf{B}^a\phi^a)\cdot d\mathbf{S}, \tag{10.69}$$

结果正是系统在未破缺的$U(1)$规范场中的总磁荷g(为了强调它是磁荷，下面将改记为g_m), 即是说

$$g_m = \frac{1}{v}\int d^3\mathbf{x} B_i^a D_i\phi^a. \tag{10.70}$$

类似的，我们可以定义系统的总电荷(记为q_e)为

$$q_e = \frac{1}{v}\int d^3\mathbf{x} E_i^a D_i\phi^a. \tag{10.71}$$

根据以上关于总电荷和总磁荷的定义，以及能量密度的表达式(10.68), 容易知道系统的总能量$\mathcal{E}$满足

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = \int d^3\mathbf{x}\mathcal{H} = \frac{v}{e^2}\big[q_e\sin\theta + g_m\cos\theta\big] +\\ \frac{1}{2e^2}\int d^3\mathbf{x}\Big\{\big[(E_i^a - D_i\phi^a\sin\theta)^2 + (B_i^a - D_i\phi^a\cos\theta)^2 + (D_0\phi^a)^2\big] + \mathcal{U}(|\phi|)\Big\}.\end{aligned}$$

由于$\mathcal{U}(|\phi|) \geq 0$，所以由上面的结果不难看出

$$\mathcal{E} \geq \frac{v}{e^2}\big[q_e \sin\theta + g_m \cos\theta\big]. \tag{10.72}$$

又由于θ是任意的，所以我们总可以选一个合适的$\theta = \theta_m$ ($\tan\theta_m = \frac{q_e}{g_m}$), 使得上式右边等于$\frac{v}{e^2}\sqrt{q_e^2 + g_m^2}$。从而即有

$$\mathcal{E} \geq \frac{v}{e^2}\sqrt{q_e^2 + g_m^2}. \tag{10.73}$$

这就是所谓的Bogomolnyi能限。

很显然，仅当势函数$\mathcal{U}(|\phi|) \equiv 0$(即参数$\lambda = 0$)时，我们才可能达到Bogomolnyi能限(虽然$\mathcal{U}(|\phi|) \equiv 0$，但依然人为地要求在空间无穷远处有$\phi^a\phi^a \sim v^2$)。且在Bogomolnyi能限上必有如下BPS方程成立，

$$E_i^a = D_i\phi^a \sin\theta_m, \quad B_i^a = D_i\phi^a \cos\theta_m, \quad D_0\phi^a = 0. \tag{10.74}$$

特别的，对于t'Hooft-Polyakov磁单极子解，我们有$q_e = 0$，从而$\theta_m = 0$, 从而BPS方程简化为，

$$E_i^a = 0, \quad D_0\phi^a = 0, \quad B_i^a = D_i\phi^a. \tag{10.75}$$

这组BPS方程的解就称之为BPS磁单极。由于以上BPS方程使得总能量取极值，因此它的解必定也是这时候(即参数$\lambda = 0$时)系统场方程的解！但是，场方程是一组二阶偏微分方程，而BPS方程是一阶偏微分方程，所以求解BPS方程当然是要远为容易的。事实上，对于$\nu = 1$的磁单极子，以上BPS方程的解析解为

$$h(r) = vr\coth(vr) - 1, \quad k(r) = \frac{vr}{\sinh(vr)}. \tag{10.76}$$

这个解是Prasad 和Sommerfield 首先发现的。

势函数$\mathcal{U}(|\phi|) \equiv 0$当然是一个很特殊的要求，它通常是无法满足的。但是，在一些超对称规范场论中，的确自动就有$\mathcal{U}(|\phi|) \equiv 0$。事实上，BPS方程和BPS磁单极子最自然出现的场合就是在这样的超对称规范场论中。这时候BPS磁单极会构成所谓的超对称代数的短多重态(short multiplets), 从而是受到超对称性保护的。