目录

第八章　介质中的电磁场以及偶极辐射

陈童

本章将用统一的方法处理介质中的电磁场方程以及偶极辐射问题。本章将采用完整的国际单位制。本章中指标$i, j, k = 1, 2, 3$, 而指标$\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2, 3$。

8.1　偶极耦合

让我们从电荷体系与电磁场的偶极耦合开始。假设一个电荷为q质量为m的粒子围绕着空间坐标原点处的一个电荷为$-q$的核运动。假设记核的时空坐标为x_2^μ, 记围绕其运动的粒子的时空坐标为x_1^μ, 则根据第6章的知识可知，整个系统作用量的电磁相互作用项S_I为

$$
\begin{aligned}
S_I &= -q\int A_\mu dx_2^\mu + q\int A_\mu dx_1^\mu \\
&= \int dt\big[q\phi(x_2) - q\mathbf{A}(x_2)\cdot\dot{\mathbf{x}}_2\big] + \int dt\big[-q\phi(x_1) + q\mathbf{A}(x_1)\cdot\dot{\mathbf{x}}_1\big].
\end{aligned} \tag{8.1}
$$

假设核很重，只能在空间坐标原点附近作微小运动，同时由于核的束缚，粒子1也只能在空间坐标原点附近运动。因此我们可以将电磁势在空间坐标

原点处泰勒展开，进而将上式近似成

$$
\begin{aligned}
S_I \approx \int dt\big[q\mathbf{A}(t,0)\cdot(\dot{\mathbf{x}}_1-\dot{\mathbf{x}}_2)\big]+\int dt\big[-q\nabla\phi(t,0)\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\big]\\
+\int dt\big[q\partial_i A_j(t,0)(x_1^i\dot{x}_1^j-x_2^i\dot{x}_2^j)\big]. \qquad (8.2)
\end{aligned}
$$

将第一行右边的第一项分部积分，并丢弃边界项，即可得$\int dt\big[-q\partial_t\mathbf{A}(t,0)\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\big]$，注意到$\mathbf{E}=-\partial_t\mathbf{A}-\nabla\phi$，从而易知上面(8.2)式的第一行正好是，

$$
\int \mathbf{E}(t,0)\cdot\mathbf{p}. \qquad (8.3)
$$

式中$\mathbf{p}=q(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)$为系统的电偶极矩。

为了处理(8.2)式的第二行，我们将注意力集中在下面这样的项

$$
\int dt\partial_i A_j(t,0)x^i\dot{x}^j. \qquad (8.4)
$$

这一项处理起来比较微妙，不过，注意到最初的相互作用项$\int A_\mu dx^\mu$是规范不变的[1]，因此我们可以对上式进行如下规范变换

$$
A_j\to A_j-\partial_j\epsilon, \qquad (8.5)
$$

并选择规范变换参数为

$$
\epsilon=\frac{1}{2}\mathbf{A}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}=\frac{1}{2}A_i(t,\mathbf{x})x^i, \qquad (8.6)
$$

从而$\partial_i\epsilon=\frac{1}{2}A_i(t,x)+\frac{1}{2}(\partial_i A_j)x^j$, $\partial_j\partial_i\epsilon(t,0)=\frac{1}{2}[\partial_j A_i(t,0)+\partial_i A_j(t,0)]$。则在规范变换之后即有

$$
\begin{aligned}
\int dt\partial_i A_j(t,0)x^i\dot{x}^j &\to \int dt\big[\partial_i A_j(t,0)-\partial_j\partial_i\epsilon(t,0)\big]x^i\dot{x}^j\\
&=\frac{1}{2}\int dt\big[\partial_i A_j(t,0)-\partial_j A_i(t,0)\big]x^i\dot{x}^j\\
&=\frac{1}{2}\int dtF_{ij}(t,0)x^i\dot{x}^j=\int dtB_k(t,0)\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}x^i\dot{x}^j. \qquad (8.7)
\end{aligned}
$$

[1]在规范变换下会多出一个全微分，因此只相差一个边界项，而我们要求边界处的变分为零，从而这样的项实际上是规范不变的。详细讨论参见《经典力学新讲》第三章的相关内容。

从而易知，(8.2)式的第二行在上述规范变换之后将可以替换成

$$\int dt\big[B_k(t,0)q\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(x_1^i\dot{x}_1^j-x_2^i\dot{x}_2^j)\big]. \tag{8.8}$$

通常称

$$(\mathbf{m})_k=q\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(x_1^i\dot{x}_1^j-x_2^i\dot{x}_2^j)\Rightarrow \mathbf{m}=\frac{1}{2}(q\mathbf{x}_1\times\dot{\mathbf{x}}_1-q\mathbf{x}_2\times\dot{\mathbf{x}}_2). \tag{8.9}$$

为系统的磁偶极矩，简称磁矩。则由上可知，(8.2)式的第二行可以替换成

$$\int dt\mathbf{B}(t,0)\cdot\mathbf{m}. \tag{8.10}$$

综上可知，当电荷的运动限制在空间坐标原点附近时，我们有

$$S_I\approx\int dt\big[\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(t,0)+\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}(t,0)\big]. \tag{8.11}$$

很明显，这个式子也可以推广到空间坐标原点附近任意一个整体呈电中性的偶极子情形(比如一个原子或分子)。假设这个偶极子由多个带电粒子组成，以$\mathbf{x}_n$来表示组成这个偶极子的第n个粒子的坐标，q_n为这个粒子的电荷，m_n为它的质量，则这时候，偶极子的电偶极矩和磁偶极矩的定义将分别为

$$\mathbf{p}=\sum_n q_n\mathbf{x}_n,\quad \mathbf{m}=\frac{1}{2}\sum_n q_n\mathbf{x}_n\times\dot{\mathbf{x}}_n, \tag{8.12}$$

式中$\sum_n q_n=0$。另外，根据粒子相对于空间原点轨道角动量的定义$\mathbf{L}_n=m_n\mathbf{x}_n\times\dot{\mathbf{x}}_n$，易知

$$\mathbf{m}=\sum_n\frac{q_n}{2m_n}\mathbf{L}_n. \tag{8.13}$$

假设电磁场中有一个偶极子位于空间坐标原点，则根据上面的分析，偶极子拉格朗日量中与电磁场的相互作用项为

$$L_I=\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(t,0)+\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}(t,0). \tag{8.14}$$

对带电粒子的完整拉格朗日量进行勒让德变换，就可以得到偶极子的哈密顿量，其中与外电磁场的相互作用项H_I为

$$H_I=-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(t,0)-\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}(t,0). \tag{8.15}$$

很显然，这正是我们在电磁学和电动力学课程中熟悉的形式。只不过，相比于电动力学中的推导，这里的推导具有更大的一般性，比方说，我们这里允许电磁场随时间变化，而不限于静电场和静磁场。

很显然，上述拉格朗日量的相互作用项L_I也可以写成如下形式

$$L_I = \int d^3\mathbf{x}\big[\mathbf{P}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{M}\cdot\mathbf{B}\big], \tag{8.16}$$

式中$\mathbf{P}(x)$称为极化强度, $\mathbf{M}(x)$称为磁化强度，在上述情况下它们分别为

$$\mathbf{P}(x) = \mathbf{p}\delta^3(\mathbf{x}), \quad \mathbf{M}(x) = \mathbf{m}\delta^3(\mathbf{x}). \tag{8.17}$$

并且类似的，我们也可以得到哈密顿量的相互作用项H_I为

$$H_I = \int d^3\mathbf{x}\big[-\mathbf{P}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{M}\cdot\mathbf{B}\big]. \tag{8.18}$$

如果偶极子不是位于空间坐标原点，而是位于$\mathbf{x}_0$点，则显然

$$\mathbf{P}(x) = \mathbf{p}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{M}(x) = \mathbf{m}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0). \tag{8.19}$$

现在

$$\mathbf{p} = \sum_n q_n\mathbf{r}_n, \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2}\sum_n q_n\mathbf{r}_n\times\dot{\mathbf{r}}_n, \tag{8.20}$$

式中$\mathbf{r}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0$为组成偶极子的第$n$个粒子相对于偶极子中心的坐标，对于上面那个位于空间原点的偶极子而言，即有$\mathbf{r}_n = \mathbf{x}_n$。

如果有多个位于不同位置的偶极子，那就有

$$\mathbf{P}(x) = \sum_a \mathbf{p}_a\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_a), \quad \mathbf{M}(x) = \sum_a \mathbf{m}_a\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_a). \tag{8.21}$$

其中，$\mathbf{p}_a$,$\mathbf{m}_a$分别为a偶极子的电偶极矩和磁偶极矩，$\mathbf{x}_a$为a偶极子的位置。

另一方面，注意到本章最开始处作为推导出发点的作用量相互作用项S_I是明显协变的。因此，作偶极子近似以后的耦合项S_I必然依旧是协变的。这意味着下式必定可以写成明显协变的形式，

$$S_I = \int d^4x\big[\mathbf{P}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{M}\cdot\mathbf{B}\big]. \tag{8.22}$$

为了看出这一点，我们引入四维极化-磁化张量$M^{\mu\nu}$, 它是一个二阶反对称张量，并且满足

$$M^{0i}(x) = -cP_i(x), \quad M^{ij} = \epsilon_{ijk}M_k. \tag{8.23}$$

利用极化磁化张量$M^{\mu\nu}$，并注意到$F^{0i}=E_i/c,\ F^{ij}=\epsilon^{ijk}B_k$，不难验证偶极子与电磁场耦合的作用量$S_I$可以写成如下明显协变的形式

$$S_I=\int d^4x\big[\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}\big]=\frac{1}{2}\int d^4x\big[M_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big]. \tag{8.24}$$

8.2　介质中的电磁场

8.2.1　介质中的电磁场方程

现在考虑一块介质，它由许多分子组成，每一个分子整体都呈电中性，但是在电磁场的作用下，它们可能会被极化和磁化，也就是表现出非零的电偶极矩和非零的磁偶极矩，进而与电磁场产生偶极耦合。从上一节可以知道，相应作用量的耦合项为，

$$S_I=\frac{1}{2}\int d^4x\big[M_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\big]. \tag{8.25}$$

将这个耦合项对电磁势A_μ进行变分，在进行必要的分部积分并丢弃边界项后，即可得

$$\delta S_I=-\int d^4x(\partial_\mu M^{\mu\nu})\delta A_\nu. \tag{8.26}$$

与电流四矢量和电磁势的标准耦合形式$\delta S_I=\int d^4xJ^\nu\delta A_\nu$比较，可知极化磁化张量会诱导出一个电流四矢量$J_I^\nu$,

$$J_I^\nu=-\partial_\mu M^{\mu\nu}. \tag{8.27}$$

分别取$\nu=0,i$即可得诱导电荷密度ρ_I以及诱导电流密度$\mathbf{J}_I$，分别为

$$\rho_I=-\nabla\cdot\mathbf{P},\quad \mathbf{J}_I=\partial_t\mathbf{P}+\nabla\times\mathbf{M}. \tag{8.28}$$

在电动力学书中常常称ρ_I为极化电荷密度，称$\mathbf{J}_I$为极化磁化电流密度。

假设除了分子中的束缚电荷之外，系统中还存在一些可以自由运动的电荷，它们形成自由电流四矢量J_f^μ。J_f^μ同样要耦合到电磁场上，相应的耦合关系可以写成$\delta S_f=\int d^4xJ_f^\mu\delta A_\mu$。

记电磁场自身的作用量为$S_{em}=-\int d^4x\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, 则除了分子自身的动能和势能之外，整个系统的作用量可以写成

$$S=S_{em}+S_I+S_f. \tag{8.29}$$

将这个作用量对电磁势A_μ变分，就能得到麦克斯韦方程

$$\begin{aligned} &-\partial_\mu F^{\mu\nu}=\mu_0(J_f^\nu+J_I^\nu)\\ \Rightarrow &-\partial_\mu\big(F^{\mu\nu}-\mu_0 M^{\mu\nu}\big)=\mu_0 J_f^\nu. \end{aligned} \tag{8.30}$$

上式第二行我们代入了诱导电流的定义式(8.27)。

人们常常引入一个$H^{\mu\nu}$场，其定义为

$$H^{\mu\nu}=\frac{1}{\mu_0}F^{\mu\nu}-M^{\mu\nu}. \tag{8.31}$$

进而将(8.30)式写成

$$-\partial_\mu H^{\mu\nu}=J_f^\nu. \tag{8.32}$$

这个式子与$F_{\mu\nu}$满足的如下恒等式一起，就构成了介质中的麦克斯韦方程组

$$\partial_\mu F_{\nu\rho}+\partial_\nu F_{\rho\mu}+\partial_\rho F_{\mu\nu}=0. \tag{8.33}$$

通常还会引入电位移矢量$\mathbf{D}$以及H-场矢量$\mathbf{H}$, 其定义为,

$$H^{0i}=cD_i, \quad H^{ij}=\epsilon^{ijk}H_k. \tag{8.34}$$

代入$H_{\mu\nu}$场的定义式(8.31), 并注意到$1/(\mu_0 c)=\epsilon_0 c$, 即可知

$$\mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}, \quad \mathbf{H}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}-\mathbf{M}. \tag{8.35}$$

进而方程(8.32)又可以写成

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f, \quad \nabla\times\mathbf{H}=\partial_t\mathbf{D}+\mathbf{J}_f. \tag{8.36}$$

这组方程，再加上如下由(8.33)式给出的两个方程，就构成了通常用矢量形式写出来的介质中的麦克斯韦方程组，

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0, \quad \nabla\times\mathbf{E}=-\partial_t\mathbf{B}. \tag{8.37}$$

但是由于引入了额外的$\mathbf{D}$场和$\mathbf{H}$场，介质中的麦克斯韦方程组本身是不完备的。为了求解它们，通常还要附加如下两组关系

$$\mathbf{D}=\mathbf{D}(\mathbf{E},\mathbf{B}), \quad \mathbf{H}=\mathbf{H}(\mathbf{E},\mathbf{B}). \tag{8.38}$$

这两个方程实际上是描述介质的极化和磁化性质的方程，通常称作本构关系(consitutive relations)。这样的本构关系可以通过实验来测定，也可以通过量子力学和统计力学中关于极化(磁化)强度对电磁场的响应的计算来得出。

如果电磁场不太强且变化不太迅速，则介质对电磁场的响应一般是线性的，在均匀各向同性介质内，这种线性关系可以写成(限于介质整体静止的参考系)，

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \chi\epsilon_0\mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}\\ \mathbf{M} &= \kappa\mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}.\end{aligned} \tag{8.39}$$

χ和κ分别称作介质的极化率和磁化率，ϵ和μ则分别称作介质的介电常数和磁导率。根据上面的(8.35)式可知

$$\begin{aligned}\epsilon &= \epsilon_0\epsilon_r, \quad \epsilon_r = 1+\chi,\\ \mu &= \mu_0\mu_r, \quad \mu_r = 1+\kappa.\end{aligned} \tag{8.40}$$

这里ϵ_r和μ_r分别称作介质的相对介电常数和相对磁导率。ϵ_r通常大于等于1，但是μ_r既可以大于1也可以小于1，$\mu_r > 1$的介质称作顺磁质，$\mu_r < 1$的介质称作抗磁质。经典物理有可能解释介质是如何极化的，进而可以计算出极化率。但是，可以证明，经典物理无法正确地解释介质的磁化机制，为了正确地解释介质具体如何磁化并计算出磁化率，人们必须求助量子物理。关于极化和磁化机制的讨论和计算，初步的探讨参见《费曼物理学讲义第二卷》第32章至第37章的相关内容。

以上具有线性本构关系的介质就称作线性介质，但是，在铁电介质、铁磁介质，或者强场的情形下，线性的本构关系不再成立。

对于导电介质，则还要加上一个方程，即欧姆定律，在最简单的情形中，它取如下形式

$$\mathbf{J}_f = \sigma\mathbf{E}. \tag{8.41}$$

式中σ称作导体的电导率。

8.2.2　线性介质中电磁场的能量与动量

这一小节我们来讨论线性介质中电磁场能量和动量的守恒关系。根据

第四章的知识，电磁场本身的能量-动量张量$T^{\mu\nu}_{\rm em}$为

$$T^{\mu\nu}_{\rm em}=\frac{1}{\mu_0}\Big[F^{\mu}{}_{\rho}F^{\nu\rho}-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\Big]. \tag{8.42}$$

根据第6章的知识，我们又有

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{\rm em}=-F^{\nu}{}_{\rho}J^{\rho}, \tag{8.43}$$

式中J^ρ是总的电流四矢量，包括自由电流和极化磁化的诱导电流。现在，不妨先假设不存在自由电流，只有诱导电流，从而上式就可以写成

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{\rm em}=-F^{\nu}{}_{\rho}J^{\rho}_I. \tag{8.44}$$

将前面的(8.27)式代入(8.44)式，可得

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^{\mu\nu}_{\rm em}&=F^{\nu}{}_{\rho}\partial_\mu M^{\mu\rho}=\partial_\mu\big(F^{\nu}{}_{\rho}M^{\mu\rho}\big)-(\partial^\mu F^{\nu\rho})M_{\mu\rho}\\&=\partial_\mu\big(F^{\nu}{}_{\rho}M^{\mu\rho}\big)-\frac{1}{2}\big(\partial^\mu F^{\nu\rho}-\partial^\rho F^{\nu\mu}\big)M_{\mu\rho}\\&=\partial_\mu\big(F^{\nu}{}_{\rho}M^{\mu\rho}\big)+\frac{1}{2}\big(\partial^\mu F^{\rho\nu}+\partial^\rho F^{\nu\mu}\big)M_{\mu\rho}\end{aligned} \tag{8.45}$$

代入麦克斯韦方程组中的恒等式方程(8.33)，可得

$$\begin{aligned}\partial_\mu\big[T^{\mu\nu}_{\rm em}-M^{\mu\rho}F^{\nu}{}_{\rho}\big]&=-\frac{1}{2}(\partial^\nu F^{\mu\rho})M_{\mu\rho}\\=-\frac{1}{4}\partial^\nu\big(F^{\mu\rho}M_{\mu\rho}\big)&+\frac{1}{4}F^{\mu\rho}(\partial^\nu M_{\mu\rho})-\frac{1}{4}(\partial^\nu F^{\mu\rho})M_{\mu\rho}\end{aligned}$$

将上面的结果移一下项，即得

$$\partial_\mu\big[T^{\mu\nu}_{\rm em}-M^{\mu\rho}F^{\nu}{}_{\rho}\big]+\frac{1}{4}\partial^\nu\big(F^{\mu\rho}M_{\mu\rho}\big)=\frac{1}{4}\Big[F^{\mu\rho}(\partial^\nu M_{\mu\rho})-(\partial^\nu F^{\mu\rho})M_{\mu\rho}\Big]. \tag{8.46}$$

在上面的结果中取$\nu=0$，可得

$$\begin{aligned}&\partial_0\big(T^{00}_{\rm em}-M^{0i}F^{0}{}_{i}-\frac{1}{4}F^{\mu\rho}M_{\mu\rho}\big)+\partial_i\big(T^{i0}_{\rm em}-M^{ij}F^{0}{}_{j}\big)\\&=-\frac{1}{2}\Big[\mathbf{E}\cdot(\partial_0\mathbf{P})-(\partial_0\mathbf{E})\cdot\mathbf{P}+\mathbf{B}\cdot(\partial_0\mathbf{M})-(\partial_0\mathbf{B})\cdot\mathbf{M}\Big].\end{aligned} \tag{8.47}$$

对于线性介质，$\mathbf{P}$与$\mathbf{E}$成正比，$\mathbf{M}$与$\mathbf{B}$成正比，从而等式的右边等于零，从而即有守恒方程

$$\partial_0\big(T^{00}_{\rm em}-M^{0i}F^{0}{}_{i}-\frac{1}{4}F^{\mu\rho}M_{\mu\rho}\big)+\partial_i\big(T^{i0}_{\rm em}-M^{ij}F^{0}{}_{j}\big)=0. \tag{8.48}$$

根据第四章的相关讨论，可知

$$T^{00}_{\text{em}} = \frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2, \quad T^{i0} = \frac{1}{\mu_0 c}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_i. \tag{8.49}$$

进而不难算得

$$T^{00}_{\text{em}} - M^{0i}F^0{}_i - \frac{1}{4}F^{\mu\rho}M_{\mu\rho} = \frac{1}{2}\big[\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\big] \tag{8.50}$$

以及

$$T^{i0}_{\text{em}} - M^{ij}F^0{}_j = \frac{1}{c}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_i. \tag{8.51}$$

从而守恒方程(8.48)可以写作

$$\partial_t\big[\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\big] + \nabla\cdot[\mathbf{E}\times\mathbf{H}] = 0. \tag{8.52}$$

上面这一结果清楚地告诉我们，在线性介质中，我们可以定义有效的电磁场能量密度$\mathcal{H}$为

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\big[\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\big], \tag{8.53}$$

同时可以定义有效的能流密度$\mathbf{S}$为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}. \tag{8.54}$$

它们满足局域的能量守恒方程

$$\partial_t\mathcal{H} + \nabla\cdot\mathbf{S} = 0. \tag{8.55}$$

类似的，通过在方程(8.46)中取$\nu = i$，我们可以讨论线性介质中的局域动量守恒方程。具体的讨论还是留给读者自行练习吧。

8.3　偶极子的场

这一节求解单个偶极子所产生的电磁场，进而讨论偶极辐射。

8.3.1　静态偶极子的场

假设给定一个静态偶极子，其电偶极矩$\mathbf{p}$和磁偶极矩$\mathbf{m}$均为不随时间变化的定值，我们想求解这个静态偶极子所产生的静态电磁场。对于这样的静态问题，其拉格朗日量将仅仅依赖于场位形，而不依赖于场位形对时间的导数，因此这时候最小作用量原理就等价于拉格朗日量对场位形的变分取极值这一原理。

假设这个偶极子位于空间坐标原点，则根据(8.16)式可知，系统的拉格朗日量可以写成

$$L = \int d^3\mathbf{x}\big[\frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2 + \delta^3(\mathbf{x})\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} + \delta^3(\mathbf{x})\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}\big]. \tag{8.56}$$

由于考察的是静态场位形，所以$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$可以分别写成

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}. \tag{8.57}$$

代入拉格朗日量(8.56)，即有

$$L = \int d^3\mathbf{x}\big[\frac{1}{2}\epsilon_0(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{A})^2 - \delta^3(\mathbf{x})\mathbf{p}\cdot\nabla\phi + \delta^3(\mathbf{x})\mathbf{m}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})\big].$$

根据拉格朗日量取极值，将上式对ϕ以及$\mathbf{A}$变分，即可得方程

$$\epsilon_0\nabla^2\phi = \mathbf{p}\cdot\nabla\delta^3(\mathbf{x}) \tag{8.58}$$

$$-\frac{1}{\mu_0}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \mathbf{m}\times\nabla\delta^3(\mathbf{x}). \tag{8.59}$$

取如下库伦规范

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = 0, \tag{8.60}$$

从而即可把方程(8.59)改写成

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{m}\times\nabla\delta^3(\mathbf{x}). \tag{8.61}$$

下面要做的就是求解方程(8.58)和方程(8.61)。这两个方程看起来有点复杂，但只要注意到

$$-\nabla^2\big(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\big) = \delta^3(\mathbf{x}), \tag{8.62}$$

则我们就能直接写出(8.58)和(8.61)的解，

$$\begin{aligned}\phi &= -\frac{1}{\epsilon_0}\mathbf{p}\cdot\nabla\big(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\big) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\\ \mathbf{A} &= -\mu_0\mathbf{m}\times\nabla\big(\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\big) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}.\end{aligned}\tag{8.63}$$

将这个结果代入(8.57)式，即可得

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}-\mathbf{p}}{|\mathbf{x}|^3}\\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}-\mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3}.\end{aligned}\tag{8.64}$$

式中单位矢量$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$。这个结果当然是电动力学中熟知的结果。

8.3.2 偶极辐射

还是考察位于空间坐标原点的这个偶极子，不过现在，我们假设其电偶极矩和磁偶极矩都随时间变化，分别记为$\mathbf{p}(t),\mathbf{m}(t)$。那这时候它就会产生电磁波辐射，相应的就要求解麦克斯韦方程$-\partial_\mu F^{\mu\nu}=\mu_0 J_I^\nu$ (J_I^μ为偶极子的诱导电流四矢量)。根据上一章的知识，这个方程可以在洛伦兹规范中用推迟势来求解。因此我们可以根据学过的推迟势公式算出洛伦兹规范下的电磁势A_μ, 进而算出偶极子辐射出来的电磁场强。为了方便参考，我们将推迟势公式重写如下

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\mathbf{x}'\frac{\rho(\mathbf{x}',t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}.\\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\mathbf{x}'\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}',t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}.\end{aligned}\tag{8.65}$$

当然，现在代入上面(8.65)式的电流四矢量应该是偶极子的诱导电流四矢量，将$\mathbf{P}=\mathbf{p}(t)\delta^3(\mathbf{x}), \mathbf{M}=\mathbf{m}(t)\delta^3(\mathbf{x})$代入(8.28)式，可以算得

$$\begin{aligned}&\rho_I(\mathbf{x},t) = -\mathbf{p}(t)\cdot\nabla\delta^3(\mathbf{x}),\\ &\mathbf{J}_I(\mathbf{x},t) = \dot{\mathbf{p}}(t)\delta^3(\mathbf{x})-\mathbf{m}(t)\times\nabla\delta^3(\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{8.66}$$

将这个结果代入上面的推迟势公式，就可以算得电磁势A_μ。比方说我们

将$\rho_I(\mathbf{x},t)$的结果代入推迟势公式，即有(下式中∇'表示对$\mathbf{x}'$求梯度)

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\mathbf{x}'\frac{-\mathbf{p}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)\cdot\nabla'\delta^3(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\mathbf{x}'\delta^3(\mathbf{x}')\nabla'\cdot\Big[\frac{\mathbf{p}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\Big]\\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\mathbf{x}'\delta^3(\mathbf{x}')\nabla\cdot\Big[\frac{\mathbf{p}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\Big]\\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\cdot\Big[\frac{\mathbf{p}(t-|\mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{x}|}\Big].\end{aligned}\tag{8.67}$$

类似的，可以求得

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi|\mathbf{x}|}\dot{\mathbf{p}}(t-|\mathbf{x}|/c) + \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\Big[\frac{\mathbf{m}(t-|\mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{x}|}\Big].\tag{8.68}$$

记$\mathbf{p}(t-|\mathbf{x}|/c)=[\mathbf{p}]$, $\mathbf{m}(t-|\mathbf{x}|/c)=[\mathbf{m}]$, 并注意到

$$\partial_i[p_j] = -[\dot{p}_j]\partial_i\big(\frac{|\mathbf{x}|}{c}\big) = -\frac{1}{c}n_i[\dot{p}_j].\tag{8.69}$$

式中$n_i=(\mathbf{n})_i=\frac{x_i}{|\mathbf{x}|}$，以及完全类似的，

$$\partial_i[m_j] = -\frac{1}{c}n_i[\dot{m}_j].\tag{8.70}$$

则根据$\mathbf{E}=-\nabla\phi-\partial_t\mathbf{A}$, $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$我们就能算出偶极子的电磁场强。比如说，假设我们仅关心$|\mathbf{x}|$足够大足够远处的场，则保留到$1/|\mathbf{x}|$阶为止($1/|\mathbf{x}|^2$阶及更高的$1/|\mathbf{x}|^3$阶均忽略)算出来的电场强度如下

$$\begin{aligned}E_i &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{n_in_j[\ddot{p}_j]-[\ddot{p}_i]}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mu_0}{4\pi c}\epsilon_{ijk}\frac{n_j[\ddot{m}_k]}{|\mathbf{x}|}\\ \Rightarrow \mathbf{E} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{n}\big(\mathbf{n}\cdot[\ddot{\mathbf{p}}]\big)-[\ddot{\mathbf{p}}]}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\mathbf{n}\times[\ddot{\mathbf{m}}]}{|\mathbf{x}|}.\end{aligned}\tag{8.71}$$

类似的，我们也能算出磁场，为

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\mathbf{n}\times[\ddot{\mathbf{p}}]}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mu_0}{4\pi c^2}\frac{\mathbf{n}\big(\mathbf{n}\cdot[\ddot{\mathbf{m}}]\big)-[\ddot{\mathbf{m}}]}{|\mathbf{x}|}.\tag{8.72}$$

这个结果与电动力学教材上给出的结果完全一致，比如与Andrew Zangwill的Modern Electrodynamics第20章20.7节给出的结果一致。相比于电动

力学书上的推导，这里的推导方法好处在于，原则上可以算出偶极子的精确的电磁场。至于偶极辐射功率等等结果的计算也请读者参考Zangwill这本书，我们这里不再赘述。

这一小节以及上一小节给出来的偶极子场均体现一种电磁对偶性，具体来说即是，在$\epsilon_0 = \mu_0 = c = 1$的自然单位制中，这两小节的最终结果均在如下变换下保持不变

$$\mathbf{E} \to \mathbf{B}, \quad \mathbf{p} \to \mathbf{m}, \quad \mathbf{B} \to -\mathbf{E}, \quad \mathbf{m} \to -\mathbf{p}. \tag{8.73}$$

我们将在下一章中进一步讨论麦克斯韦方程组的这种电磁对偶性质。