

目录

第七章 运动电荷的电磁场	2
7.1 延迟格林函数和推迟势	2
7.2 带电粒子的电磁场	7
7.2.1 Lienard-Wiechert势	7
7.2.2 Heaviside-Feynman公式	9
7.2.3 运动电荷的电磁辐射	11
7.2.4 运动电荷的辐射功率	12
7.3 低速带电粒子体系的有效作用量	15

第七章 运动电荷的电磁场

陈童

运动电荷会产生电磁场，本章就是要通过求解麦克斯韦方程，求出这个电磁场。和本书其它章节一样，本章也主要采用 $c = 1$ 单位制，但与此同时，我们将保留公式中真空磁导率以及真空介电常数的符号，当然，由于 $c = 1$ ，在恢复光速前即有 $\mu_0 = 1/\epsilon_0$ 。另外，在各种推导结束以后，我们也常常通过恢复光速 c 来得到国际单位制中的相应公式。

7.1 延迟格林函数和推迟势

为了求解运动电荷所产生的电磁场，我们需要求解麦克斯韦方程。我们知道，在洛伦兹规范 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 之下，麦克斯韦方程等价于如下波动方程，

$$-\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) = \mu_0 J^\mu(x). \quad (7.1)$$

式中 J^μ 为电流四矢量。为了求解这个方程，我们定义格林函数 $G(x, x')$ ，它满足如下方程

$$-\partial_\nu \partial^\nu G(x, x') = \delta^4(x - x') \quad (7.2)$$

式中 $x = (t, \mathbf{x}), x' = (t', \mathbf{x}')$ 为两个四维时空点， $\delta^4(x - x') = \delta(t - t')\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ 。利用格林函数，我们可以得到方程(7.1)的解，

$$A^\mu(x) = \mu_0 \int d^4 x' G(x, x') J^\mu(x'). \quad (7.3)$$

注意到方程(7.2)在时空坐标平移下是不变的，从而即有 $G(x, x') = G(x - x')$ ，进而就可以将(7.2)式改写成

$$-\partial_\nu \partial^\nu G(x) = \delta^4(x). \quad (7.4)$$

而方程(7.1)的解就可以写成，

$$A^\mu(x) = \mu_0 \int d^4x' G(x - x') J^\mu(x'). \quad (7.5)$$

利用流守恒方程 $\partial_\mu J^\mu = 0$ 以及关系式 $\partial_\mu G(x - x') = -\partial'_\mu G(x - x')$ (式中 $\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu}$)，很容易验证这样的解一定满足洛伦兹规范。验证过程如下，

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu(x) &= \mu_0 \int d^4x' \partial_\mu G(x - x') J^\mu(x') \\ &= -\mu_0 \int d^4x' \partial'_\mu G(x - x') J^\mu(x') \\ &= \mu_0 \int d^4x' G(x - x') \partial'_\mu J^\mu(x') = 0, \end{aligned} \quad (7.6)$$

式中第3个等号我们进行了分部积分，并注意到 J^μ 在无穷远处等于零，从而扔掉了分部积分的边界项，同时，式中最后一个等号我们利用了流守恒方程 $\partial_\mu J^\mu = 0$ 。

为了求出格林函数 $G(x)$ 的具体表达式，我们对(7.4)式进行傅里叶变换，注意到 $\delta^4(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x}$ ，式中 $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ ， $k \cdot x = k_\mu x^\mu = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ ，并令

$$G(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k) e^{ik \cdot x}, \quad (7.7)$$

进而即可得到

$$k^2 \tilde{G}(k) = 1 \Rightarrow \tilde{G}(k) = \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\mathbf{k}^2 - \omega^2} = -\frac{1}{\omega^2 - |\mathbf{k}|^2}. \quad (7.8)$$

从而

$$G(x) = - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - |\mathbf{k}|^2}. \quad (7.9)$$

我们可以将变量 ω 延拓到整个复平面来看待(7.9)这个积分。很明显，被积函数 $\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - |\mathbf{k}|^2}$ 在 ω 复平面上有两个极点，分别是 $\omega = \pm|\mathbf{k}|$ 。而对 ω 的积

分是沿着实轴进行的，积分路径会经过这两个极点，因此为了让积分收敛，就必须给出积分路径在极点附近如何绕过的方案。这样的方案并非唯一，不同的绕行方案将给出不同的格林函数。但在经典场论中，最重要的绕行方案是从极点的上方绕过，如图(7.1)所示。这种绕行方案给出的格林函数就是所谓的延迟格林函数(retarded Green's function)，记作 $G_{\text{ret}}(x) = G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t)$ ，这个函数的行为取决于 $t > 0$ 还是 $t < 0$ 。

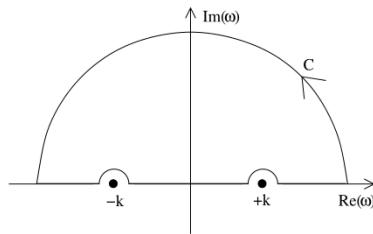


图 7.1: $t < 0$ 时延迟格林函数在复 ω 平面的积分回路。

我们首先来看 $t < 0$ 情形。这时候被积函数中的指数因子 $e^{-i\omega t}$ 显然满足

$$\omega \rightarrow i\infty : e^{-i\omega t} \rightarrow 0. \quad (7.10)$$

因此我们可以将 ω 的积分路径在复上半平面上添加一个无穷远半圆，如图(7.1)所示，因为在这个无穷远半圆上，被积函数等于零，从而对积分是没有贡献的。但这样一来，我们就使得 ω 的积分路径在复 ω 平面上形成了一个闭合围道，从而可以利用围道积分来计算积分结果。很明显，由于积分路径从极点的上方绕过，所以这个闭合围道并不包围任何极点，从而围道积分的结果必定为零，即

$$G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad t < 0. \quad (7.11)$$

反过来，当 $t > 0$ 时，有

$$\omega \rightarrow -i\infty : e^{-i\omega t} \rightarrow 0. \quad (7.12)$$

从而我们只能给积分路径在复下半平面上添加无穷远处的半圆，从而在复下半平面形成闭合围道。那这时候积分围道将同时包围两个极点，围道积分的结果将给出

$$\oint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - |\mathbf{k}|^2} = \frac{1}{2\pi} (-2\pi i) \left[\frac{e^{-i|\mathbf{k}|t}}{2|\mathbf{k}|} - \frac{e^{i|\mathbf{k}|t}}{2|\mathbf{k}|} \right]. \quad (7.13)$$

代入(7.9)式，即有

$$\begin{aligned} G(x) &= - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - |\mathbf{k}|^2} \\ &= i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} [e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-|\mathbf{k}|t)} - e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+|\mathbf{k}|t)}]. \end{aligned} \quad (7.14)$$

下面以 \mathbf{x} 的方向为 z 方向，在3维 \mathbf{k} 空间引入球坐标，并记 $r = |\mathbf{x}|$ ，即有

$$\begin{aligned} i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-|\mathbf{k}|t)} &= i \frac{1}{(2\pi)^3} (2\pi) \int_0^{+\infty} |\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}| \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{1}{2|\mathbf{k}|} e^{i|\mathbf{k}|r \cos \theta} e^{-i|\mathbf{k}|t} \\ &= i \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} |\mathbf{k}| d|\mathbf{k}| \frac{1}{i|\mathbf{k}|r} [e^{i|\mathbf{k}|r} - e^{-i|\mathbf{k}|r}] e^{-i|\mathbf{k}|t} \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_0^{+\infty} d|\mathbf{k}| [e^{i|\mathbf{k}|(r-t)} - e^{-i|\mathbf{k}|(r+t)}]. \end{aligned} \quad (7.15)$$

类似的，也有

$$i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+|\mathbf{k}|t)} = \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_0^{+\infty} d|\mathbf{k}| [e^{i|\mathbf{k}|(r+t)} - e^{-i|\mathbf{k}|(r-t)}]. \quad (7.16)$$

将(7.15)式和(7.16)式代入(7.14)式，即有

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_0^{+\infty} d|\mathbf{k}| [e^{i|\mathbf{k}|(r-t)} - e^{-i|\mathbf{k}|(r+t)} - e^{i|\mathbf{k}|(r+t)} + e^{-i|\mathbf{k}|(r-t)}] \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\mathbf{k}| [e^{i|\mathbf{k}|(r-t)} - e^{-i|\mathbf{k}|(r+t)}] \\ &= \frac{1}{4\pi r} [\delta(t-r) - \delta(t+r)] = \frac{1}{2\pi} \delta(t^2 - r^2) \\ &= \frac{1}{2\pi} \delta(x^2). \end{aligned} \quad (7.17)$$

即仅仅在光锥 $x^2 = 0$ 上，延迟格林函数才非零。

刚才我们计算的是 $t > 0$ 情形，现在将 $t < 0$ 和 $t > 0$ 综合起来，即有

$$G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \delta(x^2) \theta(t). \quad (7.18)$$

其中 $\theta(t)$ 是所谓的阶跃函数，当 $t > 0$ 时， $\theta(t) = 1$ ，当 $t < 0$ 时 $\theta(t) = 0$ 。
(7.18)式是延迟格林函数的明显协变的形式，它在正洛伦兹变换下明显保持不变。但实际上，当 $t > 0$ 时，必有(7.17)式中的 $\delta(r+t) = 0$ ，从而延迟格林函数也可以写成如下不明显协变的形式

$$G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t-r). \quad (7.19)$$

利用延迟格林函数，即可得到

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \mu_0 \int d^4x' G_{\text{ret}}(x - x') J^\mu(x') \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \int d^4x' \delta((x - x')^2) \theta(t - t') J^\mu(x') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^4x' \frac{\delta(t - t' - R)}{R} J^\mu(x'). \end{aligned} \quad (7.20)$$

式中

$$\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad R = |\mathbf{R}|. \quad (7.21)$$

我们也常常将(7.20)式中的时间变量 t' 先积掉，进而得到

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{J^\mu(\mathbf{x}', t - R)}{R} \quad (7.22)$$

从(7.20)式和(7.22)式可以清楚地看到， t 时刻的势场 A^μ 取决于更早的 $t - R$ 时刻的源，因此这两个式子又叫做**推迟势公式**。推迟的原因就在于场的传播需要时间， $t - R$ 时刻 \mathbf{x}' 点源的运动情况经过时间 R 刚好在 t 时刻影响 \mathbf{x} 点的势场。

其它格林函数

假如在计算(7.9)式的积分时我们让积分路径从两个极点的下方绕过，如图(7.2)所示，相应的积分结果将给出另一种可能的格林函数，即超前格林函数(advanced Green's function) $G_{\text{adv}}(\mathbf{x}, t)$ ，为

$$G_{\text{adv}}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2\pi} \delta(x^2) \theta(-t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t + r) \theta(-t). \quad (7.23)$$

利用超前格林函数，我们就能得到所谓的超前势，

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{J^\mu(\mathbf{x}', t + R)}{R}. \quad (7.24)$$

超前势同样是方程(7.1)的解，但是这种解显然是非物理的，因为它 t 时刻的场值取决于未来的 $t + R$ 时刻的源分布，这显然违反了因果律。因此唯一的合理的处理就是丢弃这种可能性。

最后，在量子场论中，(7.9)式的积分围道还有另一种可能性，即从两个极点中左边极点的下方绕过，但却从右边极点的上方绕过，如图(7.3)所示，这时候相应的格林函数就称作费曼格林函数，或者称作费曼传播子。这种格林函数在量子场论中是最基本的，但它没有经典物理解释，从而当我们仅仅考虑经典场论时也应该丢弃它。

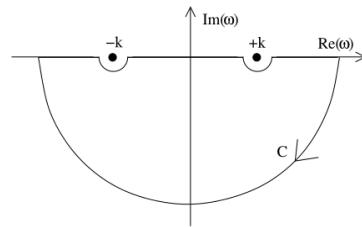
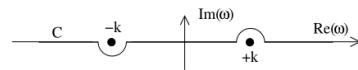
图 7.2: $t > 0$ 时超前格林函数在复 ω 平面的积分回路。

图 7.3: 费曼传播子。

7.2 带电粒子的电磁场

7.2.1 Lienard-Wiechert 势

现在考察一个带电的运动粒子，设电量为 q ，粒子的世界线为 $\tilde{x}^\mu(\tau) = (\tilde{t}(\tau), \tilde{\mathbf{x}}(\tau))$ ，其中 τ 为世界线的参数，通常就取为粒子的固有时。记粒子的速度为 $\mathbf{v}(t) = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt}$ ，则这个粒子贡献的电荷密度 $\rho(\mathbf{x}, t)$ 以及电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ 分别为，

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, t) &= q\delta^3(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t)) \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= q\mathbf{v}(t)\delta^3(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(t)).\end{aligned}\tag{7.25}$$

或者也可以写成明显协变的形式

$$J^\mu(x) = q \int d\tau \frac{d\tilde{x}^\mu(\tau)}{d\tau} \delta^4(x - \tilde{x}(\tau)).\tag{7.26}$$

在上式中将变量 τ 代换成 \tilde{t} 就可以得到前面不明显协变的电荷密度以及电流密度。

将(7.26)式代入(7.20)式，就可以得到这个运动电荷产生的场

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \frac{\mu_0 q}{2\pi} \int d\tau \int d^4x' \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau} \delta^4(x' - \tilde{x}(\tau)) \delta((x - x')^2) \theta(t - t') \\ &= \frac{\mu_0 q}{2\pi} \int d\tau \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau} \delta((x - \tilde{x})^2) \theta(t - \tilde{t}) \\ &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int d\tau \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau} \frac{\delta(t - \tilde{t} - R)}{R}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

式中 $\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}(\tau)$ 为从带电粒子到场点 \mathbf{x} 的位置矢量。在(7.27)式中将变量 τ 代换成变量 \tilde{t} ，即有(注意到在光速 $c = 1$ 的单位制中有 $\mu_0 = 1/\epsilon_0$)

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\tilde{t} \frac{\delta(t - \tilde{t} - R(\tilde{t}))}{R(\tilde{t})} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int d\tilde{t} \mathbf{v}(\tilde{t}) \frac{\delta(t - \tilde{t} - R(\tilde{t}))}{R(\tilde{t})}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

式中 $\mathbf{v}(\tilde{t}) = d\tilde{\mathbf{x}}/d\tilde{t}$ 。式中的 δ 函数将时间 \tilde{t} 约束为满足下式

$$t - \tilde{t} - R(\tilde{t}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{t} = t - R(\tilde{t}). \quad (7.29)$$

满足这个式子的时间 \tilde{t} 称作迟缓时间(retarded time)，通常记为 t_{ret} ，很显然它是 t 时刻到达 \mathbf{x} 点的光从带电粒子发出的时间。

利用

$$\delta(t - \tilde{t} - R(\tilde{t})) = \frac{\delta(\tilde{t} - t_{\text{ret}})}{\left| \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}(t - \tilde{t} - R(\tilde{t})) \right|}, \quad (7.30)$$

并注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}(\tilde{t} + R(\tilde{t}) - t) &= 1 + \frac{dR(\tilde{t})}{d\tilde{t}} \\ &= 1 - \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\tilde{t}} \cdot \nabla R = 1 - \mathbf{v}(\tilde{t}) \cdot \mathbf{n}(\tilde{t}). \end{aligned} \quad (7.31)$$

式中 $\mathbf{n}(\tilde{t}) = \nabla R(\tilde{t}) = \frac{\mathbf{R}}{R}$ 为从带电粒子指向场点的单位矢量，通常称 $1 - \mathbf{v}(\tilde{t}) \cdot \mathbf{n}(\tilde{t})$ 为多普勒因子。利用这些结果，我们很容易将(7.28)式的积分算出来，得到

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}} \right]_{\text{ret}} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{q\mathbf{v}}{R - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}} \right]_{\text{ret}}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

其中下标ret表示方括号里的量在迟缓时刻 t_{ret} 计算。(7.32)就是所谓的Lienard-Wiechert势。

为了得到运动带电粒子所产生的电场 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ 和磁场 $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$, 我们利用

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (7.33)$$

代入带电粒子的标势和矢势(即(7.28)式), 即有

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\nabla \int d\tilde{t} \frac{\delta(t - \tilde{t} - R(\tilde{t}))}{R(\tilde{t})} - \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int d\tilde{t} \mathbf{v}(\tilde{t}) \frac{\delta(t - \tilde{t} - R(\tilde{t}))}{R(\tilde{t})}.$$

利用 $\nabla R = \mathbf{n}$, $\nabla(\frac{1}{R}) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$, 即有

$$\nabla\delta(t - \tilde{t} - R(\tilde{t})) = (-\nabla R)\frac{\partial}{\partial t}\delta(t - \tilde{t} - R(\tilde{t})) = -\mathbf{n}(\tilde{t})\frac{\partial}{\partial t}\delta(t - \tilde{t} - R(\tilde{t})).$$

代入 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ 的表达式, 即有

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\int d\tilde{t} \delta(t - \tilde{t} - R(\tilde{t})) \frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{\partial}{\partial t} \int d\tilde{t} \delta(t - \tilde{t} - R(\tilde{t})) \frac{\mathbf{n} - \mathbf{v}}{R} \right].$$

将对 \tilde{t} 的积分积出来, 即有

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})R^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{n} - \mathbf{v}}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})R} \right]_{\text{ret}}. \quad (7.34)$$

类似的, 也可以得到磁场的表达式, 为

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{n}}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})R^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{n}}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})R} \right]_{\text{ret}}. \quad (7.35)$$

7.2.2 Heaviside-Feynman公式

以上关于带电粒子电场强度和磁场强度的结果虽然精确成立, 但相关的公式应用起来却不够方便。为了得到更好用的表达式, 我们将迟缓时间的定义式 $t_{\text{ret}} = t - R(t_{\text{ret}})$ 对 t_{ret} 求导, 从而得到

$$\frac{dt}{dt_{\text{ret}}} = 1 + \frac{dR_{\text{ret}}}{dt_{\text{ret}}}. \quad (7.36)$$

再利用 $\frac{dR}{dt} = -\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla R = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, 即有

$$\frac{dt}{dt_{\text{ret}}} = [1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]_{\text{ret}}. \quad (7.37)$$

类似的，也可以得到

$$\frac{dt_{\text{ret}}}{dt} = 1 - \frac{dR_{\text{ret}}}{dt} = \frac{1}{[1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]_{\text{ret}}}. \quad (7.38)$$

而且也有

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{ret}} &= -\frac{d\mathbf{R}_{\text{ret}}}{dt_{\text{ret}}} = -[1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]_{\text{ret}} \frac{d\mathbf{R}_{\text{ret}}}{dt} \\ &\Rightarrow \left[\frac{\mathbf{v}}{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}} \right]_{\text{ret}} = -\frac{d\mathbf{R}_{\text{ret}}}{dt}. \end{aligned} \quad (7.39)$$

利用(7.38)式和(7.39)式消去(7.34)式中的 $\frac{1}{[1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]_{\text{ret}}}$ 和 $\left[\frac{\mathbf{v}}{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}} \right]_{\text{ret}}$ ，即可以得到

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{n}_{\text{ret}}}{R_{\text{ret}}^2} \left(1 - \frac{dR_{\text{ret}}}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{n}_{\text{ret}}}{R_{\text{ret}}} \left(1 - \frac{dR_{\text{ret}}}{dt} \right) + \frac{1}{R_{\text{ret}}} \frac{d\mathbf{R}_{\text{ret}}}{dt} \right] \right\}. \quad (7.40)$$

经过一些运算就可以整理得

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right]_{\text{ret}} + R_{\text{ret}} \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{d^2 \mathbf{n}_{\text{ret}}}{dt^2} \right\}. \quad (7.41)$$

这个结果就是所谓的Heaviside-Feynman公式，这个公式的第一项就是库伦场项，第二项是时间延迟带来的修正项，第三项则可以描述运动电荷的电磁波辐射。通过简单的量纲分析，我们容易恢复Heaviside-Feynman公式中的光速 c ，进而得到

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{R_{\text{ret}}}{c} \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \mathbf{n}_{\text{ret}}}{dt^2} \right\}. \quad (7.42)$$

上面得到的Heaviside-Feynman公式是关于电场的，为了得到磁场的相应公式，我们将 $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ 对 t 求导，并利用 $\frac{dR}{dt} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ ，即可得

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{1}{R} [-\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})] = \frac{1}{R} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}). \quad (7.43)$$

进而即有

$$\mathbf{n}_{\text{ret}} \times \frac{d\mathbf{n}_{\text{ret}}}{dt} = \mathbf{n}_{\text{ret}} \times \frac{d\mathbf{n}_{\text{ret}}}{dt_{\text{ret}}} \frac{dt_{\text{ret}}}{dt}. \quad (7.44)$$

代入(7.38)式和(7.43)式，即可得

$$\mathbf{n}_{\text{ret}} \times \frac{d\mathbf{n}_{\text{ret}}}{dt} = \left[\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{n}}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})R} \right]_{\text{ret}}. \quad (7.45)$$

将这个结果应用到(7.35)式，即得

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \left[\frac{\mathbf{n}}{R} \right]_{\text{ret}} \times \frac{d\mathbf{n}_{\text{ret}}}{dt} + \mathbf{n}_{\text{ret}} \times \frac{d^2\mathbf{n}_{\text{ret}}}{dt^2} \right\}. \quad (7.46)$$

这就是关于带电粒子磁场的Heaviside-Feynman公式，恢复光速 c ，即有

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \left[\frac{\mathbf{n}}{R} \right]_{\text{ret}} \times \frac{d\mathbf{n}_{\text{ret}}}{dt} + \frac{\mathbf{n}_{\text{ret}}}{c} \times \frac{d^2\mathbf{n}_{\text{ret}}}{dt^2} \right\}. \quad (7.47)$$

比较(7.42)式和(7.47)式，容易看出

$$\mathbf{B} = \mathbf{n}_{\text{ret}} \times \mathbf{E}/c. \quad (7.48)$$

除了公式本身非常简洁好记以外，Heaviside-Feynman公式的好处还在于，它可用于直观地讨论运动电荷的电磁辐射，关于这方面的内容，请读者阅读费曼物理学讲义第一卷第34章。这里我们想指出的是，Heaviside-Feynman公式用于讨论场的频谱分析非常方便。比方说，对于运动电荷电场的辐射场部分 \mathbf{E}_{rad} ，

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{d^2\mathbf{n}_{\text{ret}}}{dt^2}, \quad (7.49)$$

记其傅里叶变换为 $\tilde{\mathbf{E}}_{\text{rad}}(\omega)$ ，

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{rad}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathbf{E}_{\text{rad}}(t) e^{i\omega t}, \quad (7.50)$$

则很容易可以得到

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{\text{rad}}(\omega) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{d^2\mathbf{n}_{\text{ret}}}{dt^2} e^{i\omega t} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathbf{n}_{\text{ret}} \exp(i\omega t). \end{aligned} \quad (7.51)$$

很显然，为了得到运动电荷电场的频谱分析，我们只需将从运动电荷的延迟点指向观察点的单位矢量进行傅里叶变换。

7.2.3 运动电荷的电磁辐射

另外，我们也可以直接用(7.38)式将(7.34)式中对 t 的导数变换成对迟缓时间 t_{ret} 的导数，进而有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})R^2} + \frac{1}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2 R} \left(\frac{d\mathbf{n}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathbf{n} - \mathbf{v}}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^3 R^2} \left(R \frac{d}{dt} (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \frac{dR}{dt} \right) \right]_{\text{ret}}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

代入(7.43)式以及 $\frac{dR}{dt} = -\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} \cdot \nabla R = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 即可以算得

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\mathbf{n} - \mathbf{v})(1 - \mathbf{v}^2)}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^3 R^2} + \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \mathbf{v}) \times \dot{\mathbf{v}}\}}{(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right]_{\text{ret}}. \quad (7.53)$$

通过简单的量纲分析恢复光速 c , 即有

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c})(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2})}{(1 - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{n})^3 R^2} + \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \dot{\mathbf{v}}\}}{c^2(1 - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right]_{\text{ret}}. \quad (7.54)$$

得到电场的这个表达式以后, 进一步就可以由(7.48)式得到磁场的表达式。

带电粒子电场表达式(7.54)的两项中, 随距离按照 $\frac{1}{R^2}$ 下降的第一项可以理解为是对静电荷库伦场的推广, 而按 $\frac{1}{R}$ 下降的第二项则代表带电粒子加速运动所产生的辐射场, 它正比于粒子的加速度 $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$, 不妨记这一项为 \mathbf{E}_a ,

$$\mathbf{E}_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{a}\}}{c^2(1 - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right]_{\text{ret}}, \quad (7.55)$$

很显然有

$$\mathbf{n}_{\text{ret}} \cdot \mathbf{E}_a = 0. \quad (7.56)$$

7.2.4 运动电荷的辐射功率

为了考察运动电荷的辐射功率, 我们需要考虑坡印廷矢量 \mathbf{S} ,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times (\mathbf{n}_{\text{ret}} \times \mathbf{E})/c \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E}^2 \mathbf{n}_{\text{ret}} - \frac{1}{\mu_0 c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_{\text{ret}}) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (7.57)$$

为了考察辐射场的能流密度, 我们在上式中取 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_a$, 从而即有

$$\mathbf{S}(t) = \epsilon_0 c \mathbf{E}_a^2 \mathbf{n}_{\text{ret}} = \epsilon_0 c \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left| \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{a}\}}{c^2(1 - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right|_{\text{ret}}^2 \mathbf{n}_{\text{ret}}. \quad (7.58)$$

单位时间流过半径为 R 的球面立体角 $d\Omega$ 的能量为

$$dP(t) = \frac{dW}{dt} = R^2 d\Omega \mathbf{S}(t) \cdot \mathbf{n}_{\text{ret}}. \quad (7.59)$$

但这是远处观察者单位时间内测到的能量，它并不等于粒子附近观察者单位时间内测到的辐射能量。粒子附近观察者测到的辐射率为

$$\begin{aligned} dP(t_{\text{ret}}) &= \frac{dW}{dt_{\text{ret}}} = \frac{dW}{dt} \frac{dt}{dt_{\text{ret}}} \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{|\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{a}\}|^2}{(1 - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{n})^5} \Big|_{\text{ret}} d\Omega. \end{aligned} \quad (7.60)$$

特别的，我们可以考虑上述辐射率公式(7.60)的非相对论极限(即 $\mathbf{v} \ll c$ 的极限)，这时候(7.60)近似为

$$dP(t_{\text{ret}}) = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} |\mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times \mathbf{a}\}|_{\text{ret}}^2 d\Omega = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} |\mathbf{n} \times \mathbf{a}|_{\text{ret}}^2 d\Omega. \quad (7.61)$$

取带电粒子的位置为坐标原点，取粒子的瞬时加速度沿着 z 轴，则

$$dP(t_{\text{ret}}) = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \mathbf{a}_{\text{ret}}^2 \sin^2 \theta d\Omega. \quad (7.62)$$

显然，在垂直于粒子加速度的方向上辐射最强。进一步，将这个辐射率对立体角积分，就能得到带电粒子的辐射总功率，为

$$P(t_{\text{ret}}) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \mathbf{a}_{\text{ret}}^2 = \frac{2}{3} \frac{e_s^2}{c^3} \mathbf{a}_{\text{ret}}^2. \quad (7.63)$$

这称之为拉莫公式，式中 $e_s^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$ 。

另外，注意到(7.62)式关于粒子加速度 \mathbf{a}_{ret} 的轴对称性，可以知道，在非相对论极限下， dt 时间之内辐射的总动量为零，即

$$d\mathbf{P}_{\text{rad}} = 0. \quad (7.64)$$

我们可以将以上非相对论极限下的辐射功率推广到相对论情形。这就是要将(7.60)式对所有的立体角积分，这个积分算起来很麻烦，结果是

$$P(t_{\text{ret}}) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^6 \left[\mathbf{a}^2 - \left(\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c} \right)^2 \right]_{\text{ret}}. \quad (7.65)$$

式中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}$. 好在我们有另一种办法推导这个结果，下面讲述推导过程。

首先，我们要证明，辐射总功率 $P(t)$ 是相对论不变量，它不依赖于参考系。为此我们选择一个特殊的 S' 系，使得带电粒子在这个参考系中的瞬

时速度 $\mathbf{v}' = 0$, 从而 $0 = \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} \Rightarrow d\mathbf{x}' = 0$ 。很显然在 S' 系中, 粒子的辐射总功率完全由上面的非相对论极限的拉莫公式(7.63)描述。注意到辐射能量 dW 和辐射动量 $d\mathbf{P}$ 构成了一个四维矢量, 并注意到在 S' 系中 $d\mathbf{P}'_{\text{rad}} = 0$, 即有

$$P(t) = \frac{dW_{\text{rad}}}{dt} = \frac{\gamma(dW'_{\text{rad}} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{P}'_{\text{rad}})}{\gamma(dt' + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}'/c^2)} = \frac{dW'_{\text{rad}}}{dt'} = P'(t'). \quad (7.66)$$

进一步, 有

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{rad}}}{dt} = \frac{\gamma(d\mathbf{P}'_{\text{rad}} + \mathbf{v}dW'_{\text{rad}}/c^2)}{\gamma(dt' + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}'/c^2)} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{dW'_{\text{rad}}}{dt'} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{dW_{\text{rad}}}{dt}. \quad (7.67)$$

由此容易进一步证明, 辐射总功率 $P(t)$ 在任何参考系中都是一样的。

所以, 为了得到 $P(t)$ 的一般公式, 我们只需要将非相对论极限的拉莫公式(7.63)推广成一个协变的形式。一个很明显的推广就是将加速度 \mathbf{a} 推广成四维协变的加速度 a_μ , 从而得到

$$P(t_{\text{ret}}) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} (a_\mu a^\mu)_{\text{ret}}, \quad (7.68)$$

式中

$$a_\mu = \frac{1}{m} \frac{dp_\mu}{d\tau}, \quad (7.69)$$

m 为带电粒子质量, p_μ 为其四维动量, τ 是它的固有时。

注意到

$$\begin{aligned} \frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} &= \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 \\ &= (m\gamma)^2 \left[\frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt} \cdot \frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt} - c^2 \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.70)$$

利用

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}, \quad \frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt} = \gamma\mathbf{a} + \gamma^3 \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v}. \quad (7.71)$$

联合从(7.68)式开始的这四个式子, 即得(7.65)式。

7.3 低速带电粒子体系的有效作用量

带电粒子体系可以通过电磁势(ϕ, \mathbf{A})而产生耦合。如果我们只关心带电粒子的运动，而不关心系统中的电磁场，则可以通过本章前几节的方法求解出电磁势，将它们用各粒子坐标变量表达出来，就可以得到一个以各粒子位置坐标为基本变量的有效拉格朗日量，形如下式

$$L = \sum_a \left[-m_a \sqrt{1 - \mathbf{v}_a^2} - q_a \phi + q_a \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_a \right], \quad (7.72)$$

式中 ϕ, \mathbf{A} 是需要代入具体表达式的电磁势解， m_a, q_a 分别是第 a 个粒子的质量和电荷， \mathbf{v}_a 是第 a 个粒子的速度。一般来说， ϕ, \mathbf{A} 的表达式是非常复杂的，所以这个有效拉格朗日量其实很复杂。不过，当各粒子的运动速度远小于光速时，即 $\mathbf{v}_a \ll 1$ 时，我们可以将上述有效拉格朗日量按照粒子速度 \mathbf{v}_a 进行泰勒展开，而正如我们将要论证的，这一展开的低阶项(到 \mathbf{v}^2 阶)有比较简单的表达式。

不过，值得说明的是，(7.72)式实际是在 $c = 1$ 的单位制中写的，因此按照无量纲的 \mathbf{v} 进行泰勒展开在恢复常数 c 以后其实就是按照 \mathbf{v}/c 进行展开，或者简化一点说就是按照 $1/c$ 进行展开，展开到 \mathbf{v}^2 阶其实就是展开到 \mathbf{v}^2/c^2 阶，或者简单地说展开到 $1/c^2$ 阶。另一方面，(7.72)式右边的第一项比较特殊，由于拉格朗日量要和能量量纲相同，因此恢复 c 以后这一项其实应该是 $-m_a c^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}_a^2/c^2}$ ，它展开到 \mathbf{v}^2/c^2 阶就应该是

$$-m_a c^2 + \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 + \frac{1}{8} m_a \frac{\mathbf{v}_a^4}{c^2}. \quad (7.73)$$

其中领头的 $-m_a c^2$ 虽然值很“大”，但它是一个常数，可以从拉格朗日量中舍弃。总之，这个地方要保留 \mathbf{v}^4 项。

下面我们来具体讨论有效拉格朗日量按照 \mathbf{v}/c 的泰勒展开。首先，展开到 $(\mathbf{v}/c)^0$ 阶，这时候带电粒子运动对电磁势的影响可以完全忽略，带电粒子之间的电磁相互作用完全由库仑势描述，因此这时候的有效拉格朗日量为

$$L^{(0)} = \sum_a \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 - \sum_{a>b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_a q_b}{R_{ab}}, \quad (7.74)$$

式中 R_{ab} 为第 a 个粒子与第 b 个粒子之间的距离，即 $R_{ab} = |\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|$ 。

但是，如果想进一步展开到 \mathbf{v}^2/c^2 阶，那电荷运动所产生的势的推迟效应就不可忽略！这时候我们就需要回到推迟势的公式(7.22)来讨论如何近似。我们恢复常数 c 以后将(7.22)式重写如下，

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}', t - R/c)}{R}. \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - R/c)}{R} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - R/c)}{R}.\end{aligned}\quad (7.75)$$

如果所有电荷的速度都远小于光速，则电荷的分布在时间 R/c 内不会有显著的变化，因此我们可以将 $\rho(\mathbf{x}', t - R/c), \mathbf{J}(\mathbf{x}', t - R/c)$ 按照 R/c 进行泰勒展开。由于我们是要得到有效拉格朗日量的 $1/c^2$ 阶，所以对于矢量势只需保留 R/c 泰勒展开的零阶项，而对于标量势，我们要保留到 $(R/c)^2$ 项，从而有

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3\mathbf{x}' R \rho(\mathbf{x}', t). \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t)}{R}.\end{aligned}\quad (7.76)$$

注意到 $\int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}', t)$ 是整个体系的总电荷，它是一个与时间无关的常量，从而

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3\mathbf{x}' R \rho(\mathbf{x}', t).\quad (7.77)$$

假设只有一个点电荷 q ，则由(7.76)式和(7.77)式，有

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2c^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{q\mathbf{v}}{R}.\quad (7.78)$$

式中 R 为这个运动的点电荷到 \mathbf{x} 点的距离， \mathbf{v} 为这个点电荷的瞬时速度。 ϕ, \mathbf{A} 本身不是物理的，我们可以对它进行任意规范变换而不改变物理内容，

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \varepsilon.\quad (7.79)$$

特别的，我们可以选取规范参数 ε 如下，

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2c^2} \frac{\partial R}{\partial t}.\quad (7.80)$$

则规范变换以后，有

$$\phi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{q\mathbf{v}}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2c^2} \nabla \frac{\partial R}{\partial t}. \quad (7.81)$$

利用 $\nabla \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla R$, 以及 $\nabla R = \mathbf{n}$, \mathbf{n} 为从运动电荷指向场点 \mathbf{x} 的单位矢量，即有

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{q\mathbf{v}}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2c^2} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}. \quad (7.82)$$

前面(7.43)式我们曾经得到过

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} = \frac{1}{R} [-\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})]. \quad (7.83)$$

代入 \mathbf{A}' 的表达式，最后就得到

$$\phi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}, \quad \mathbf{A}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2c^2} \frac{[\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})]}{R}. \quad (7.84)$$

简单的推广就可以告诉我们，对于多个带电粒子的系统，其余粒子在第 a 粒子处产生的势场为

$$\phi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{b,b \neq a} \frac{q_b}{R_{ab}}, \quad \mathbf{A}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{b,b \neq a} \frac{q_b}{2c^2} \frac{[\mathbf{v}_b + \mathbf{n}_{ab}(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})]}{R_{ab}}. \quad (7.85)$$

式中 \mathbf{n}_{ab} 为从 q_b 指向 q_a 的单位矢量。

用上面式子给出的 ϕ' , \mathbf{A}' 替换 ϕ , \mathbf{A} (因为它们规范等价) 并代入有效拉格朗日量的(7.72)式，即可得

$$\begin{aligned} L = & \sum_a \left[\frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 + \frac{1}{8} m_a \frac{\mathbf{v}_a^4}{c^2} \right] - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{a>b} \frac{q_a q_b}{R_{ab}} \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{a>b} \frac{q_a q_b}{2c^2} \frac{[\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})]}{R_{ab}}. \end{aligned} \quad (7.86)$$

这就是我们最终求得的精确到 \mathbf{v}^2/c^2 阶的有效拉格朗日量。

由上面的有效拉格朗日量，还可以求出有效哈密顿量。为此我们注意到(7.86)式中的第二项和第四项是对零阶拉格朗日量 $L^{(0)}$ 的微扰修正。因此我们完全可以近似地用 $\mathbf{p}_a = \frac{\partial L^{(0)}}{\partial \mathbf{v}_a} = m_a \mathbf{v}_a$ 来定义正则动量，然后根据勒让德变换 $H = \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{v}_a - L$ 来得到有效哈密顿量 H ，结果为

$$\begin{aligned} H = & \sum_a \frac{\mathbf{p}_a^2}{2m_a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{a>b} \frac{q_a q_b}{R_{ab}} - \sum_a \left[\frac{\mathbf{p}_a^4}{8c^2 m_a^3} \right] \\ & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{a>b} \frac{q_a q_b}{2c^2 m_a m_b} \frac{[\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b + (\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{p}_b \cdot \mathbf{n}_{ab})]}{R_{ab}}. \end{aligned} \quad (7.87)$$