

东华理工大学理学院物理系

# 第 6 章 哈密顿系统中的规则与混沌

v. 1.0.0

陈童  
[tongchen@ecut.edu.cn](mailto:tongchen@ecut.edu.cn)

September 29, 2021



## 最规则的哈密顿系统-可积系统

不变环面

另一个刘维尔定理

作用-角变量

开普勒问题和二维谐振子问题

## 近可积系统与混沌系统

近可积系统与 KAM 定理

混沌系统



前面我们讲过对称性与守恒定律的关系，也说明过对称性如何决定系统的作用量。其实，对称性还强烈地限制着哈密顿力学系统的动力学行为。一个系统的对称性越高，其动力学行为就越呈现出规则性，而对称性的降低就可能导致混沌。相反，一个系统的行为越表现出规则性往往就意味着它有越高的对称性，不过这个对称性可能是隐藏的。

另一方面，连续对称性总是对应着守恒量，也就是与哈密顿量泊松对易的物理量<sup>1</sup>。因此，如果一个力学系统有越多的守恒量，其动力学行为就会越规则，而守恒量的不足也是力学系统呈现混沌行为的必要条件。本章我们将从最规则的力学系统（也就是所谓的可积系统）出发，逐步探讨哈密顿力学系统如何从规则过渡到混沌。

---

<sup>1</sup>假设不显含时间。



# 最规则的哈密顿系统-可积系统

动力学行为最规则的哈密顿系统是所谓的可积系统，也称作刘维尔可积系统。这个概念上一章已经引入了，假设我们考察的是一个  $n$  自由度的哈密顿系统，那么可积的定义是，存在  $n$  个泊松对易的独立守恒量，不妨记这些守恒量为  $G_a, a = 1, 2, 3, \dots, n$ ，它们满足  $[H, G_a] = 0$ 。所谓泊松对易即满足

$$[G_a, G_b] = 0, \quad (1)$$

而所谓独立即满足

$$dG_1 \wedge dG_2 \wedge \dots \wedge dG_n \neq 0. \quad (2)$$

对于  $2n$  维相空间，不可能有超过  $n$  个相互独立且泊松对易的守恒量。由于哈密顿量  $H$  本身也是守恒量<sup>2</sup>，而且它和所有  $G_a$  均泊松对易，因此这意味着  $H$  不是独立的，而必然是  $G_a$  的函数。实际上，后面将看到， $H$  完全由这些  $G_a$  决定，不再依赖于更多的独立变量。

---

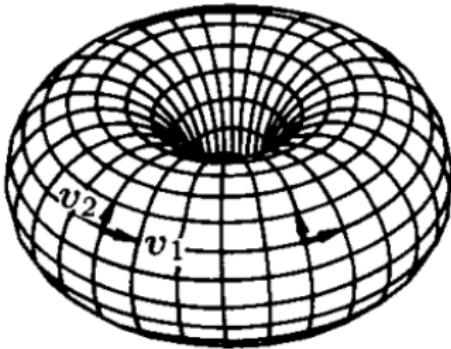
<sup>2</sup> 我们仅考虑  $H$  不显含  $t$  的情形。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

不变环面



由于  $G_a$  是守恒量，因此系统在相空间的运动轨道一定会被限制在  $G_a, a = 1, 2, \dots, n$  取常数值的  $n$  维超曲面上，不同的取值就将相空间分层成不同的超曲面，不妨记  $G_a = g_a, a = 1, 2, \dots, n$  的那一层超曲面为  $\mathcal{M}_g$ 。可以证明，如果  $\mathcal{M}_g$  连通且有限（用数学术语来说即紧致），那它一定可以参数化为  $n$  维环面  $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ ，即  $\mathcal{M}_g = T^n$ ，称作相空间的不变环面，不变的意思是，系统始终在这个环面上运动。图 (1) 中所示的就是一个两维环面  $T^2$ 。



# 最规则的哈密顿系统-可积系统

不变环面

为了证明上一段的这个结论，我们引入相空间坐标  $x = (q, p)$ ，并以  $x^i, i = 1, 2, \dots, 2n$  来表示它的各分量。很显然，等  $G_a$  面  $\mathcal{M}_g$  的法向就是  $G_a$  的梯度方向，即有  $\frac{\partial G_a}{\partial x}$ ,  $a = 1, 2, \dots, n$  均垂直于  $\mathcal{M}_g$ 。另一方面，我们取  $G_a, a = 1, 2, \dots, n$  为生成元，让它们在相空间生成相流，并记相应的相流参数为  $\lambda^a$ ，即有相流方程

$$\frac{dx^i}{d\lambda^a} = v_{G_a}^i = \omega^{ij} \partial_j G_a, \quad (3)$$

式中  $v_{G_a}^i$  表示相应相流的速度场。很显然，总共有  $n$  个这样的相流，并且由于  $G_a, a = 1, 2, \dots, n$  相互独立，所以这些相流的速度场是线性独立的。另外，

$$v_{G_b}^i \partial_i G_a = (\partial_i G_a) \omega^{ij} (\partial_j G_b) = [G_a, G_b] = 0, \quad (4)$$

即这些相流的流动方向均与  $G_a$  的梯度方向相垂直！从而也即是说，这些相流均是沿着曲面  $\mathcal{M}_g$  流动的。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

不变环面



当这  $n$  个线性独立相流流遍  $n$  维超曲面  $\mathcal{M}_g$  时，它们的参数  $\lambda^a, a = 1, 2, \dots, n$  就给出了  $\mathcal{M}_g$  的一种坐标。而这些相流是可以一直持续下去的，它们并没有边界。因此要么这组  $n$  维参数  $(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n)$  的取值范围都是  $(-\infty, +\infty)$ ，从而相当于一个  $n$  维空间  $\mathbb{R}^n$ ，要么，如果每个参数的取值都有限的话，那每一个参数的取值范围都只能是在一个圆周  $S^1$  上，从而相当于一个  $n$  维环面  $T^n$ ，而这正是我们想要证明的结论。比如图 (1) 中所画的两维环面  $T^2$  上的坐标网就是由相流参数组  $(\lambda^1, \lambda^2)$  所参数化的。如此就完成了整个证明。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

不变环面

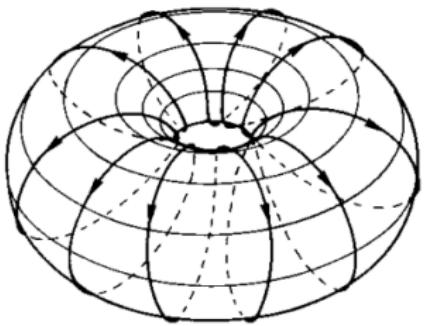


$T^n$  由  $n$  个圆周作笛卡尔积而成，每一个圆周对应一个拓扑独立的非平凡回路，即不可以通过连续形变相互过渡也不可以连续收缩为一点的回路，因此  $T^n$  上有  $n$  个拓扑独立的非平凡回路，不妨记为

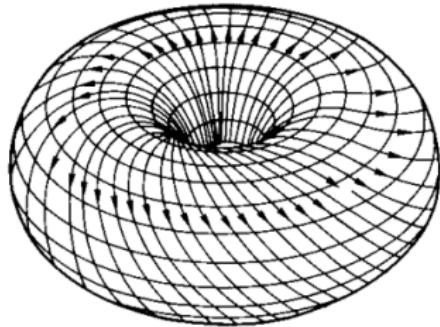
$C_a, a = 1, 2, \dots, n$ 。假设  $\mathcal{M}_g = T^n$ ，则系统就在这个  $n$  维环面上运动，它在每一个独立回路  $C_a$  方向都是周期性的，但是整个完整的相轨道却不一定是闭合轨道，因为这里有两种不同的可能性。为了弄清楚问题，我们记系统在  $C_a$  方向的运动周期为  $T_a$ ，从而它在这个方向的角频率为  $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a}$ 。仔细考虑一下不难明白，如果任何两个方向的角频率之比  $\omega_a/\omega_b$  都是整数比，则各个方向的运动一定有公共的周期，从而整个系统一定作周期性的运动，从而一定是闭合轨道，图 (2) 中左图所画的就是这种情形。但是，如果这些角频率之比都是无理数，那就没有公共的周期，也没有闭合轨道，实际上，这时候系统的相轨道最终将密布满整个  $T^n$ ，称作相轨道遍历整个不变环面，图 (2) 中右图所画的就是这种情形。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

不变环面



(a) Trajectory closed



(b) Trajectory eventually covers the surface densely

Figure: 不变环面上的相轨道。

一般来说，对于具有角频率  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  的不变环面，它不能被相应相轨道遍历的充要条件是，存在一组整数

$\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \neq 0$ ，使得  $\vec{\omega} \cdot \vec{m} = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_n\omega_n = 0$ 。这个条件称之为共振条件，满足共振条件的不变环面就是所谓的共振环面。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

## 另一个刘维尔定理



**刘维尔定理：**可积系统的相空间运动可以通过积分法求解。

类似的结论上一章我们其实证明过，但那个证明假定了能找到哈密顿-雅可比方程的一组解析解。下面要给出的证明完全不依赖于这个假定，相反，我们可以用证明得出的哈密顿正则方程的解析解构造出相应哈密顿-雅可比方程的解析解，如何构造已经在上一章讲过了。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

另一个刘维尔定理



下面我们来证明这个刘维尔定理。证明的关键在于找到一组正则变换，将相空间坐标由原来的  $x = (q, p)$  变换为  $x' = (\psi, G)$ ，式中  $G$  代表所有相互泊松对易的守恒量  $G_a$ ，它们是新的正则动量， $\psi$  代表新的正则坐标  $\psi^a$ ,  $a = 1, 2, \dots, n$ 。如果我们成功地做到这一步，那这首先证明了哈密顿量  $H$  只能依赖于守恒量  $G$ ，不能依赖于  $\psi$ ，这是因为  $0 = [H, G_a]_x = [H, G_a]_{x'} = \frac{\partial H}{\partial \psi^a}$ ，即  $\frac{\partial H}{\partial \psi^a} = 0$ 。其次，如果我们成功找到这样的正则变换，则

$$\dot{G}_a = [G_a, H] = 0, \quad \dot{\psi}^a = [\psi^a, H] = \frac{\partial H}{\partial G_a} = \Omega_a, \quad (5)$$

式中  $\Omega_a$  定义为  $\frac{\partial H}{\partial G_a}$ ，是一些仅仅依赖于  $G$  的量。从而我们就可以得到系统的运动在这组新正则变量下的解

$$G_a(t) = G_a(0), \quad \psi^a(t) = \psi^a(0) + t\Omega_a. \quad (6)$$

将这组解变换回去，就能得到原来正则变量  $(q, p)$  下的解。如果这组正则变换可以用某个积分表达式来生成，那我们就证明了能通过积分法得到系统在原变量  $(q, p)$  下的解析解。这样就完成了想要的证明。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

另一个刘维尔定理

为了构造这组正则变换，我们注意到系统的运动总是限制在某层超曲面  $\mathcal{M}_g$  上，而  $\mathcal{M}_g$  由  $G_a(q, p) = g_a$  确定，因此我们可以反解出  $p_a$  作为  $g, q$  的函数，记为  $p_a(g, q)$ 。下面在  $\mathcal{M}_g$  上任意选定一个参考点  $q_0$ ，并在  $\mathcal{M}_g$  上考察一条从  $q_0$  到  $q$  的路径，然后将  $p_a(g, q)dq^a$  沿着这条路径积分<sup>3</sup>。很明显，如果积分的结果与具体的路径无关，而只与起末两点位置有关，那这个积分就定义了一个函数  $F(G, q)$ ，

$$F(G, q) = \int_{q_0}^q p_a(g, q)dq^a. \quad (7)$$

很显然，这个函数满足

$$p_a = \frac{\partial F}{\partial q^a}, \quad (8)$$

因此我们将之取为正则变换的第二类生成函数，进而将  $G_a$  看作新的正则动量，并定义新的正则坐标为，

$$\psi^a = \frac{\partial F}{\partial G_a}. \quad (9)$$

这样，所需的正则变换就构造出来了。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

另一个刘维尔定理



唯一还需要证明的就是(7)式的积分的确与具体路径无关！要证明积分和路径无关，只需证明在  $\mathcal{M}_g$  的闭合回路<sup>4</sup>上的积分等于零（请读者自己思考一下为什么是这样？），即证明  $\oint p_a dq^a|_{\mathcal{M}_g} = 0$ 。但是  $p_a dq^a$  就是辛势  $\Theta$ ，因此就是要证明  $\oint \Theta|_{\mathcal{M}_g} = 0$ 。根据斯托克斯公式，这就是要证明

$$\oint \Theta|_{\mathcal{M}_g} = \int d\Theta|_{\mathcal{M}_g} = \int \omega|_{\mathcal{M}_g} = 0. \quad (10)$$

为此只需证明，辛形式限制在  $\mathcal{M}_g$  上等于零，即  $\omega|_{\mathcal{M}_g} = 0$ 。

<sup>4</sup>假设它可以连续收缩成到  $q_0$  点

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

另一个刘维尔定理

这个证明如下，

$$\begin{aligned}\omega|_{\mathcal{M}_g} &= \frac{1}{2} \omega_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda^a} \frac{dx^j}{d\lambda^b} d\lambda^a \wedge d\lambda^b \\ &= \frac{1}{2} \omega_{ij} v_{G_a}^i v_{G_b}^j d\lambda^a \wedge d\lambda^b \\ &= \frac{1}{2} \omega(v_{G_a}, v_{G_b}) d\lambda^a \wedge d\lambda^b \\ &= \frac{1}{2} [G_b, G_a] d\lambda^a \wedge d\lambda^b = 0.\end{aligned}\tag{11}$$

上面的推导过程使用了上一章讲相流时推导的相关公式。到此为止就完成了整个刘维尔定理的证明。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

## 作用-角变量



如果可积系统的运动有限，从而其  $\mathcal{M}_g = \mathbf{T}^n$ ，那就可以选择一组非常有用的正则变量，称之为作用-角变量。其中作用变量通常记为  $I_a, a = 1, 2, \dots, n$ ，是一组互相泊松对易的守恒量，它和原来的守恒量  $G$  互为函数关系。 $I_a$  常常作为正则动量，与之对应的正则坐标记为  $\theta^a$ ，称作角变量。可积系统的哈密顿量只是作用变量  $I$  的函数，记为  $H(I)$ 。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

## 作用-角变量



作用变量的定义相应于不变环面  $T^n$  上的非平凡回路，对于每一个独立非平凡回路  $C_a$ ，可以定义相应的  $I_a$  如下

$$I_a = \oint_{C_a} \frac{\Theta}{2\pi} = \oint_{C_a} \frac{p_b dq^b}{2\pi}, \quad (12)$$

由于  $\mathcal{M}_g = T^n$  由原守恒量  $G$  定义，因此这样定义的  $I_a$  显然是  $G$  的函数。进而我们也可以将不变环面刻画成  $I_a, a = 1, 2, \dots, n$  取常数值的超曲面，即  $I_a(q, p) = f_a$  的超曲面，不同的  $f$  值就将整个相空间分层成不同的不变环面。比如，第一章讲势能曲线的时候，实际上我们已经初步接触过一维情形下的作用变量，在一维运动的情形中，相空间是二维的，而不变环面也是一维的，就是一条闭合的相轨道，这时候作用变量就是这条相轨道包围的面积除以  $2\pi$ ，具体细节读者不妨往回翻看一下。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

## 作用-角变量



为了定义角变量  $\theta^a$ , 我们仿照对刘维尔定理的证明过程, 首先通过反解  $I_a(q, p) = f_a, a = 1, 2, \dots, n$  得出  $p_a = p_a(f, q)$ , 进而引入正则变换的第二类生成函数  $F(I, q)$ , 定义如下

$$F(I, q) = \int_{q_0}^q p_a(I, q) dq^a. \quad (13)$$

进而即有

$$p_a = \frac{\partial F}{\partial q^a}, \quad \theta^a = \frac{\partial F}{\partial I_a}. \quad (14)$$

$\theta^a$  之所以称作角变量, 是因为它在回路  $C_a$  上以  $2\pi$  为周期, 而在其它  $b \neq a$  的回路  $C_b$  上周期是零, 即满足

$$\oint_{C_b} \frac{d\theta^a}{2\pi} = \delta^a_b. \quad (15)$$

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

## 作用-角变量



证明如下,

$$\begin{aligned}\oint_{C_b} d\theta^a &= \oint_{C_b} \frac{\partial^2 F}{\partial q^c \partial I_a} dq^c \\&= \frac{\partial}{\partial I_a} \oint_{C_b} \frac{\partial F}{\partial q^c} dq^c = \frac{\partial}{\partial I_a} \oint_{C_b} p_c dq^c \\&= (2\pi) \frac{\partial I_b}{\partial I_a} = (2\pi) \delta_a^b.\end{aligned}\tag{16}$$

类似于前面对刘维尔定理的讨论，作用变量和角变量满足的哈密顿正则方程为

$$\dot{I}_a = 0, \quad \dot{\theta}^a = \frac{\partial H}{\partial I_a} = \omega_a(I),\tag{17}$$

式中  $\omega_a(I)$  定义为  $\frac{\partial H}{\partial I_a}$ ，为系统在  $C_a$  方向上运动的角频率。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

## 作用-角变量



不仅如此，而且第一章谈到的玻尔-索末菲量子化条件也可以推广为

$$l_a = n_a \hbar, \quad (18)$$

式中  $n_a$  为非负整数，是一个标记量子状态的量子数。

假设我们以作用变量和角变量为相空间的坐标，那玻尔-索末菲量子化条件将带来一个直观的相空间图像，对于一维运动情形，它意味着相空间沿着  $\theta$  轴可以划分成一个个长为  $2\pi$  的区间，而沿着  $l$  轴可以划分成一个个长为  $\hbar$  的区间，这样就可以将整个相空间分成一些宽为  $2\pi$ ，高为  $\hbar$ ，从而面积为  $2\pi\hbar$  的小格子，称之为相格。玻尔-索末菲量子化条件告诉我们，每一个相格对应一个量子状态。推广到  $n$  自由度情形即是，相空间可以划分成一些体积为  $(2\pi\hbar)^n$  的相格，每一个相格对应一个量子状态。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

开普勒问题和二维谐振子问题

前面的章节中求解过粒子在中心力场  $V(r) = -\frac{k}{r}$  ( $k > 0$ ) 中运动的问题，也就是所谓的开普勒问题。我们知道，这个问题可以化简为一个平面运动问题，相应的哈密顿量为

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}. \quad (19)$$

其中  $p_\theta$  就是角动量，有时候也记为  $J$ ，它当然是一个守恒量，因此  $p_\theta$  与  $H$  泊松对易。所以，我们有两个相互泊松对易的守恒量， $H$  和  $p_\theta$ ，而这又是一个两自由度的二维运动问题，所以它构成一个可积系统。我们可以选取  $H, p_\theta$  为正则动量（两者看成相互独立），相应的两个正则坐标分别记为  $\psi_H, \psi_\theta$ 。很明显

$$\dot{\psi}_H = \frac{\partial H}{\partial H} = 1, \quad \dot{\psi}_\theta = 0. \quad (20)$$

由此即知道  $\psi_H = t - t_0$ ,  $\psi_\theta$  为常数。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

开普勒问题和二维谐振子问题



如果我们想进一步求出  $r, \theta$  如何随时间演化，那根据刘维尔定理的证明过程，就需要将守恒量  $H, p_\theta$  以及相应的两个正则坐标  $\psi_H, \psi_\theta$  正则变换回去。这个正则变换的生成函数（第二类生成函数） $F(H, p_\theta, r, \theta)$  为

$$\begin{aligned} F(H, p_\theta, r, \theta) &= \int (p_r dr + p_\theta d\theta) \\ &= \int dr \sqrt{2m(H - \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{k}{r})} + p_\theta \theta. \end{aligned} \quad (21)$$

这个生成函数按照下式生成正则变换

$$\begin{aligned} t - t_0 = \psi_H &= \frac{\partial F}{\partial H} = \int dr \frac{m}{\sqrt{2m(H - \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{k}{r})}} \\ \psi_\theta &= \frac{\partial F}{\partial p_\theta} = - \int dr \frac{p_\theta / r^2}{\sqrt{2m(H - \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{k}{r})}} + \theta \end{aligned} \quad (22)$$

这里的  $\psi_\theta$  就可以理解为初始角度  $\theta_0$ 。读者可以将这个结果与第四章第五章的相应结果进行比较，不同的方法结论是完全一致的。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

开普勒问题和二维谐振子问题



下面我们看看如何用作用-角变量处理开普勒问题。对于束缚运动（符合运动区域有限的条件），开普勒问题的两个作用变量  $I_1, I_2$  分别为

$$\begin{aligned}I_2 &= \oint \frac{p_\theta d\theta}{2\pi} = p_\theta \\I_1 &= \oint \frac{p_r dr}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \oint dr \sqrt{2m(H - \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{k}{r})} \\&= \frac{1}{\pi} \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \sqrt{2m(H - \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{k}{r})}. \quad (23)\end{aligned}$$

式中对  $r$  的回路积分表示从下限  $r_{min}$  积到上限  $r_{max}$ ，然后再积回下限  $r_{min}$ 。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

开普勒问题和二维谐振子问题



$r_{min}, r_{max}$  由  $p_r = 0$  确定, 从而是方程  $H - \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} = 0$  的两个根, 两根之和以及两根之积分别为

$$r_{min} + r_{max} = -\frac{k}{H}, \quad r_{min}r_{max} = -\frac{p_\theta^2}{2mH}. \quad (24)$$

由此也可以知道, 必有总能量  $H < 0$ 。为了进一步算出  $I_1$  表达式中的积分, 我们可以利用如下公式

$$\int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \sqrt{\left(1 - \frac{r_{min}}{r}\right)\left(\frac{r_{max}}{r} - 1\right)} = \frac{\pi}{2}(r_{min} + r_{max}) - \pi\sqrt{r_{min}r_{max}}. \quad (25)$$

利用这些结果, 不难算出

$$I_1 = -I_2 + k\sqrt{\frac{m}{-2H}}. \quad (26)$$

进而即有

$$H = -\frac{mk^2}{2(I_1 + I_2)^2} = E. \quad (27)$$

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

开普勒问题和二维谐振子问题



从上面的结果容易得到  $\omega_1 = \frac{\partial H}{\partial l_1} = \frac{\partial H}{\partial l_2} = \omega_2$ , 以及

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{mk^2}{(l_1 + l_2)^3} = \frac{m}{k} \left( -\frac{2E}{m} \right)^{3/2}. \quad (28)$$

这说明两件事情：第一，由于  $\omega_1/\omega_2 = 1$  是一个有理数，这说明粒子的运动是一个周期运动，特别的，运动轨道是闭合轨道。第二，周期  $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = (2\pi)km^{1/2}(-2E)^{-3/2}$ , 这正是开普勒第三定律，这是因为半长轴  $a = k(-2E)^{-1}$ , 所以  $T = (2\pi)\sqrt{\frac{m}{k}}a^{3/2}$ 。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

开普勒问题和二维谐振子问题



下面再考察一个例子，即一个二维谐振子，其哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2 + p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2). \quad (29)$$

很显然系统 1,2 两个分量的哈密顿量都是守恒量，而且相互泊松对易，分别记为  $H_1, H_2$ ， $H_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2)$ ， $H_2 = \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2)$ 。同样很明显的是， $H_1 = E_1$  给出的是相空间  $(q_1, p_1)$  平面上的一个椭圆，椭圆在拓扑上当然等同于圆周  $S^1$ 。同样  $H_2 = E_2$  也是  $(q_2, p_2)$  平面上的椭圆，也拓扑等价于  $S^1$ ，所以系统的运动正是限制在这两个  $S^1$  的笛卡尔积上，这也就是相空间的不变环面  $T^2 = S^1 \times S^1$ 。所以这个系统当然是一个可积系统，人们不难按照求解可积分系统的一般办法得出系统的解析解。不过，我们这里真正想讨论的是如何构造这个系统的作用-角变量。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

开普勒问题和二维谐振子问题



人们当然可以按照构造作用-角变量的一般方法找到这个系统的作用-角变量，但这不是最快捷的方法。对于这个系统而言最快捷的方法就是先找到参数化两个独立  $S^1$  的角变量，然而通过正则变换进一步找到与角变量对应的作用变量。具体来说，对于  $H_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) = E_1$  的椭圆，我们可以定义相空间的坐标变换

$$p_1 = \rho_1 \cos \theta_1, \quad \omega_1 q_1 = \rho_1 \sin \theta_1, \quad (30)$$

式中  $\theta_1$  正是参数化这个椭圆的角变量，但满足  $\rho_1^2 = 2E_1$  的  $\rho_1$  却不一定是相应的作用变量，因为上面的变换只是相空间的坐标变换，却不一定 是正则变换。同样，对于  $H_2 = \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2) = E_2$  的椭圆，我们也可以定义相空间的坐标变换

$$p_2 = \rho_2 \cos \theta_2, \quad \omega_2 q_2 = \rho_2 \sin \theta_2, \quad (31)$$

式中  $\theta_2$  也是一个角变量。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

开普勒问题和二维谐振子问题



找到作用变量的关键是找到以上面两个角变量  $\theta_1, \theta_2$  为正则坐标的正则变换，而找到正则变换的关键则是要求相空间的坐标变换保持辛结构。为此我们进行如下计算

$$\begin{aligned}\omega &= dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 \\&= \frac{1}{\omega_1} \rho_1 d\rho_1 \wedge d\theta_1 + \frac{1}{\omega_2} \rho_2 d\rho_2 \wedge d\theta_2 \\&= d\left(\frac{1}{2\omega_1} \rho_1^2\right) \wedge d\theta_1 + d\left(\frac{1}{2\omega_2} \rho_2^2\right) \wedge d\theta_2.\end{aligned}\tag{32}$$

从这个计算可以知道，只需令  $I_1 = \frac{1}{2\omega_1} \rho_1^2, I_2 = \frac{1}{2\omega_2} \rho_2^2$ ，就会有

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 = dI_1 \wedge d\theta_1 + dI_2 \wedge d\theta_2.\tag{33}$$

这正是正则变换的保辛结构条件。也即是说，上面定义的  $I_1, I_2$  正是我们要找的作用变量。

# 最规则的哈密顿系统-可积系统

开普勒问题和二维谐振子问题

不妨将作用-角变量与原来变量之间的正则变换关系明显地写出来,

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{2I_1\omega_1} \cos \theta_1, & q_1 &= \sqrt{\frac{2I_1}{\omega_1}} \sin \theta_1, \\ p_2 &= \sqrt{2I_2\omega_2} \cos \theta_2, & q_2 &= \sqrt{\frac{2I_2}{\omega_2}} \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (34)$$

很显然,  $H_1 = I_1\omega_1$ ,  $H_2 = I_2\omega_2$ , 从而

$$H = I_1\omega_1 + I_2\omega_2. \quad (35)$$

利用作用-角变量的哈密顿正则方程, 我们容易得到

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = \omega_1, \quad \dot{\theta}_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} = \omega_2. \quad (36)$$

从而即有  $\theta_1 = \omega_1 t + \varphi_1$ ,  $\theta_2 = \omega_2 t + \varphi_2$ , 代回 (34) 式就可以得到原来的变量  $q_1, q_2, p_1, p_2$  的解。

# 近可积系统与混沌系统

## 近可积系统与 KAM 定理



前面已经看到，对于有限区域内的运动，可积系统的相空间分层成不同的不变环面  $T^n$ ，并且我们可以将  $T^n$  的坐标取作角变量  $\theta = (\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n)$ ，将不同层的不变环面对应不同的作用变量  $I = (I_1, I_2, \dots, I_n)$ 。即是说，我们可以用作用-角变量来描述可积系统，在这一描述下系统的哈密顿量仅为作用变量的函数。

假设我们有一个可积系统  $H_0(I)$ ，现在我们给它加上一个微扰，使得整个系统的哈密顿量变成

$$H(I, \theta) = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \theta), \quad (37)$$

式中  $\epsilon$  代表一个小量， $H_1(I, \theta)$  代表扰动，它不仅依赖于原来的作用变量同时还依赖于原来的角变量。这个扰动以后的系统就是一个近可积系统。

# 近可积系统与混沌系统

## 近可积系统与 KAM 定理



起初人们认为，扰动会破坏可积系统的不变环面，使得原来  $n$  维不变环面上的相轨道在扰动后弥漫到整个  $2n - 1$  维等能量曲面（注意，哈密顿系统的能量守恒）。但是，1954 年 Kolmogorov 在世界数学家大会上指出：非退化的可积系统在上述扰动之后，虽然某些不变环面会被扰动破坏掉（称为共振环面），但所谓满足强非共振条件的不变环面（这种不变环面占大多数）仍然会被保存下来。也就是说近可积系统整个相空间中大部分的相轨道依然都是非常规则的！这个发现后来被 Arnold 和 Moser 分别给予了严格的证明，这就是著名的 KAM 定理。

# 近可积系统与混沌系统

## 近可积系统与 KAM 定理



证明 KAM 定理的基本办法是某种改进的牛顿迭代法。粗略地说，就是找一系列的正则变换对扰动后得到的近可积系统进行步步变换，使之越来越靠近一个可积系统（只要对大部分相空间区域能做到这一点就行）。问题是，这个迭代展开在分母上依赖于  $\vec{\omega} \cdot \vec{m}$ ， $\vec{\omega}$  就是原来不变环面的角频率， $\vec{m}$  是任何形如  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  的整数组。因此这个展开对于共振环面（即存在某个  $\vec{m} \neq 0$  使得  $\vec{\omega} \cdot \vec{m} = 0$  的不变环面）是不收敛的。不仅如此，对于任何不变环面，实际上人们总可以选择  $\vec{m}$ ，使得  $\vec{\omega} \cdot \vec{m}$  任意接近零，因此看起来这个迭代展开对于任何不变环面都不收敛，这就是所谓的“小分母”困难。Arnold 和 Moser 正是利用改进的牛顿迭代法解决了“小分母”问题，证明对于满足所谓强非共振条件的不变环面，改进后的迭代展开收敛，从而证明了 KAM 定理。对具体证明过程感兴趣的读者，可以阅读 Jurgen Poschel 的文章 A Lecture on the Classical KAM Theorem, <https://arxiv.org/abs/0908.2234v1>。

# 近可积系统与混沌系统

## 近可积系统与 KAM 定理



31

在那些不变环面被扰动破坏的相空间区域，随着不变环面的破坏可能发生两件事情：第一，系统的相空间轨迹可能会与邻近轨迹发生剧烈的甚至随时间指数增长的偏离，从而导致对初始条件的极端敏感性和混沌行为。第二，它可能使得系统演化缺乏可预测性。即使我们处理的是严格的确定性系统，它也可能产生有效的随机输出，从而使得系统丧失可预测性。

太阳系是否稳定呢？这个大问题曾经引发大量的工作，直到 KAM 定理提供一个也许肯定的回答。太阳系是一个多体问题，具有明显的层次性，其行星与行星之间的相互作用比行星与太阳之间的相互作用要弱得多，可以看成是一个微扰。而行星与太阳的相互作用则是一个可积系统，其解就是开普勒的椭圆轨道。因此太阳系是一个近可积系统，KAM 定理可以适用，由于这个原因，该系统的大体结构是稳健的！但是，我们并不能非常确定目前的太阳系处在相空间的稳定区域。

# 近可积系统与混沌系统

## 混沌系统



假设我们考察的既不是可积系统，又不是近可积系统，而是一个一般的哈密顿系统，其泊松对易的守恒量的数目少于自由度数目  $n$ ，甚至当自由度数目  $n$  很大时大大少于  $n$ ，比方说只有一个守恒量，即能量。那这时候系统的动力学行为往往不再规则，而是常常会表现出混沌。

前面的章节中，我们讨论过不少这样的系统，这里不妨简单回顾一下。首先，第二章的最后，我们讨论过双摆系统，那是一个两自由度的系统，但是它只有一个守恒量，即能量。我们说过，当能量足够大时这个系统会表现出混沌行为。其次，第四章我们讨论过受限三体问题，我们说过庞加莱正是在研究受限三体问题时发现混沌的。

# 近可积系统与混沌系统

## 混沌系统



33

具体到第四章中对受限三体问题的那个简化模型，它显然是一个两自由度系统，但是只有能量这一个守恒量，因此出现混沌行为也不奇怪。至于一般性的三体问题，显然它有 9 个自由度，但是守恒量只有能量、总动量（三个分量）、还有总角动量（三个分量），共 7 个守恒量，而且相互泊松对易的守恒量实际上只有四个，所以当然一般会展现出混沌行为。

The background features a large, stylized, blue-grey swoosh that curves from the bottom left towards the top right. Along the path of this swoosh, there are numerous small, glowing white particles of varying sizes, resembling stars or sparkles. The overall effect is dynamic and celebratory.

**Thank You!**