重整化群（一）：固定点附近的重整化群流

陈童

先说两个基本概念：首先，什么是重整化群变换？重整化群变换是一种尺度变换，也就是变动定义量子场论的尺度，同时调节理论的耦合常数，使得长程物理的关联函数保持不变，任何满足这个条件的变换都叫做重整化群变换。重整化群变换是作用在场论有效作用量上的一种变换。第二个概念，什么是重整化群流？重整化群流就是定义在场论所有耦合常数的空间的一个无穷维动力系统，这个无穷维动力系统描写的是在连续的尺度变换下耦合常数以尺度为参数所画出来的流线。重整化群流的固定点就是重整化变换的固定点。

也就是说假定我们有一个理论，它的作用量是$S(a)$, 其中a是定义这个理论所需的一个尺度，比方说如果这个理论是定义在格点上，那么a就是格距。现在我们改变a, 将之变为$\widetilde{a}$, 同时调节理论的耦合常数，使得作用量变为$S(\widetilde{a})$。重整化群变换的要求是，用新尺度$\widetilde{a}$和新作用量$S(\widetilde{a})$ 算出来的关联函数依然和原来用$S(a)$算出来的一样。特别的，在重整化群变换下，配分函数Z应该保持不变。重整化群的固定点就是这样一种特别的作用量S_*，它满足

$$S_*(\widetilde{a}) = S_*(a). \tag{1}$$

我们这一节要研究的就是固定点附近的重整化群流。考察对固定点理论$S_*(a)$的一个扰动,

$$S_* \to S = S_* + \int (d^dx) g_i a^{\Delta_i - d} \mathcal{O}_i, \tag{2}$$

式中$\mathcal{O}_i$是一个Scaling 量纲为Δ_i的算子，a是定义理论的尺度，g_i是无量纲的耦合常数，是一个小扰动，另外，我们默认对i求和。那么理论的配分函数近似就是，

$$\begin{aligned} Z &= Z_* \left(-\int (d^dx) g_i a^{\Delta_i - d} \langle \mathcal{O}_i \rangle \right) + \\ & \quad Z_* \left(\frac{1}{2} \int\int_{|x_1 - x_2| > a} (d^dx_1)(d^dx_2) g_i g_j a^{\Delta_i + \Delta_j - 2d} \langle \mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) \rangle \right), \end{aligned} \tag{3}$$

式中Z_*是固定点理论的配分函数。由于我们定义理论的尺度是a, 因此在积分时我们要求两个不同点之间的距离大于a, 即$|x_1 - x_2| > a$。

现在我们改变定义理论的尺子至$\widetilde{a}$, 为了保持配分函数不变，我们同时调节耦合常数$g_i \to \widetilde{g}_i$, 则

$$\begin{aligned}\widetilde{Z} &= Z_*\left(-\int (d^dx)\widetilde{g}_i\widetilde{a}^{\Delta_i - d}\langle \mathcal{O}_i\rangle\right) + \\ & Z_*\left(\frac{1}{2}\int\int_{|x_1-x_2|>\widetilde{a}}(d^dx_1)(d^dx_2)\widetilde{g}_i\widetilde{g}_j\widetilde{a}^{\Delta_i+\Delta_j-2d}\langle \mathcal{O}_i(x_1)\mathcal{O}_j(x_2)\rangle\right). \quad (4)\end{aligned}$$

下面我们考虑一个无穷小的尺度变换$\widetilde{a} = (1+\epsilon)a$, ϵ是一个无穷小量。利用算子乘积展开

$$\mathcal{O}_i(x_1)\mathcal{O}_j(x_2) \sim \frac{1}{|x_1 - x_2|^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}}c_{ij}^k\mathcal{O}_k(x_2), \quad (5)$$

我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{Z} &= Z_*\left(-\int (d^dx)\widetilde{g}_i\widetilde{a}^{\Delta_i - d}\langle \mathcal{O}_i\rangle\right) + \\ & Z_*\left(\frac{1}{2}\int\int_{|x_1-x_2|>\widetilde{a}}(d^dx_1)(d^dx_2)\widetilde{g}_i\widetilde{g}_j\widetilde{a}^{\Delta_i+\Delta_j-2d}\frac{c_{ij}^k\langle \mathcal{O}_k(x_2)\rangle}{|x_1-x_2|^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}}\right)(6)\end{aligned}$$

上式后一项括号中的部分显然可以写成

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int\int_{|x_1-x_2|>a}(d^dx_1)(d^dx_2)\widetilde{g}_i\widetilde{g}_j\widetilde{a}^{\Delta_i+\Delta_j-2d}\langle \mathcal{O}_i(x_1)\mathcal{O}_j(x_2)\rangle \\ -&\frac{1}{2}\int\int_{(1+\epsilon)a>|x_1-x_2|>a}(d^dx_1)(d^dx_2)\widetilde{g}_i\widetilde{g}_j\widetilde{a}^{\Delta_i+\Delta_j-2d}\frac{c_{ijk}\langle \mathcal{O}_k(x_2)\rangle}{|x_1-x_2|^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}}. \quad (7)\end{aligned}$$

保留到一阶无穷小，上式的第二项就是

$$-\frac{1}{2}S_d\epsilon\int (d^dx)g_ig_ja^{\Delta_k-d}c_{ijk}\langle \mathcal{O}_k\rangle, \quad (8)$$

式中S_d表示d维空间中$d-1$维单位球面的面积。因此，我们就有

$$\begin{aligned}\widetilde{Z} &= Z_*[-\int (d^dx)\left(\widetilde{g}_k(1+\epsilon)^{\Delta_k-d} + \frac{1}{2}S_d\epsilon g_ig_jc_{ijk}\right)a^{\Delta_k-d}\langle \mathcal{O}_k\rangle] + \\ & Z_*\left(\frac{1}{2}\int\int_{|x_1-x_2|>a}d^dx_1d^dx_2\widetilde{g}_i\widetilde{g}_j(1+\epsilon)^{\Delta_i+\Delta_j-2d}a^{\Delta_i+\Delta_j-2d}\langle \mathcal{O}_i(x_1)\mathcal{O}_j(x_2)\rangle\right).\end{aligned}$$

显然,为了保持配分函数不变，即为了保证$\widetilde{Z}=Z$, 我们应该将$\widetilde{g}_i$取成

$$\widetilde{g}_k = g_k(1+\epsilon)^{d-\Delta_k} - \epsilon\frac{1}{2}S_d g^i g^j c_{ijk}, \tag{9}$$

这里我们精确到一阶无穷小。也即是说，我们有重整化群流

$$\begin{aligned} \frac{dg_k}{d\epsilon} &= (d-\Delta_k)g_k - \frac{1}{2}S_d g^i g^j c_{ijk} \\ &= -\frac{\partial}{\partial g_k}\left(\frac{1}{2}(\Delta_i - d)g_i^2 + \frac{1}{3!}S_d c^{ijk} g_i g_j g_k\right). \end{aligned} \tag{10}$$

从上面的重整化群流方程我们很容易看出，对于$\Delta_k > d$的扰动，重整化群固定点是稳定的，也就是说在这个扰动方向上重整化群流指向流向固定点，这样的扰动我们称之为无关扰动。然而，对于$\Delta_k < d$的那些扰动方向，重整化群流的流向是背离固定点的，这是一些不稳定的扰动方向，这样的扰动称之为相关扰动。