非欧几何：奇妙的庞加莱圆盘世界（下）

陈童

上一次我们说到，在庞加莱单位圆盘世界中，所有的相似三角形必定全等。为了理解这个结论，让我们先回顾一下庞加莱圆盘世界中三角形内角和的公式，

$$\Delta = \pi - S. \tag{1}$$

从这个公式很容易看出来，所有的相似三角形因为有相等的内角和，因此也必定有相等的面积，因此它们就不只是相似，而必定是全等。

下面我们想更深入地理解这个奇妙结论的本质。为此，我们在庞加莱圆盘上引入复坐标，$z = x + iy$. 这样一来，庞加莱圆盘就成了复z平面上的一个单位圆盘。复变函数的知识告诉我们，可以用一个分式线性变换将这个单位圆盘变换到复上半平面, 使得圆盘的边缘变为实轴。比方说，我们可以取这个分式线性变换为

$$z = \frac{1 + iw}{1 - iw}, \tag{2}$$

式中$w = u + iv$为变换以后的复坐标。很显然，这样一个变换是复单位圆盘和复上半平面之间的一个全纯同构。

另外，读者容易验证，分式线性变换以后，原来庞加莱圆盘的度规就变成了上半平面$v > 0$上的度规

$$ds^2 = \frac{|dw|^2}{(\mathrm{Im} w)^2} = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}. \tag{3}$$

这个度规称之为克莱因度规，具备这个度规的上半平面我们称之为罗巴切夫斯基平面。很显然，罗巴切夫斯基平面和庞加莱圆盘的几何本质是等价的，它们仅仅是非欧几何的两种不同表示方式而已。

另一方面，假如我们暂时忘记度规，而从复变函数的角度来考虑问题。那么现在复单位圆盘中的三角形就变成了复上半平面中的三角形。又注意到分式线性变换是一个保角变换，因此复单位圆盘中的相似三角形经过(2)变换到复上半平面以后依然相似，反之亦然。换言之，要研究单位圆盘中的相似三角形，我们只需等价地研究复上半平面的相似三角形。而根据定义，复上半平面的相似三角形就是在复上半平面的保角变换下可以相互等同的那些三角形。因此，要研究复上半平面的相似三角形（实际上任何相似形都一样）那就要研究复上半平面的保角变换。由复变函数的知识我们知道，这就相当于研究整个复上半平面的全纯变换，我们称之为复上半平面的全纯自同构。

实际上，复上半平面的全纯自同构可以由下面的分式线性变换给出，

$$w \to \frac{aw+b}{cw+d}, \tag{4}$$

式中为了确保实轴依然变换为实轴a, b, c, d均必须为实数，而且，为了使得这个分式变换的确代表的是上半平面到上半平面的一个同构，我们还得要求$ad - bc \neq 0$。另外，假如我们将变换中的这四个实参数排成一个矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{5}$$

则读者很容易验证的是，连续的两个全纯自同构的合成就相应于两个这样的2×2实矩阵的矩阵相乘。此外，由于$ad-bc\neq 0$，因此任何一个全纯自同构变换都有一个逆变换。因此，复上半平面的全纯自同构的全体在这个矩阵乘法下就自然地构成一个群，称之为复上半平面的全纯自同构群。

由(4)我们可以知道，a,b,c,d可以相差一个整体的非零实常数，合适地选取这个非零实常数我们总可以要求a,b,c,d满足$ad-bc=1$. 读者可以验证，上一段中谈到的矩阵乘法是保持这个等式不变的。满足所有这些要求的2×2实矩阵的全体所构成的群就是所谓的$SL(2,\mathbb{R})$群。但是，由(4)式读者容易知道，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

这两个不同的$SL(2,\mathbb{R})$群元对应的是复上半平面的同一个全纯自同构。因此，复上半平面的全纯自同构群实际上是$SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$.

另一面，由(4)和(3)的具体表达式我们可以验证，任何$SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$的全纯自同构变换都保持上半平面的克莱因度规(3)不变，因此也就是说，复上半平面的全纯自同构群也就是罗巴切夫斯基的等度规群。或者你也可以说，上半平面的复几何与上半平面的罗巴切夫斯基几何是等价的。特别的，上半平面的在复几何下保持相似的三角形从罗巴切夫斯基几何的角度来看那就是全等三角形（等度规变换的必然结论）。

由于上半平面的复几何等价于单位圆盘的复几何，上半平面的罗巴切夫斯基几何又等价于单位圆盘的庞加莱几何。因此上一段的推理告诉我们的必然结论就是，庞加莱圆盘上的相似三角形必然全

等。这个结论是本文一开始我们就已经得到了的，但绕了这么一圈以后，现在我们就能够深入地理解这个结论的本质了。

庞加莱圆盘世界的奇妙是怎么强调都不过份的，比如有一个美妙的定理是这么说的：庞加莱圆盘世界是所有亏格$g > 1$的黎曼面的万有复叠空间。这个结论的三维推广最终导致了瑟斯顿（Thruston）对三维流形的完整分类。而瑟斯顿的这项重要工作又和庞加莱的另一个伟大贡献密切相关，那就是庞加莱猜想。2006年，数学界最终确认佩雷尔曼证明了瑟斯顿关于三维流形的分类，从而也就证明了悬而未决长达百年的庞加莱猜想。