奇妙的四元数(中)

陈童

继续我们的四元数游戏。这次我们把注意力集中于模长为1的四元数集合，$\mathrm{u} = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$, 模长为一$\overline{u}u = 1$，就给出$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, 这就是四维欧几里德空间的三维单位球面$S^3$。更有趣的是，任意两个模长为1的四元数的乘积任然是一个模长为1的四元数，并且每一个模长为1的四元数u, 都有一个模长为1的四元数$\mathrm{u}^{-1} = \overline{\mathrm{u}}$作为其逆。也就是说，所有模长为1的四元数在四元数的乘法下成为一个群，通常将这个群记为$Sp(1, \mathrm{H})$, H表示四元数。前面的分析告诉我们，$Sp(1, \mathrm{H})$ 的元素一一对应于S^3上的点。

现在，我们选取一个S^3上的球坐标，则任意群元u必定可以写成$\mathrm{u} = \cos(\omega) + \sin(\omega)(n_1\mathrm{i} + n_2\mathrm{j} + n_3\mathrm{k})$, 其中$n_1, n_2, n_3$为三维单位矢量$\vec{n}$的三个分量。不妨将四元数$n_1\mathrm{i} + n_2\mathrm{j} + n_3\mathrm{k}$记成n, 由四元数代数显然有$\mathrm{n}^2 = -1$。另外，在球坐标中，$\omega$是纬线与北极的夹角，其取值范围是$[0, \pi]$。人们通常将角度$\omega$写成$\omega/2$, 其原因我们稍后会给出，现在$\omega$的取值范围当然就是$[0, 2\pi]$。总之，我们可以将$Sp(1, \mathrm{H})$的任意群元u写成

$$\mathrm{u} = \cos(\frac{\omega}{2}) + \mathrm{n}\sin(\frac{\omega}{2}). \tag{1}$$

注意到$\mathrm{n}^2 = -1$, 也就是说，在代数上四元数n和虚数单位i是一样的，因此我们同样有欧拉公式，即任意$Sp(1, \mathrm{H})$的群元都可以写成

$$\mathrm{u}(\omega, \vec{n}) = \exp(\frac{\omega}{2}\mathrm{n}) = \cos(\frac{\omega}{2}) + \mathrm{n}\sin(\frac{\omega}{2}). \tag{2}$$

显然,$\exp(\frac{\omega}{2}\mathrm{n})$的逆元是$\exp(-\frac{\omega}{2}\mathrm{n})$.

群$Sp(1,\mathrm{H})$有一个三维矢量空间旋转的直观解释。为了说清楚这一点，我们将三维空间中的每一个矢量$\vec{x}$，对应到一个四元数x, $\mathrm{x} = x_1\mathrm{i} + x_2\mathrm{j} + x_3\mathrm{k}$, 其中$x_1, x_2, x_3$是矢量$\vec{x}$的三个坐标分量。假定另有一个这样的四元数y, 它相应于三维矢量$\vec{y}$。运用四元素代数我们就有，

$$\mathrm{xy} = -(\vec{x}\cdot\vec{y}) + \mathrm{x}\times\mathrm{y}, \tag{3}$$

式中$\mathrm{x}\times\mathrm{y}$代表一个四元数，其相应的三维矢量是$\vec{x}\times\vec{y}$.

现在我们将$Sp(1,\mathrm{H})$的群元共轭地作用在相应于三维矢量$\vec{x}$的四元数x上，

$$\begin{aligned} & \exp\left(\frac{\omega}{2}\mathrm{n}\right)\mathrm{x}\exp(-\frac{\omega}{2}\mathrm{n}) \\ = \; & [\cos(\frac{\omega}{2}) + \mathrm{n}\sin(\frac{\omega}{2})]\mathrm{x}[\cos(\frac{\omega}{2}) - \mathrm{n}\sin(\frac{\omega}{2})] \\ = \; & \cos(\omega)\mathrm{x} + \sin(\omega)\mathrm{n}\times\mathrm{x} + (\vec{n}\cdot\vec{x})\mathrm{n}(1-\cos(\omega)) \end{aligned} \tag{4}$$

为了得到上式的最后一行我们运用了公式(3)。最后得到的这个看起来有点复杂的结果其实就是将矢量$\vec{x}$绕$\vec{n}$轴旋转一个角度ω(正因为ω是旋转角度，所以我们前面要做那个$\omega\to\omega/2$的替换)。这可以证明如下：首先假定$\vec{x}$ 在垂直于$\vec{n}$ 的平面上，这时候很容易验证将$\vec{x}$绕$\vec{n}$旋转ω就是$\cos(\omega)\vec{x} + \sin(\omega)\vec{n}\times\vec{x}$, 正好相应于(4)最后一行给出的四元数。其次，如果$\vec{x}$本身就沿着$\vec{n}$的方向，这时候$\vec{x}$绕$\vec{n}$轴旋转当然是不变的，注意到这时$\vec{x} = \vec{n}(\vec{x}\cdot\vec{n})$, 也正好和(4)最后一行一致。最后，如果$\vec{x}$是一个一般的矢量，则我们总可以将之分解成一个垂直于$\vec{n}$的矢量和一个平行于$\vec{n}$的矢量的叠加，矢量的叠加性告诉我们，最终我们的公式必定能够写成(4)最后一行的形式。

也就是说，三维空间的每一个旋转，都对应于一个$Sp(1,\mathrm{H})$群元$\mathrm{u}(\omega,\vec{n})$。反过来，两个$Sp(1,\mathrm{H})$的群元$\pm\mathrm{u}(\omega,\vec{n})$对应于同一个三维空间旋转。并且这个对应保持群的乘法不变。因此，$Sp(1,\mathrm{H})$与三维旋转群$SO(3)$之间有2对1的同态对应。或者说，$Sp(1,\mathrm{H})$同构于$SU(2)$群。特别有趣的是，由(1)我们有，当$\omega=2\pi$时，$\mathrm{u}(2\pi,\vec{n})=-1$, 也就是说转动$2\pi$角并不是不变，而是多出一个负号，只有转动$4\pi$角才是1，$\mathrm{u}(4\pi,\vec{n})=1$。

你可能已经注意到了，三维空间中的单位矢量一一对应于平方为-1的四元数。现在，我们取定一个相应于三维单位矢量$\vec{m}$的四元数m, 并将$Sp(1,\mathrm{H})$ 的群元u共轭地作用在它上面，

$$\mathrm{u}\to\mathrm{m}(\mathrm{u})=\mathrm{u}^{-1}\mathrm{m}\mathrm{u} \tag{5}$$

很容易验证m(u)的平方和预先选定的四元数m的平方一样，均为-1, 因此，每一个m(u)都对应三维空间的一个单位矢量，或者说对应于两维单位球面S^2上的一个点。由于群元u相应于三维球面上的点，因此$\mathrm{u}\to\mathrm{m}(\mathrm{u})$就定义了一个$S^3\to S^2$的映射。这就是著名的Hopf映射。

为了看清Hopf映射的奇妙之处，我们注意到$\mathrm{m}(e^{\mathrm{m}\theta}\mathrm{u})=\mathrm{m}(\mathrm{u})$，其中$e^{\mathrm{m}\theta}=\cos(\theta)+\mathrm{m}\sin(\theta)$画出了一个圆周$S^1$，所以，对于$S^2$ 上的每一点，其Hopf映射的原像是S^3上的一个圆周。也就是说Hopf映射在底流形S^2上定义了一个非平凡的圆周丛，这个丛的总空间为S^3。

以上是将$Sp(1,\mathrm{H})$群元作用在相应于三维矢量的四元数上，那么如果将它作用在一个任意的四元数$\mathrm{x}=x_0+x_1\mathrm{i}+x_2\mathrm{j}+x_3\mathrm{k}$上呢？(显然这样一个任意的四元数相应于一个四维的矢量(x_0,x_1,x_2,x_3))。实际上我们可以更一般地考虑两个相互独立的$Sp(1,\mathrm{H})$群元(分别记

为u_L, u_R)从左右两边同时作用在x上，这实际上是对x 的一个线性变换

$$\mathrm{x} \to \mathrm{x}' = \mathrm{u}_L \mathrm{x} \mathrm{u}_R, \tag{6}$$

由于u的模长为1，很显然，这个线性变换不会改变x的模长，因此它相应于四维矢量(x_0, x_1, x_2, x_3)在四维空间的一个旋转。同样的，我们注意到$(\mathrm{u}_L, \mathrm{u}_R)$ 和$(-\mathrm{u}_L, -\mathrm{u}_R)$对应的是同一个四维旋转，也就是说$Sp(1, \mathrm{H}) \times Sp(1, \mathrm{H})$ 与$SO(4)$之间有2对1的同态对应，因此，$Sp(1, \mathrm{H}) \times Sp(1, \mathrm{H})$同构于Spin(4)。