奇妙的四元数(下)

陈童

前面我们让你不要问$\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}$是什么东西，也不要问它们之间那个奇怪的乘法又是什么东西，而是把这一切当成一种奇妙的游戏。这一节我们来谈一谈如何用我们更熟悉的数学对象来实现这种四元数的代数游戏。这就是所谓的四元数代数的表示。这里的奇妙现象是，四元数的奇怪乘法可以用矩阵的乘法来实现。

我们首先注意到任意一个四元数都可以写成$\mathrm{u}=(a+b\mathrm{i})+(c+\mathrm{i}d)\mathrm{j}$的形式，这启发我们将四元数里的$\mathrm{i}$等同于复数单位$i$, 因此任何四元数都可以用两个复数$z_1=(a+b\mathrm{i})$, $z_2=(c+\mathrm{i}d)$表示成

$$\mathrm{u}=z_1+z_2\mathrm{j}. \tag{1}$$

值得注意的是由于四元数的j和i反对易，因此j和复数z之间有关系式，$\mathrm{j}z=\bar{z}\mathrm{j}$.

假定我们另有一个四元数$\mathrm{v}=w_1+w_2\mathrm{j}(w_1,w_2$也是两个复数), 那么由四元数的乘法，我们可以计算得

$$\mathrm{uv}=(z_1w_1-z_2\overline{w}_2)+(z_1w_2+z_2\overline{w}_1)\mathrm{j}. \tag{2}$$

也就是说，我们可以将每一个四元数u看成一个复数对(z_1,z_2)，四元数的乘法就等价于在这个复数对空间定义如下的乘法

$$(z_1,z_2)\cdot(w_1,w_2)=(z_1w_1-z_2\overline{w}_2,z_1w_2+z_2\overline{w}_1). \tag{3}$$

当然这依然是一种奇怪的乘法，下面我们要做的就是继续将这种奇怪的复数对乘法对应到更通常的矩阵乘法。

为此，我们将复数对(z_1,z_2)对应到一个2×2的矩阵，

$$(z_1,z_2)\to\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

当我们将所有的复数对都做了这样的矩阵对应以后，我们很容易发现复数对的奇怪乘法(3) 自然地对应于下面这个通常的矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ -\overline{w}_2 & \overline{w}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1w_1-z_2\overline{w}_2 & z_1w_2+z_2\overline{w}_1 \\ -(\overline{z_1w_2+z_2\overline{w}_1}) & \overline{z_1w_1-z_2\overline{w}_2} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

这样我们就找到了奇怪的四元数代数的矩阵代数实现。让我们简单将这里的逻辑整理一下，首先，我们发现四元数代数可以实现为复数对的乘法(3), 其次，我们又发现复数对的这种乘法完全对应于形如(4)类型的2×2矩阵的矩阵乘法。因此，我们就将四元数代数实现成了形如下式的矩阵的矩阵代数，

$$\mathrm{u}=z_1+z_2\mathrm{j}\to\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

这个矩阵代数就称为四元数代数的一个矩阵表示，实际上，它是四元数代数的最小矩阵表示。

很容易验证的是，形如(6)的这些表示矩阵其实就是所有满足

$$JU=\overline{U}J \tag{7}$$

的2×2复矩阵U, 这里$\overline{U}$代表U的复共轭矩阵，J是满足$J^2=-1$的一个2×2矩阵, 它就是四元数里的j在(6)这个矩阵表示中的实现，具体

来说就是

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

方程(7)也称为2×2复矩阵空间的赝实条件，所以，四元数代数可以不可约地表示为所有满足赝实条件的2×2复矩阵的矩阵代数。这就解释了为什么初看起来人为地定义的四元数游戏永远都不会出现自相矛盾，因为它等价一类矩阵的乘法代数，而矩阵的乘法我们知道当然是没有自相矛盾的。