奇妙的四元数(上)

陈童

你可能听说过哈密尔顿的四元数，不过不一定了解四元数在现代抽象代数发展历史上的地位。简言之，四元数之于抽象代数，有点类似于非欧几何之于现代几何学，它们一起带来了一场数学观念的革命！

四元数的定义很简单，就是在实数的基础上添加三个新的元素$\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$, 并让它们满足下面这两组简单的代数关系

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1 \tag{1}$$

$$-\mathrm{ji} = \mathrm{ij} = \mathrm{k}, -\mathrm{kj} = \mathrm{jk} = \mathrm{i}, -\mathrm{ik} = \mathrm{ki} = \mathrm{j}. \tag{2}$$

现在，请你停止问$\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$是什么东西，$\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$是什么东西不重要，它们的代数规则才重要，也不要问自然界中什么东西满足这样的规则，这也不重要。数学是一种游戏，游戏的规则由人而不是由自然制定，对这规则的唯一限制是，由它所推导出来的整个游戏一定不能出现任何逻辑上的相互矛盾。现代数学家称这些由“数学游戏规则”生成的“数学游戏”为数学结构。数学结构不必是自然的反映，只需逻辑一致，另外，当然还要有某种深层次上的美。实际上，从数学是自然的反映的观念转向数学结构的观念是现代数学的一场观念革命。

回到四元数。新添加的这三个元素最妙的地方在于，它们的乘法不满足交换律！它们是反交换的，比如$\mathrm{ij} = -\mathrm{ji}$。

那么，在这个新的游戏规则之下，我们能玩些什么游戏呢？让我们从一个整数的例子开始，关于整数有一条规律是这样的，假定有两个整数a, b,它们都能写成四个整数的平方和，则这两个整数的乘积ab也一定能写成四个整数的平方和。比如$4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, $10 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2$,则乘积$40 = 4^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2$。再比如$30 = 1^2+2^2+3^2+4^2$, $10 = 1^2+1^2+2^2+2^2$, 则乘积$300 = 15^2+1^2+5^2+7^2$。这当然是一个有趣的规律，问题是怎么证明它普遍成立呢？

利用四元数我们就能够很容易地证明它。假定我们有一个一般的四元数x,

$$x = x_0 + x_1\mathrm{i} + x_2\mathrm{j} + x_3\mathrm{k}, \tag{3}$$

其中，x_0, x_1, x_2, x_3当然是四个实数。现在我们构造一个新的四元数，不妨记作$\overline{x}$, 称为x的共轭，

$$\overline{x} = x_0 - x_1\mathrm{i} - x_2\mathrm{j} - x_3\mathrm{k}. \tag{4}$$

利用(1)(2), 你很容易计算出来

$$\overline{x}x = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \tag{5}$$

我们就称这为四元数x的模方$|x|^2$, 是一个实数。可见，一个四元数的模方总是四个数的平方和，反过来，假定有一个整数能写成四个整数的平方和，那么总有一个相应的四元数，其模方等于这个整数。

现在假定我们另有一个四元数y,

$$y = y_0 + y_1\mathrm{i} + y_2\mathrm{j} + y_3\mathrm{k}. \tag{6}$$

和上面完全一样的，我们也可以求其模方，这模方当然也是四个整数的平方和。很显然，这两个四元数的乘积xy也是一个四元数，其模方$|xy|^2$当然也是四个数的平方和。下面是一个关键点，在计算xy的模方时，我们要用到xy的共轭$\overline{xy}$, 利用四元数的代数关系(1)(2)，我们可以证明

$$\overline{xy} = \overline{y} \cdot \overline{x}. \tag{7}$$

因此，$|xy|^2 = xy\overline{xy} = xy\overline{y} \cdot \overline{x} = |y|^2 x\overline{x} = |x|^2|y|^2$. 因此，如果有两个整数，均为四个整数的平方和，那么它们就分别相应于$|x|^2$和$|y|^2$,则它们的乘积$|x|^2|y|^2$ 就一定可以写成一个新的四元数xy的模方$|xy|^2$,也就是说，必定也可以写成四个整数的平方和。这样我们就一般性地证明了那个关于整数的有趣规律。

四元数的游戏能够玩出来的有意思东西还有很多。然而最让人觉得不可思议的也许是，看起来很人为的构造(1)(2), 竟然无论你怎么玩永远都不会出现矛盾。不满足乘法交换律的代数在逻辑的一致性上竟然和熟知的整数，实数，甚至复数一样真实。

写到这里，你可能早就意识到了，四元数其实是复数的某种推广。那么四元数能不能被进一步推广呢？有一个数学定理是这样说的：如果不破坏乘法结合律，那么就到此为止，再不能进一步推广了。