从环绕数到映射度（二）

陈童

上一节我们讨论了从两维闭合曲面Σ到单位球面S^2的映射，$\mathrm{n}:\Sigma\to S^2$。我们将这个映射的映射度记为$\deg(\mathrm{n})$，由上一节我们知道，它由下式给出

$$\deg(\mathrm{n})=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}dudv\mathrm{n}\cdot(\mathrm{n}_u\times\mathrm{n}_v),\tag{1}$$

式中u,v是两维曲面Σ的局部坐标, n_u和n_v分别表示$\partial\mathrm{n}/\partial u$和$\partial\mathrm{n}/\partial v$。

这一节我们来讨论这类映射中最早被定义的那一个，即高斯映射。在高斯映射中，n由曲面Σ的法矢量给出，因此有

$$\mathrm{n}=\frac{\mathrm{x}_u\times\mathrm{x}_v}{|\mathrm{x}_u\times\mathrm{x}_v|},\tag{2}$$

式中x表示Σ所处的三维空间的矢量，$\mathrm{x}_u=\partial\mathrm{x}/\partial u$和$\mathrm{x}_v=\partial\mathrm{x}/\partial v$分别是曲面在$u,v$两个方向上的切矢量。

利用高斯映射可以得到著名的高斯-博内特公式。

为了说清楚高斯博内特公式，让我们先来回忆一下曲面论里面的第一基本形式和第二基本形式，以及那个最核心的概念，高斯曲率。假定我们以$\sigma^i,i=1,2$表示Σ的两个局部坐标u,v，则第一基本形式的定义是

$$ds^2=g_{ij}d\sigma^id\sigma^j=d\mathrm{x}\cdot d\mathrm{x},\tag{3}$$

式中g_{ij}就是曲面的度规张量，并且我们默认了求和约定。由上式人们很容易计算出g_{ij}在局部坐标u, v中的各个分量。由此人们可以进一步得到矩阵g_{ij}的行列式g

$$g = \det(g) = (\mathrm{x}_u \cdot \mathrm{x}_u)(\mathrm{x}_v \cdot \mathrm{x}_v) - (\mathrm{x}_u \cdot \mathrm{x}_v)^2. \tag{4}$$

第二基本形式的定义是

$$b_{ij} d\sigma^i d\sigma^j = d^2\mathrm{x} \cdot \mathrm{n} = -d\mathrm{x} \cdot d\mathrm{n}, \tag{5}$$

这里我们运用了切矢量$d\mathrm{x}$与法向量n的正交性。从这个式子我们也容易计算出b_{ij}的各分量，与下文的讨论相关的是

$$b = \det(b) = (\mathrm{x}_u \cdot \mathrm{n}_u)(\mathrm{x}_v \cdot \mathrm{n}_v) - (\mathrm{x}_u \cdot \mathrm{n}_v)(\mathrm{x}_v \cdot \mathrm{n}_u). \tag{6}$$

高斯曲率K的定义是，两个基本形式行列式的比值，也就是

$$K = \frac{\det(b)}{\det(g)}. \tag{7}$$

下面我们开始讨论如何利用高斯映射，以及映射度公式(1), 来得出高斯博内特公式。为此，我们将(2)代入(1)，得到，

$$\begin{aligned}
\deg(\mathrm{n}) &= \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma dudv \frac{(\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v) \cdot (\mathrm{n}_u \times \mathrm{n}_v)}{|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v|} &(8)\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma dudv \frac{(\mathrm{x}_u \cdot \mathrm{n}_u)(\mathrm{x}_v \cdot \mathrm{n}_v) - (\mathrm{x}_u \cdot \mathrm{n}_v)(\mathrm{x}_v \cdot \mathrm{n}_u)}{|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v|} &(9)\\
&= \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma dudv \frac{\det(b)}{|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v|}. &(10)
\end{aligned}$$

同时又注意到

$$|\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v|^2 = (\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v) \cdot (\mathrm{x}_u \times \mathrm{x}_v) \tag{11}$$

$$= (\mathrm{x}_u \cdot \mathrm{x}_u)(\mathrm{x}_v \cdot \mathrm{x}_v) - (\mathrm{x}_u \cdot \mathrm{x}_v)^2 = \det(g). \tag{12}$$

因此我们有

$$\deg(\mathrm{n}) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \frac{\det(b)}{\det(g)} \sqrt{g} du dv \tag{13}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma K dA. \tag{14}$$

前面我们已经证明过，映射度deg(n)是一个同伦不变量，实际上，在拓扑学中可以进一步证明$\deg(\mathrm{n}) = \chi(\Sigma)/2$, 这里$\chi(\Sigma)$表示闭合曲面$\Sigma$的欧拉数。结合前面的(14), 我们就有著名的高斯博内特公式

$$\frac{1}{2\pi} \int_\Sigma K dA = \chi(\Sigma). \tag{15}$$