从环绕数到映射度（一）

陈童

考虑S^1(由$|z|=1$定义)到S^1($|w|=1$)的映射$z\to w$。显然如果$w=z^n$, 则它将n个不同的点映射到一个点，因此有环绕数

$$\frac{1}{2\pi i}\oint w^{-1}dw=n. \tag{1}$$

上面这个公式就是计算$S^1\to S^1$环绕数的公式，环绕数是一个拓扑不变量。

上面这个环绕数的公式是用复数来表达的，如果换成实数，比方说令$w=x+iy$, 类似地我们将w限制在一个半径为r的圆周上，$\overline{w}w=r^2$，则(1)可以重写成(注意到$xdx+ydy=0$)

$$\frac{1}{2\pi}\oint\left(\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\right). \tag{2}$$

被积的那个1形式其实就是两维欧空间R^2的单位圆的“体积”形式。

人们很容易将单位圆的“体积”形式推广到3维欧空间R^3的单位球面S^2上，相应的$S^1\to S^1$的映射就推广成一个黎曼曲面Σ到S^2的映射，现在映射的“环绕数”公式应该是

$$\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma\left(\frac{xdy\wedge dz-ydx\wedge dz+zdx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right). \tag{3}$$

如果我们用R^3的单位矢量$\vec{n}^2=1$来表达这个公式，就是(用了求和约定)

$$\frac{1}{8\pi}\int_\Sigma \epsilon_{ijk}n^i dn^j\wedge dn^k. \tag{4}$$

人们很容易证明(4)是同伦不变的。为此，考虑$\vec{n}$的一个无穷小形变$n^i \to n^i + \delta n^i$, 由于要保持n^i为单位矢量，因此$n^i \delta n^i = 0$。在这个无穷小形变下“环绕数”的改变量为，

$$\frac{1}{8\pi}\int_{\Sigma}(\epsilon_{ijk}\delta n^i dn^j \wedge dn^k + 2\epsilon_{ijk} n^i d\delta n^j \wedge dn^k) \tag{5}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} d(\epsilon_{ijk} n^i \delta n^j dn^k) - \frac{1}{8\pi}\int_{\Sigma}\epsilon_{ijk}\delta n^i dn^j \wedge dn^k. \tag{6}$$

这里的第一项在闭合流形上当然是0，第二项其实也是零，为此注意到δn^i 和微分dn^i都垂直于n^i, 因此作为三维欧空间的矢量，δn^i和n^i的两个偏导这三个矢量一定是线性相关的，因此上面式子的第二项必定为零，“环绕数”在同伦形变下保持不变。实际上，“环绕数”公式不光是同伦不变的，而且“环绕数”一定是整数，关于这一点我们以后再给出一般性的证明。

我们可以利用球极投影将单位球面S^2投影到包括无穷远点的复平面上，

$$n^1 + in^2 = 2w/(1+|w|^2), n^3 = (1-|w|^2)/(1+|w|^2). \tag{7}$$

这时候(4)式就变成

$$\frac{i}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{dw \wedge d\overline{w}}{(1+|w|^2)^2}. \tag{8}$$

如果我们要求$\Sigma \to S^2$(我们在Σ上取复坐标，使得这映射为$z \to w(z,\overline{z})$)对整个黎曼球上的$w=0$和$w=\infty$ 都有$q>0$重覆盖, 则我们可以构建如下“环绕数”为q 的映射

$$w(z) = A\prod_{i}^{q}\frac{(z-a_i)}{(z-b_i)}, \tag{9}$$

有一个基础于同伦不变性的Hopf定理说，任何“环绕数”为q的映射都同伦于上面这个映射。类似地，“环绕数”为$-q$的映射都同伦于

$$w(\overline{z}) = B\prod_i^q \frac{(\overline{z}-c_i)}{(\overline{z}-d_i)}. \tag{10}$$

实际上，这些“环绕数”就是所谓的$\Sigma \to S^2$映射的映射度。映射度其实是微分拓扑中一个相当一般性的概念。不过，我们这里不打算讨论映射度的一般定义。

特别的，假如人们考虑，$T^2 \to S^2$的映射度，那么(4)就可以写成下面的形式，

$$\frac{1}{4\pi}\int_{T^2} \frac{\vec{x}\cdot(\partial_u\vec{x}\times\partial_v\vec{x})}{|\vec{x}|^3}, \tag{11}$$

式中u, v为T^2的两个坐标。学过电磁学的人可能会觉得很眼熟，没错，在电磁学中如果要用毕奥-萨伐尔定律证明安培环路定理就要用到这个拓扑学公式，它计算的是两条回路的连接数。